



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

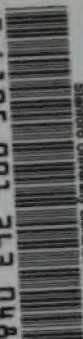
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

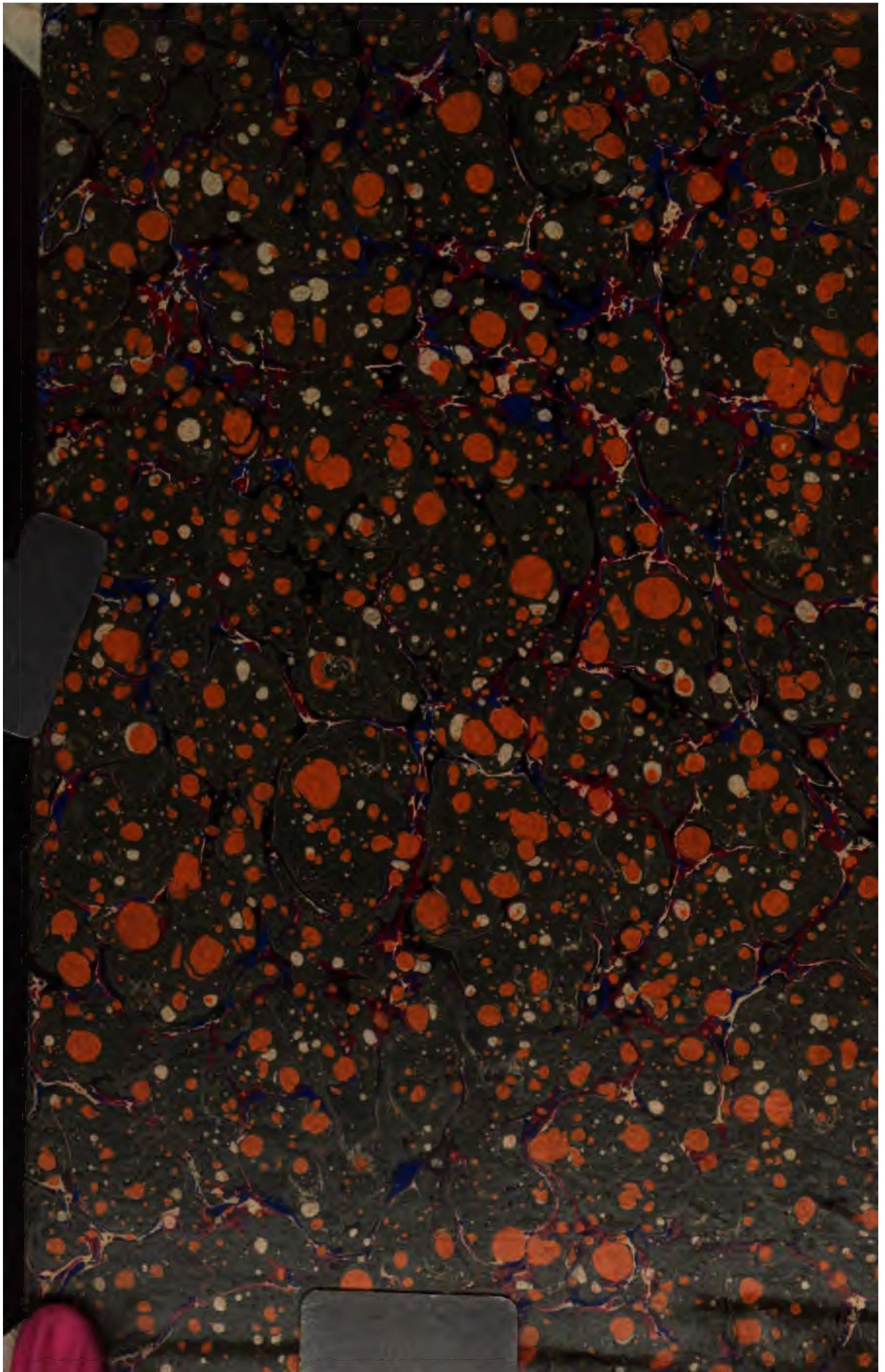
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

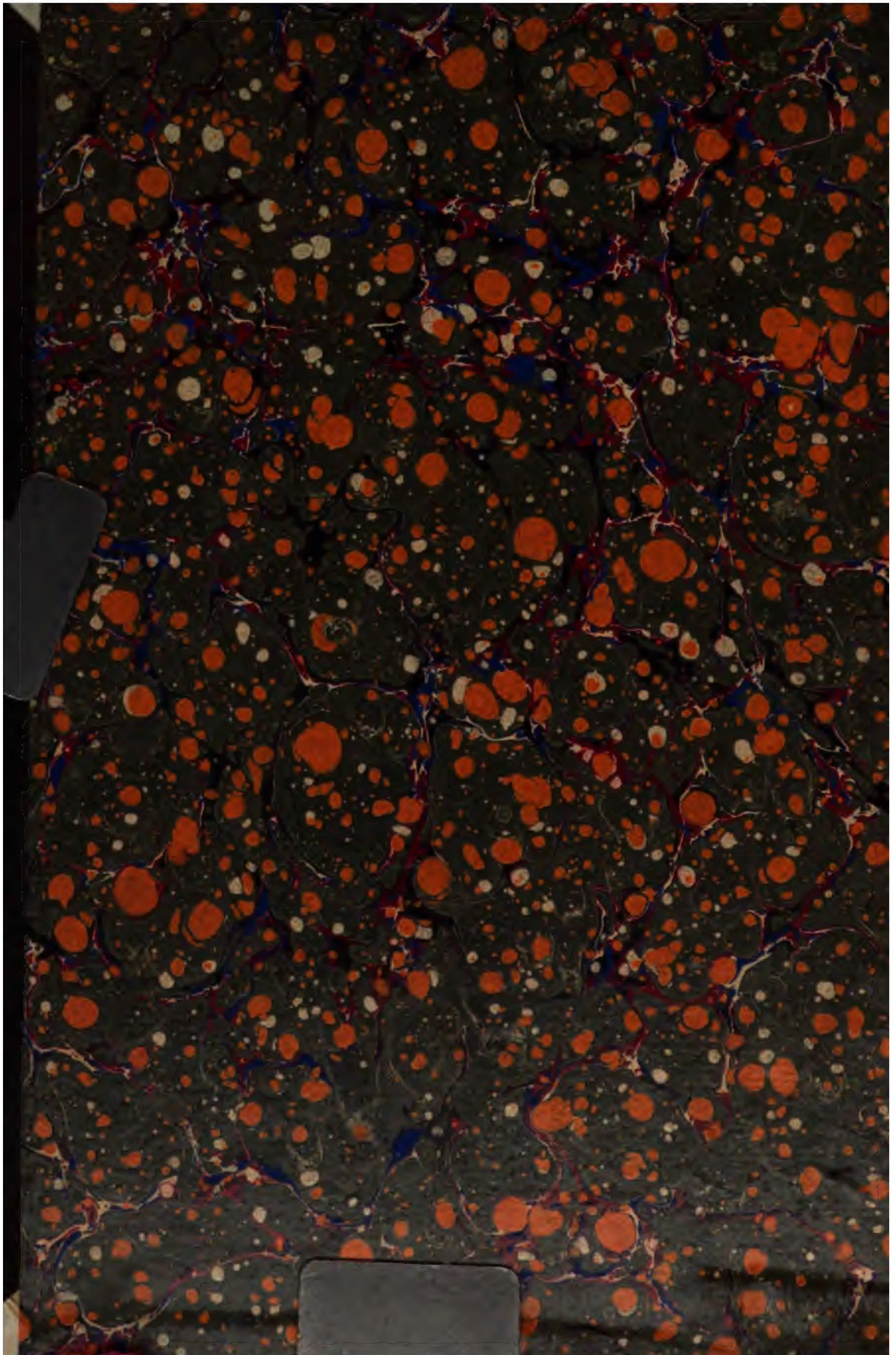
940 593 T00 5079 E

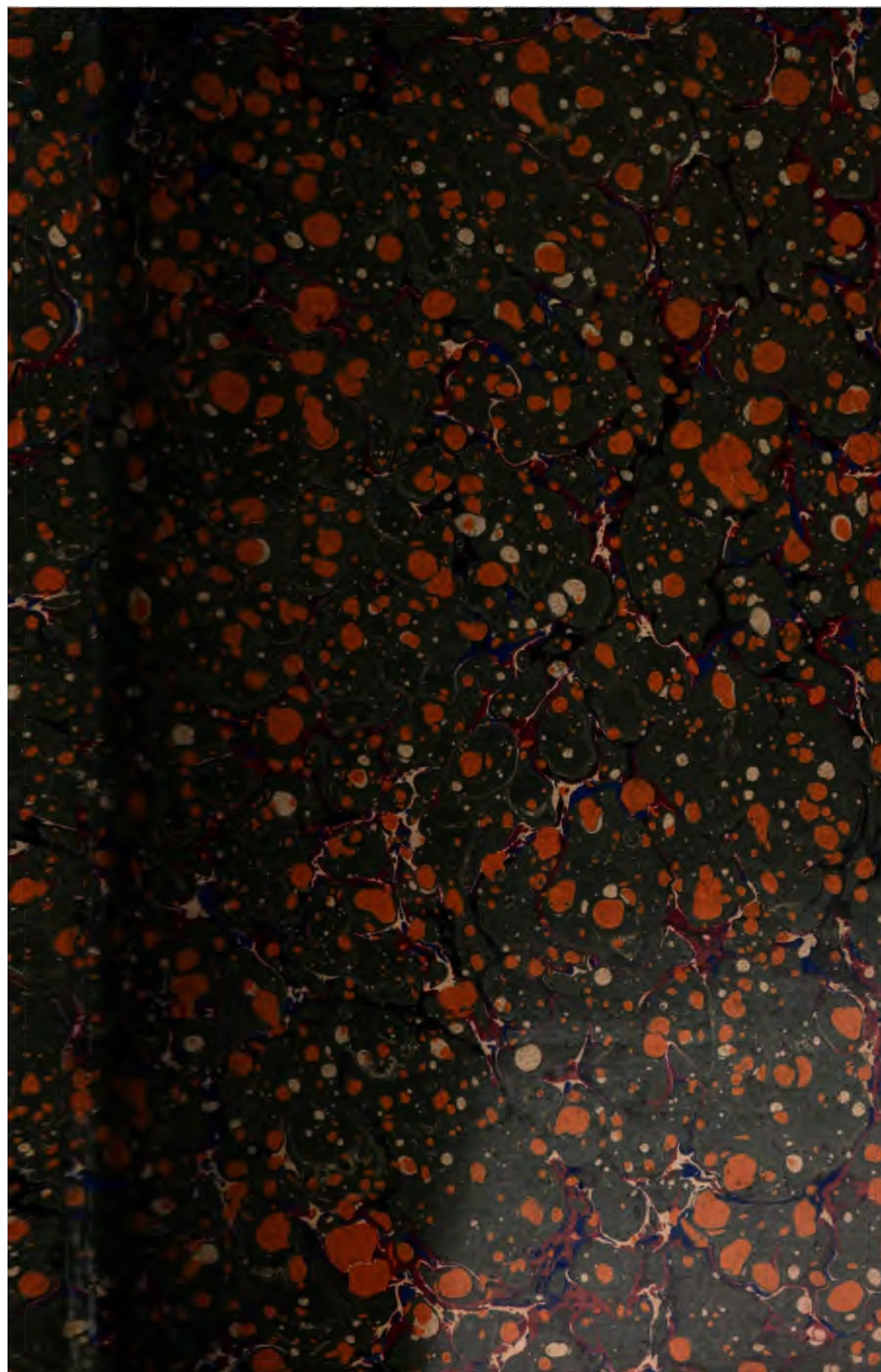


Stanford University Libraries









• • • •

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

2738

Stanford Univ.
AUG
26
1903

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN,
C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE UND **C. RUNGE**
IN STUTTGART. IN HANNOVER.

49. BAND. 1. HEFT.

MIT 52 FIGUREN IM TEXT UND 3 TAFELN IN LITHOGRAPHIE.

Ausgegeben am 4. August 1903.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 32 Druckbogen in 4 Heften und kostet 30 Mark; es werden jährlich etwa 8 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

	Seite
Zur Theorie des räumlichen Fachwerkes. Von Dr. Ing. Alexander Hasch in Wien Mit 17 Figuren im Text und 3 Tafeln	1
Über einige Gelenksysteme mit ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Elementen. Von P. Somoff in Warschau. Mit 20 Figuren im Text	25
Über die Benennung und kinematische Unterscheidung der verschiedenen Arten von Kurvenpunkten sowie über Krümmungen und Windungen verschiedener Ordnung. Von R. Mehmke in Stuttgart. Mit 14 Figuren im Text	62
Zum Ostwaldschen Axiom der Mechanik. Von E. Förster in Göttingen	84
Zur Frage der Bezeichnungsweise in der darstellenden Geometrie. Von E. Müller in Wien	89
Bestimmung des Schwerpunktes einer krummlinig begrenzten ebenen Fläche mit Hilfe des Polarplanimeters von Amsler. Von G. L. Tiraspol'skij in Tomsk (Sibirien). Mit 1 Figur im Text	92
Eine Bemerkung zur Graphischen Statik. Von N. J. Hatzidakis in Athen	95
Kleinere Mitteilungen	96
Bücherschau	99
Schubert, Moderne Analysis. Von Cauer	99
Schwarz, Zur Bilanzrechnung bei Pensions-Instituten. Von Cauer	99
Reuling, Die Grundlagen der Lebensversicherung. Von Cauer	100
Vettère, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Karl Duschlemann	101
Schlotke, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Karl Duschlemann	102
Sicard, Traité de cinématique théorique. Von H. Müller	102
Tessari, La costruzione degli ingranaggi. Von H. Müller	103
Neue Bücher	105
Eingelaufene Schriften	109
Abhandlungsregister 1902. Von E. Wülffing in Stuttgart	112

Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
Fr. Berger, A. Bösch, P. Bräuer, K. Duschlemann, W. Ehart, O. Eggart, R. Gans, L. Grätz,
A. Grünwald, G. Hamel, H. Hasemann, E. Heun, J. Horn, A. Kempe, O. Knap, F. Ludwiz,
R. Mehmke, R. Nothe, C. Runge, Joh. Schüßel, Fr. Schur, A. Sommerfeld, P. Stückel, A. Weller,
E. Wülffing.

6

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN,
C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE
IN STUTTGART.

UND

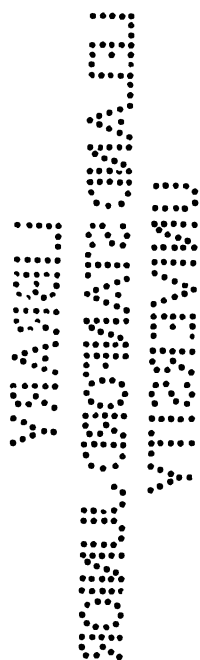
C. RUNGE
IN HANNOVER.

49. BAND.

MIT 3 DOPPELTAFELN, 3 TAFELN UND 184 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.



ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhalt.

	Seite
Berger, Franz. Über ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Form empirisch ermittelter Kurven	306
Eggert, Otto. Über die günstigsten Punktlagen beim „Einschneiden“. Mit einer Doppeltafel	145
Förster, E. Zum Ostwaldschen Axiom der Mechanik	84
Gans, Richard. Ein Beitrag zur Theorie der Nobilischen Farbenringe	298
Graetz, L. Über die Spannungskurve gesättigter Dämpfe	289
Grünwald, Anton. Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels. Mit zwei Doppeltafeln	211
Hamel, Georg. Über die Zusammensetzung von Vektoren	362
Hasch, Alexander. Zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Mit drei Tafeln	1
Hatzidakis, N. I. Eine Bemerkung zur graphischen Statik	95
Heimann, H. Die durch Eigengewicht verursachte Deformation eines längs einer Mantellinie unterstützten Kreis-Cylinders	348
Horn, J. Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad	246
Kempe, A. Über die stetige Erzeugung gewisser Schleifenkurven, die einen beliebigen Winkel in gleiche Teile teilen	342
Kragh, Oluf. Über die Kreiselbewegung an der Erdoberfläche	315
Ludia, Adolf. Der dreifach statisch unbestimmte Bogenträger unter der Einwirkung beliebig gerichteter Kräfte	460
Ludwig, F. Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie	269
Mehmke, R. Über die Benennung und kinematische Unterscheidung der verschiedenen Arten von Kurvenpunkten sowie über Krümmungen und Windungen verschiedener Ordnung	62
Mohr, Otto. Beitrag zur Geometrie der Bewegung ebener Getriebe	393
Müller, E. Zur Frage der Bezeichnungsweise in der darstellenden Geometrie	89
Schnöckel, J. Ein Apparat zur Bestimmung des Flächeninhalts, des statischen Momentes, Trägheitsmomentes und beliebiger anderer Momente krummlinig begrenzter ebener Figuren	372
Schur, Friedrich. Über die Zusammensetzung von Vektoren	352
Sellentin, H. Der Einfluß der Stirnwände eines Kessels auf die Festigkeit der Mantelbleche	450
Somoff, P. Über einige Gelenksysteme mit ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Elementen	25
Tirapolskij, G. L. Bestimmung des Schwerpunktes einer krummlinig begrenzten ebenen Fläche mit Hilfe des Polarplanimeters von Amaler	92
Weiler, A. Geometrisches über einige Abbildungen der Kugel in der Kartenentwurflehre	169

Kleinere Mitteilungen.

Ein Satz über die Zweikörperbewegung. Von R. Mehmke	96
Decimale Ephemeriden	97
Über die darstellend-geometrische Konstruktion der Schmiegungebene einer Raumkurve in einem gegebenen Punkt. Von R. Mehmke	277
Zur Reduktion eines Kräftesystems auf zwei Einzelkräfte. Von R. Mehmke	382
Aussprüche über sexagesimale Winkelteilung und über Rechenmaschinen	384
Konstruktion der Krümmungsachse und des Mittelpunktes der Schmiegungekugel einer durch Grundriß und Aufriß gegebenen Kurve. Von R. Mehmke	464
Tafel der Antilogarithmen für die Basis 2. Von J. Schnöckel	465

Anskünfte.

	Seite
Schnabel = Rückkehrpunkt 2. Art	278
Bezeichnung der Punkte mit kleinen lateinischen Buchstaben	278
Antilogarithmischer Maßstab	278
Spiegellineal	385
Absolutes Maßsystem.	385

Anfrage.

Betreffend: Rownings „Universal constructor of equations“ und Clairauts Machine pour construire les équations	98
--	----

Bücherschau.

Hermann Schubert. Niedere Analysis. I. Von E. Czuber	99
Ad. Schwarz. Zur Bilanzrechnung bei Pensions-Instituten. Von E. Czuber	99
Wilhelm Reuling. Die Grundlagen der Lebensversicherung. Von E. Czuber	100
Karl Vettors. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von K. Doehlemann	101
J. Schlotke. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von K. Doehlemann	102
H. Sicard. Traité de cinématique théorique. Von R. Müller	102
D. Tessari. La costruzione degli ingranaggi. Von R. Müller	279
E. Study. Geometrie der Dynamen. Von W. Wirtz	279
Veröffentlichung des Königl. Preussischen Geodätischen Instituts. Bestimmung der Längendifferenz Potsdam-Pulkowa im Jahre 1901. Von W. Ebert	282
P. Güßfeldt. Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen und die Entwicklung der hierfür maßgebenden mathematisch-geographischen Begriffe. Von C. W. Wirtz	283
S. Günther. Astronomische Geographie. Von C. W. Wirtz	285
C. v. Dillmann. Astronomische Briefe. Von C. W. Wirtz	285
Schubert. Neuer ewiger Kalender zur Bestimmung des Wochentags für jedes beliebige Datum nach und vor Christi Geburt. Von C. W. Wirtz	285
P. Harzer. Über die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmels- körpern nach drei Beobachtungen. Von C. W. Wirtz	385
H. Andoyer. Théorie de la lune. Von C. W. Wirtz	386
L. Dünner. Die älteste astronomische Schrift des Maimonides. Von C. W. Wirtz	387
J. H. Lamberts Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Kometen. Deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von J. Bauschinger. Von C. W. Wirtz	388
F. Hayn. Selenographische Koordinaten. Von C. W. Wirtz	388
E. I. Kugler. Multiplikator. Von R. Mehmke	468
J. A. Bonnermann. Vraagstukken over theoretische Mechanica. Von R. Mehmke	468
Allan Cunningham. Binary Canon. Von R. Mehmke	468
E. Duporcq. Compte rendu du 2. congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Von E. Wölffing	469
J. C. Poggendorffs biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band. Von E. Wölffing	469
C. de Freycinet. Sur les principes de la mécanique rationelle Von Paul Stäckel	470
P. Appell et J. Chappuis. Leçons de mécanique élémentaire. Von Paul Stäckel	471
E. Picard. Quelques réflexions sur la mécanique suivies d'une première leçon de mécanique. Von Paul Stäckel	472
Neue Bücher	105, 286, 389, 473
Eingelaufene Schriften	109, 288, 391, 475
Abhandlungsregister 1902. Von E. Wölffing	112
Berichtigung	476

Zur Theorie des räumlichen Fachwerks.

Von Dr. Ing. ALEXANDER HASCH in Wien.

Mit 3 Doppeltafeln in Lithographie.

I. Einleitung.

Zweck dieser Arbeit ist es, die theoretische Berechnung des wichtigsten räumlichen Fachwerks — des Kuppelfachwerks — weiter auszuführen als dies bis jetzt geschehen ist, namentlich in Bezug auf einseitige ungünstigste Belastungen, die immer nur eine sehr spärliche Behandlung erfahren haben.

Vor allem aber ist es nötig, diejenigen wichtigsten Methoden der Theorie des räumlichen Fachwerks zusammen zu fassen, welche entweder im folgenden Anwendung finden oder aber den Anstoß zu vorliegender Arbeit gaben und so die Ansätze und teilweisen Ausführungen derselben erkennen lassen.

Schwedler sagt (die Konstruktion der Kuppeldächer, Zeitschrift für Bauwesen 1866): „... bei den bisherigen Betrachtungen ist die ungleichförmige Belastung nicht berücksichtigt worden, da durch diese die Berechnung sehr kompliziert wird, indem die elastischen Verschiebungen der einzelnen Punkte in dieselbe eintreten müssen.

Für die Praxis kann man indessen die Kenntnis der Grenzen der Änderungen der Spannungen nicht entbehren und sind dieselben deshalb durch die nachstehenden einfachen Anschauungen, wenn auch vielleicht etwas zu weit, bestimmt worden. ... (Für die Grenzen der Spannungen der einzelnen Sparren-, Ring- und Diagonalstäbe sind nun die bekannten Schwedlerschen Annahmen gemacht). ... Bei Berechnung der Diagonale ist zu erwägen, daß neben dem Durchmesser, welcher die Belastung begrenzt, ein belasteter und ein unbelasteter Sparren liegt, und daß die Spannung beider, wenn sie in zwei verschiedenen gleichförmig belasteten Kuppeln gelegen wären, sich wie die Belastungen p und q pro Flächeneinheit verhalten würden. Nimmt man an, daß durch die Diagonalen die ganze Spannungsdifferenz übertragen wird, so ist diese Annahme jedenfalls zu groß, wenn aber die Diagonalen derselben widerstehen können, so sind sie als ausreichend stark zu erachten“.

Also analytisch ausgedrückt: (siehe Figur 1):

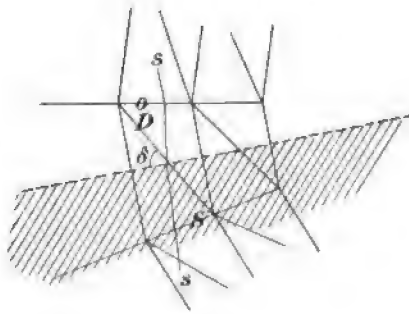
$$D \cos \delta + S = 0, \quad D = -\frac{S}{\cos \delta}.$$

Über den Winddruck als diejenige Ursache, welche die größten Spannungen hervorruft, spricht Schwedler gar nicht.

Die Schwierigkeit, eine möglichst zutreffende Annahme über die ungünstigste Belastung zu treffen, tritt namentlich deutlich bei den Diagonalen hervor.

Zusammenfassung: einseitige Belastungen sind ganz vermieden; die einzige Belastungsart (Winddruck überhaupt ausgenommen) in Bezug auf ungünstigste Spannungen der einzelnen Stabgattungen ist die der gleichförmigen, totalen Ringbelastung.

Fig. 1.



Der nächste Schritt in der Entwicklung der Berechnung von Fachwerkkuppeln war die Spannungsbestimmung mittelst von Knotenpunkt zu Knotenpunkt fortschreitender Kräftezerlegung.

Gewissermaßen als Normalkuppelfachwerk halten wir uns im folgenden eine statisch bestimmte¹⁾ Schwedlerkuppel vor

Augen, deren Knotenpunkte auf einer Drehungsfläche liegen und deren Sparrenausteilung eine regelmäßige ist. Die Berechnung eines derartigen Schwedlergeflechtes erfolgt immer durch wiederholte Lösung der Aufgabe: Drei in einem Punkt m angreifende Kräfte S_1, S_2, S_3 , deren Richtungen bekannt sind, so zu bestimmen, daß sie einer ebenfalls in m angreifenden Kraft P das Gleichgewicht halten. Die Lösung geschieht graphisch, bei erforderlicher großer Genauigkeit analytisch. Die allgemeine Berechnung eines Schwedlergeflechtes kann nun nach den zwei Methoden erfolgen:

1. nach Föppl.²⁾ (Ähnlich der Culmannschen Methode in der Ebene).

1) Unter einem statisch bestimmten Fachwerke soll immer ein solches verstanden werden, bei welchem 1. die notwendige Stabzahl vorhanden ist, 2. die dem Fachwerk eigentümliche Funktionaldeterminante ≥ 0 ist. (Dieser letztere Punkt entscheidet bekanntlich, ob die Anordnung der vorhandenen notwendigen Stäbe ein steifes Gebilde erzeugt oder nicht. Ist die Funktionaldeterminante $= 0$, so ist Labilität des Fachwerks vorhanden, und zwar entweder „endliche Beweglichkeit“ oder „unendlich kleine Beweglichkeit“ {Momentmechanismus}).

2) Föppl, Das Fachwerk im Raume.

2. nach Müller-Breslau¹⁾ mittelst Anwendung des Satzes aus der projektiven Geometrie; drehen sich die Seiten eines veränderlichen n -Eckes um feste Punkte, die auf einer Geraden liegen, und verschieben sich hierbei $(n - 1)$ Ecken längs beliebiger gegebenen Geraden, so beschreibt auch die letzte Ecke eine Gerade. (Dabei ist natürlich das n -Eck veränderlich in Bezug auf Seitenlängen und Winkel).

Bei Belastung eines Knotenpunktes durch eine irgendwie gerichtete Einzellast kommt immer nur eine bestimmte Stabgruppe bei der Lastübertragung auf die Widerlagerknotenpunkte in Betracht.

Die *Netzwerk-kuppel* kann auf dieselbe Weise aus einem Kugelflechtwerk (Föppl) abgeleitet werden, wie eine Schwedlerkuppel, nur muß das dabei zugrunde gelegte Kugelflechtwerk eine andere Stabanordnung besitzen. Bei den Schwedlergeflechten fallen je zwei Dreiecke der Mantelfläche in eine Ebene; bei den Netzwerken ist jedes Dreieck der Mantelfläche unabhängig von den beiden Nachbardreiecken desselben Geschosses. (Um zu erklären, warum im folgenden immer Netzwerk-kuppeln mit ungerader Seitenzahl angewandt wurden, sei erwähnt, daß symmetrische Netzwerkgeflechte mit gerader Seitenzahl Fachwerke mit „endlicher Beweglichkeit“, daher praktisch unbrauchbar sind; das ganze labile Fachwerk bildet einen geschlossenen Mechanismus entstanden aus einer zwangsläufigen kinematischen Kette, so daß sich der überschüssige Zwang in der Kette mit dem Kettenschluß verträgt).

Die Berechnung der Stabspannungen kann geschehen:

1. nach der Methode von Föppl.²⁾ Dieselbe führt wieder die Berechnung der Stabspannungen eines Netzwerkgeschosses selbst bei unregelmäßigem Grundriß und allgemeinsten Lage und Richtung der angreifenden Kraft schließlich auf die Aufgabe der Zerlegung einer Kraft in drei Komponenten zurück. Eine in einem Knotenpunkt angreifende Kraft versetzt sämtliche Stäbe in Spannung (in Zonen unterhalb dieses Knotenpunktes).

2. mittelst Anwendung des Verfahrens von Henneberg auf die Netzwerkgeflechte.

Dieses ist hier von Wichtigkeit, weil das von Müller-Breslau gegebene Verfahren zur Beurteilung ungünstigster (einseitiger) Belastungen auf den Begriff der zwangsläufigen kinematischen Kette in Verbindung mit Berechnung elastischer Knotenpunktverschiebungen nach einer Methode gegründet ist, welche der Henneberg'schen Spannungsbestimmung nachgebildet ist.

1) Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralblatt der Bauverwaltung 1891—1892.

2) Föppl, Das Fachwerk im Raume.

Dasselbe gibt bekanntlich eine Stabspannung in der Form:

$$S = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_a Z_a + \mathfrak{S}_b Z_b + \mathfrak{S}_c Z_c + \dots + \mathfrak{S}_n Z_n.$$

Dabei sind $\mathfrak{S}_a, \dots, \mathfrak{S}_n$ unabhängig von den Lasten; die Spannungen \mathfrak{S}_0 müssen für jeden Belastungsfall ermittelt werden. $Z_a, Z_b, Z_c, \dots, Z_n$ bedeuten die Spannungen der beseitigten Stäbe. Setzt man die Spannungen in den „Ersatzstäben“ gleich Null, so erhält man ebensoviele Gleichungen ersten Grades als Kräfte Z vorhanden sind, ist also imstande die letzteren zu berechnen. Bedingung ist jedoch, daß die Nennerdeterminante jener Gleichungen einen von Null verschiedenen Wert annimmt. (Sonst wäre nämlich das Fachwerk entweder eines von „endlicher Beweglichkeit“, oder aber von „unendlich kleiner Beweglichkeit“ oder ein sog. „Momentmechanismus“).

Die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte.

(Elastische Formänderungen).

Die allgemeine Untersuchung der Formänderung eines statisch bestimmten räumlichen Fachwerks kann man nach einem Verfahren ausführen (Müller-Breslau)¹⁾, welches sich dem oben gezeigten für die Ermittlung der Spannkkräfte anschließt.

Die Längen der beseitigten Stäbe seien z_a, z_b, z_c, \dots , die Längen der Ersatzstäbe y', y'', y''', \dots . Schreibt man den letzteren zunächst die wirklichen Änderungen $\Delta y', \Delta y'', \Delta y''', \dots$ zu, so erhält man für die Verschiebung δ_m , welche irgend ein Knotenpunkt m nach einer bestimmten Richtung erfährt, den Ausdruck:

$$\delta_m = \delta_{m0} + \delta'_m \Delta y' + \delta''_m \Delta y'' + \delta'''_m \Delta y''' + \dots,$$

worin δ_{m0} den Wert von δ_m für den Fall bedeutet, daß die Längenänderungen von Δy sämtlicher Ersatzstäbe gleich Null angenommen werden, während $\delta'_m, \delta''_m, \dots$ beziehungsweise die den Zuständen $\Delta y' = 1, \Delta y'' = 1, \dots$ entsprechenden Werte von δ_m vorstellen.

Ferner hat man für die Änderungen von z_a, z_b, \dots ,

$$\begin{cases} \Delta z_a = \Delta_0 z_a + \Delta'_a \Delta y' + \Delta''_a \Delta y'' + \Delta'''_a \Delta y''' + \dots \\ \Delta z_b = \Delta_0 z_b + \Delta'_b \Delta y' + \Delta''_b \Delta y'' + \Delta'''_b \Delta y''' + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man die Δy berechnen; dadurch sind auch die δ_m bekannt.

1) Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralblatt der Bauverwaltung 1891—1892.

Kinematische Ermittlung der Stabkräfte. Einflußzahlen. Einflußlinien der Senkungen (Müller-Breslau).¹⁾

Es soll die Spannung S_{ik} irgend eines Stabes ik (Länge = s_{ik}) in der Form:

$$S_{ik} = \kappa_1 P_1 + \kappa_2 P_2 + \dots + \kappa_m P_m + \dots$$

dargestellt werden, wo $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots$ die Einflußzahlen sind. Zur Lösung dieser für die Beurteilung des gefährlichsten Belastungszustandes wichtigen Aufgabe erhält man die Gleichung

$$S_{ik} \Delta s_{ik} = P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_m \delta_m + \dots,$$

in welcher $\delta_1, \delta_2, \dots$ die Projektionen der Verschiebungen der Punkte 1, 2, 3, ... auf die Richtungen von P_1, P_2, \dots bedeuten, und man findet die *Einflußzahlen* mittelst der Beziehung: $\kappa_m = \frac{\delta_m}{\Delta s_{ik}}$. Die Auf-

gabe der Berechnung der Einflußzahlen ist nur ein einfacher spezieller Fall der früher behandelten Darstellung der elastischen Verschiebungen. Dort handelte es sich um die Ortsveränderungen der Knotenpunkte infolge von Längenänderungen sämtlicher Stäbe; hier wird nach dem Einfluß einer einzigen willkürlichen Längenänderung gefragt. Setzt man diese letztere gleich 1, so erhält man: $\kappa_m = \delta_m$. Hat man nun für einen bestimmten Stab die der Längenänderung $\Delta s_{ik} = 1$ entsprechenden Verrückungen der übrigen Knotenpunkte mittelst eines Verschiebungsplanes (nach Williot's für den Raum erweiterter Methode) bestimmt, und diese erhaltenen Verrückungen der Einfachheit halber in je drei Komponenten ξ, η, ζ zerlegt, so ist man imstande, dies im wesentlichen so auszunützen:

a) der Einfluß lotrechter Lasten P_1, P_2, \dots auf die gesuchte Spannung ist dann $S_{ik} = \Sigma P \xi$.

b) der Einfluß einer lotrechten Last $P = 1$, welche sich längs eines Sparrens und hierauf längs des obersten Ringes bewegt, kann durch eine *Einflußlinie der Senkungen* ξ dargestellt werden.

c) kann man den Einfluß $S_{ik} = \Sigma P_m \delta_m$ einer Gruppe von in Meridian-Ebenen liegenden Lasten P_m (z. B. der Windkräfte nach Loessl) berechnen.

Damit ist aber nur der eine Stab S_{ik} erledigt, für welchen eben der ganze Verschiebungsplan gezeichnet wurde.

¹⁾ Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks, Centralblatt der Bauverwaltung 1891—1892.

Anmerkung. Man kann hierbei die Einführung der zwangsläufigen kinematischen Kette auch zur Anwendung des Verfahrens „der um 90° gedrehten Verschiebungen“ benützen.

II. Einflußräume; Einflußflächen und -Linien.

Netzwerkkuppel; Schwedlerkuppel. Verallgemeinertes System der Berliner Reichstagskuppel.

Die wichtigste Methode der allgemeinen Berechnung ebener (sowohl Fachwerk- als auch Vollwand-)Bankonstruktionen bildet die der „Einfluß- oder Influenzlinien“ irgend einer „Wirkung Z “. Wir fassen hier Z vorläufig nur als Stabspannung auf.

Rebhann war der erste, der analytisch bewies, daß es für Diagonalstäbe eines ebenen Fachwerks im allgemeinen einen neutralen oder „Nullpunkt“ geben müsse. Die einfache graphische Konstruktion und den Beweis dazu gab dann C. Culmann. Müller-Breslau erweiterte dies durch die Benützung der sog. „Zustände $A = 1$ und $B = 1$ “, um so direkt die Einflußlinie der Stabspannung für einen bestimmten Stab zu konstruieren.

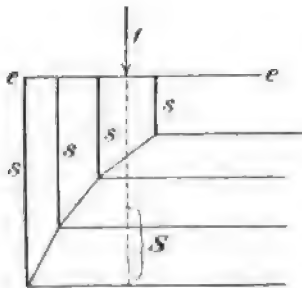
Es soll nun in den folgenden Zeilen in der Berechnung des Kuppelfachwerks, deren Entwicklung oben in gedrängtester Form mit besonderer Betonung des für diesen Aufsatz Wesentlichsten, bis zur teilweisen Bestimmung der ungünstigsten Lasten hinauf, gegeben wurde, der Schritt zum Allgemeinsten getan werde.

Es sei ein beliebiges Kuppelgeflecht gegeben. Die Lastübertragung findet nur an den Knotenpunkten statt; wir denken uns dieselbe etwa durch Ständer vermittelt. Oben sei auf dieselben eine materielle Ebene gelegt, die entsprechend den Lastübertragungspunkten zerschnitten gedacht wird (so wie die Längsträger, welche auf den Querträgern ruhen, in der ebenen Theorie).

Über dieselben wandere nun eine Einzellast $= 1$. Bei einer allgemeinen aber ganz bestimmten Lage dieser wandernden Last $= 1$ besteht im Kuppelfachwerk ein ganz bestimmter Spannungszustand.

Trägt man nun für einen bestimmten Stab S die ihm entsprechende Spannung auf der Lastlotrechten auf (s. Figur 2), und tut dies für jede Lage der Last 1, so entsteht für den Stab eine „Einfluß- oder Influenzfläche“. Die „Wirkung“ ist gleich der Stabspannung.

Fig. 2.



Betrachten wir zunächst eine solche allgemeine Einflußfläche. Die entstehenden Räume A, B (s. Fig. 3) nennen wir „Einfluß- oder Influenzräume“, die Linien a, b „neutrale oder Nulllinien“ (eine Verwechslung mit den Nulllinien eines Möbiusschen Nullsystems ist wohl nicht möglich); auch gibt es „neutrale oder Nullflächen“.

Es ist nun:

$$dZ = p \cdot dx \cdot dy \cdot \eta,$$

also

$$Z = \iint_G p \cdot dx \cdot dy \cdot \eta$$

p = Belastung für die Flächeneinheit.

Ist die Belastung gleichförmig verteilt, also $p = \text{const.}$, so ist

$$Z = p \iint_G \eta \cdot dx \cdot dy,$$

d. h.

$$Z = p \cdot K,$$

wobei K = Einflußraum über dem Gebiete G .

Anmerkung: K ist nur in der Darstellung und nicht in der Dimension ein Körper. Daß diese Gleichung nur eine Zahlengleichung ist, sieht man auch daraus, daß die Dimensionen links und rechts nicht übereinstimmen.

Allgemein ist für ein senkrechtes Lastsystem

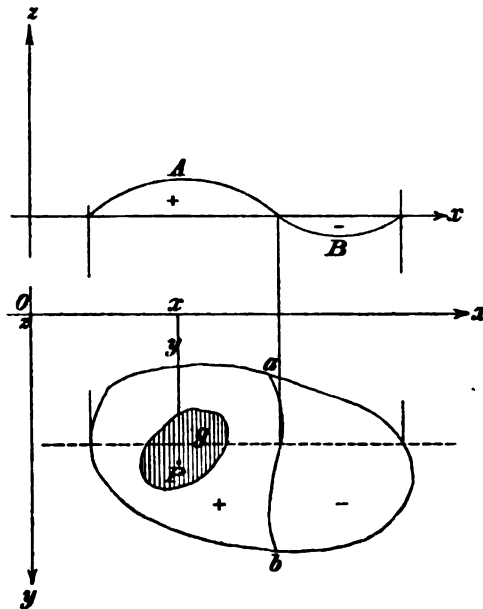
$$Z = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + \dots = \sum P \cdot \eta.$$

Die Ermittlung von $\max Z$ und $\min Z$ bei gegebenem Einflußraume ist dieselbe wie in der Ebene.

Als Belastung ziehen wir von jetzt an nur die gleichförmig verteilte (natürlich auch partiell) in Betracht.

Bevor wir in der allgemeinen Betrachtung weitergehen, sei erwähnt, daß man den oben aufgestellten Begriff auch „Einflußfläche über Ebenen“ nennen kann; daß diese Form für Flechtwerkträger¹⁾ (bei all-

Fig. 3.



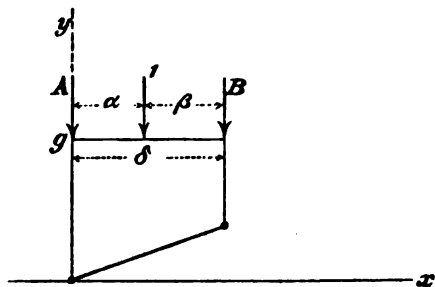
1) Wir sagen bei den theoretischen Untersuchungen gewöhnlich „Fachwerk“ oder „Flechtwerk“ ohne zwischen „Fachwerk“ und „Fachwerkträger“ immer streng

gemeinster Form und Lage derselben) nicht brauchbar ist, sieht man sofort ein. Wohl kann man bei einem Flechtwerkträger allgemeinsten Form sich „Einflußflächen um Punkte“ denken (dadurch entstanden, daß man die in einem Flechtwerkknotenpunkt angreifende „Kraft 1“ sich beliebig gedreht denkt und immer auf der Richtung derselben den jeweiligen Spannungsbetrag S aufträgt), doch auch diese sind der Natur der Sache nach ohne Bedeutung für die wirkliche Berechnung der ungünstigsten Stabspannungen.¹⁾

a) Das Netzwerkgeflecht.

Denken wir uns nun die Stabspannung in einem bestimmten Stabe S für die Laststellungen a, b, c ermittelt und über a, b, c aufgetragen. Es läßt sich dann leicht zeigen: Die Einflußlinie zwischen zwei Nachbarknotenpunkten ist eine Gerade.

Fig. 4.



Ferner: Die Einflußfläche zwischen drei Nachbarknotenpunkten ist eine Ebene.

Man hat nämlich im ersten Fall (s. Fig. 4):

$$\frac{A}{B} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{A}{\beta} = \frac{B}{\alpha} = \frac{1}{\delta} = c,$$

$$A \cdot S_a + B S_b = 1 \cdot S_a,$$

$$S_a = S_b \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \alpha = C \cdot \alpha,$$

also eine Gerade.

Da die Einflußlinien ab, bc, ca (s. Fig. 5) Gerade sind, so ist auch die Einflußfläche zwischen drei Knotenpunkten eine Ebene. Denn durch den beliebigen Ort ω der Einzellast $= 1$ kann man einen Strahl durch einen der Nachbarknotenpunkte, etwa durch b ziehen; zerlegt man nun 1 in zwei Komponenten bei b und β , so hat man in Bezug auf γ dieselben Verhältnisse, wie früher bei g .

zu unterscheiden; es ist dies erlaubt, weil man ja die Auflagerbedingungen in jedem Auflagerknotenpunkte durch „Auflagerstäbe“ ersetzen kann, wodurch sofort der zuerst wesentlich erscheinende Unterschied so gut wie verschwindet.

1) Demnächst sollen einmal die interessanten Beziehungen besprochen werden, welche bei Inangriffnahme eines Flechtwerks (beziehungsweise eines Flechtwerkträgers) durch ein „gebundenes Kräftesystem“ zwischen diesen äußeren Kräften, den durch dasselbe im Flechtwerk hervorgerufenen Stabspannungen und gewissen, mit dem Flechtwerk zusammenhängenden charakteristischen Flächen bestehen. (Anwendung der Astatik auf die Flechtwerktheorie).

Dadurch ist also für den Mantel des Netzwerkgeflechtes als Einflußfläche eine Polyederfläche bestimmt, die aus lauter Dreiecken besteht

Wir haben vorausgesetzt, daß die Knotenpunkte der Kuppel auf einer Drehungsfläche liegen. Wegen der Symmetrie des ganzen Kuppel-fachwerks genügt es bei der Bestimmung der Einflußflächen der Spannungen für sämtliche Kuppelstäbe nur die Belastungsfälle: 1' in Knotenpunkt *A*, in *B*, u. s. w. (s. Fig. 6) d. h. also nur in je einem

Fig. 5.

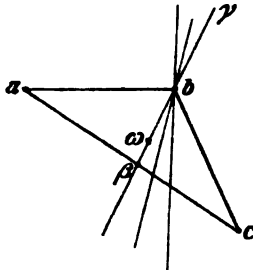
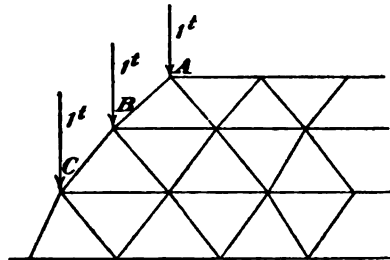


Fig. 6.



Knotenpunkt eines Ringes zu betrachten. Diese zur Bestimmung der Einflußflächen sämtlicher Stabgattungen ausreichenden *n* Belastungsfälle (*n* = Geschoszahl der Kuppel) sollen heißen;

Zustand *A* = 1, Zustand *B* = 1, Zustand *C* = 1 u. s. w.

Für jeden solchen „Zustand“ müssen die Stabspannungen bestimmt werden (nach den früher angegebenen Methoden). *Beim Netzwerkgeflecht sind stets sämtliche Stäbe (unterhalb des belasteten Knotenpunktes) in Spannung.*

b) Das Schwedlergeflecht.

Zur wirklichen Ausführung der Methode der „Einfluß- oder Influenzräume“ dienen hier wieder die Belastungsfälle, welche wir als die

Fig. 7.

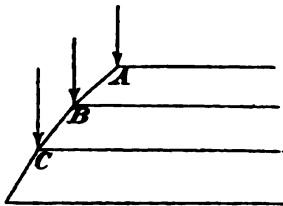
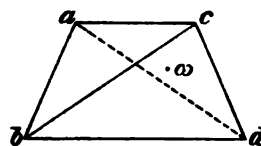


Fig. 8.



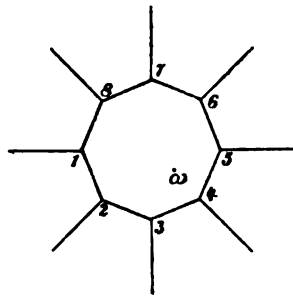
Zustände *A* = 1, *B* = 1, *C* = 1, ... bezeichnet haben, im ganzen *n* (= Geschoszahl) Zustände.

Hier tritt nun ein Umstand ein, den wir schon in a) (in Bezug auf den Raum des Laternenringes) stillschweigend übergangen haben.

Steht nämlich in ω über einem Trapezfelde die Einzellast = 1, so liegen um dieselbe vier benachbarte Lastübertragungspunkte. Im ersten Augenblick erscheint es, als ob es drei wären und man infolgedessen 1 sofort in drei Komponenten zerlegen könnte, und ähnlich so die Einflußflächen der Stabspannungen zu konstruieren, wie es beim Netzwerkgeflechtmantel der Fall war. Man muß diesen Gedanken aber sofort aufgeben. Es ist nämlich auf der früher erwähnten, der leichteren Vorstellung wegen eingeführten Ebene ee , welche die Lastübertragung vermittelt, Schnitt ad von derselben Berechtigung wie (der durch die vorhandene Diagonale bestimmte) bc . Man erkennt dies aber auch daraus, daß eine zugelassene zweifache Zerlegung von 1 (Lasteinheit) einmal nach bcd (s. Fig. 8), ein anderes Mal nach abd (bei der angenommenen Lage von ω) nicht ein und denselben Wert des Einflusses auf die Stabspannungen gibt, also falsch ist. Überdies spielt die in das Feld eingespannte Diagonale schon deswegen nicht die ihr oben zugedachte Rolle, weil sie ja auch ganz fehlen kann. (Um beim statisch bestimmten Geflecht zu bleiben, stelle man sich etwa vor, daß die Diagonalen eines Geschosses, höchstens bis auf drei, entfernt und im Laternenring zur Bildung eines sogenannten „Scheibenringes“ oder in sonstiger Anordnung verwendet wurden.¹⁾)

Wären die vier Knotenpunkte des Trapezfeldes absolut feste Punkte, so wäre die Zerlegung der Last 1 (im Punkte ω) nach diesen

Fig. 9.



vier vertikalen Komponenten ∞^1 mal möglich. Diese Erörterung läßt sich auch ganz analog auf den noch allgemeineren Fall des Laternpolygons des Kuppelfachwerks (das System des Geflechtes ist hierbei ganz gleichgültig) anwenden. Es haben nun infolge der Elastizität des ganzen Stabgebildes die Punkte 1, 2, ..., 8 (s. Fig. 9) gewisse Senkungsfähigkeiten (+ oder -). Das Fachwerk ist ein statisch bestimmtes und setzt sich den auf dasselbe einwirkenden Lasten gegen-

über in einer und nur in einer ganz bestimmten Weise ins Gleichgewicht. Es ist diejenige Zerlegung der im Punkt ω wirkenden Last = 1 die wirklich eintretende, welche die wahre Formänderungs-

1) Die Prüfung, ob bei diesem Austausch von Stäben das Fachwerk auch wirklich *ein stabiles bleibt*, ist eine Sache für sich.

arbeit des Fachwerks zu einem Minimum macht.¹⁾ Dabei ist aber vorausgesetzt, (was wir auch immer tun werden, wenn nicht eigens anderes hervorgehoben):

1. ein spannungsloser Anfangszustand;
2. die Temperaturänderung $\Delta t = 0$;
3. unverschiebbare Widerlagerknotenpunkte $\Delta c = 0$.

(Die beweglichen Auflager seien reibungslos).

Es sei nun irgend ein Kuppelgeflecht gegeben; seine Laternenringknotenpunkte heißen $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$. (n = Anzahl der Sparren).

Die für eine bestimmte Stellung der Last 1 auf der Laternenfläche im Punkte $\omega(x, y)$ sich ergebenden Komponenten seien entsprechend: $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Die Last wandere über die ganze Laternenfläche. Welches ist die Einflußfläche der wahren inneren Deformationsarbeit des Kuppelfachwerks?

Die wahre Deformationsarbeit ist

$$(1) \quad A = \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2 s}{E f}.$$

Dabei sind: S die Stabspannungen für den ins Auge gefaßten bestimmten Belastungsfall, s die Stablänge, f der Stabquerschnitt, E der Elastizitätsmodul (der für sämtliche Stäbe konstant sei).

Fig. 10.

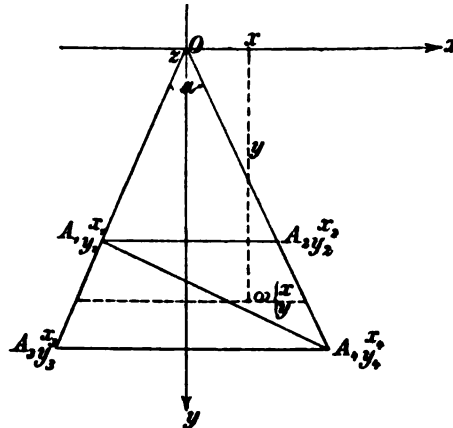
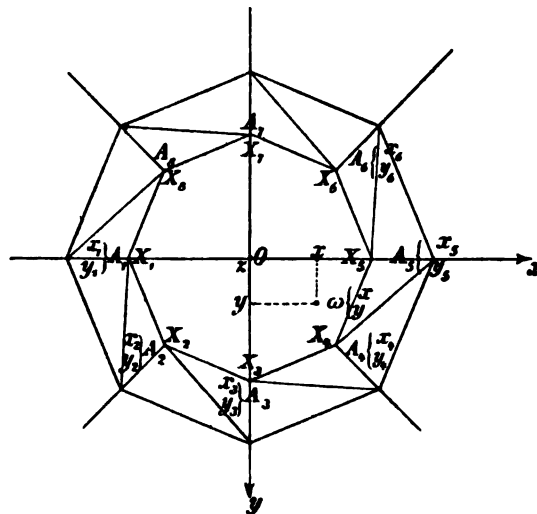


Fig. 11.



1) Daß hier bei der Benützung des Minimumsatzes von Alberto Castigliano eine neue allgemeine Form der „Deformationsarbeit“ angewendet werden muß, wird sich später zeigen.

Für eine bestimmte Laststellung ω erhält man die Komponenten X_1, X_2, \dots, X_n immer aus der Bedingung, daß die Formänderungsarbeit ein Minimum wird. Die Komponenten X_1, \dots, X_n , die das Min A erzeugen, lassen sich aus dem Gleichungssystem:

$$(2) \quad \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial A}{\partial X_n} = 0$$

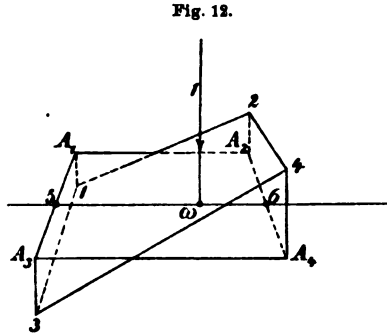
berechnen.

Es ist nämlich:

$$(3) \quad S = S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_n X_n \dots,$$

wobei S_1 die Stabspannung entsprechend der Last = 1 im Knotenpunkte A_1 u. s. w. ist. Führt man (3) in das System (2) ein, so erhält man ein System homogener, linearer Gleichungen in den X_1, X_2, \dots, X_n .

Dasselbe gibt in diesem Falle (außer $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots$, was hier der Natur der Sache nach keine Rolle spielt) ein ganz bestimmtes Verhältnis $X_1 : X_2 : X_3 : \dots : X_n$ der Unbekannten, unabhängig von der Größe der wandernden Last; d. h. geometrisch, es ist dadurch ein ganz bestimmter Ort der Laternenfläche hervorgehoben, in welchem eben die wandernde Last stehen muß, damit das Min A eintritt. Im all-



gemeinen ist dieses analytische Minimum der Formänderungsarbeit über der Laternenfläche *vorhanden*, und fällt dessen Ort mit der Kuppelachse zusammen. Die Fläche der Deformationsarbeiten ist eine in Bezug auf die Kuppelachse *symmetrische*.

Wir gehen nun zur allgemeinen Berechnung der Größen $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ selbst über.¹⁾ Mit einem Trapezfelde (s. Fig. 10) sei der

1) Als ein spezieller Fall der obigen Aufgabe, der auch nicht ohne praktisches Interesse ist, sei folgender erwähnt: eine ideelle gewichtslose Ebene ruht auf n Vertikalstäben von verschiedener Länge und verschiedenem Querschnitt; E_1, E_2, \dots, E_n seien die Elastizitätsmoduln der einzelnen Stabmaterialien. In einem beliebigen Punkte ω der Ebene wirkt auf dieselbe die Last = 1'; wie groß sind die n Komponenten, welche auf die Vertikalstäbe übertragen werden?

Nennt man die Spannung in einem Auflagerstab allgemein S , so kann diese durch

$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 + \dots$$

dargestellt werden.

Verwandelt man nämlich die statisch unbestimmte Stützung in eine *statisch bestimmte*, d. h. entfernt man alle übrigen Stützen bis auf drei, und nennt die

Einfachheit halber begonnen. Die Einflußlinien längs der Sparrenstab- und Ringstabzüge seien schon bestimmt. Fig. 12 zeigt ein Trapezfeld mit denselben.

Wir schlagen zur Bestimmung der Gleichung der Einflußfläche folgenden Weg ein:

Es muß die wahre innere Deformationsarbeit ein Minimum sein. Dabei ist aber fest zu halten:

Bei vollkommen willkürlicher Bewegung des Punktes ω über das ganze Feld ist die mögliche Komponentenmannigfaltigkeit ∞^3 ; bei einem bestimmten Punkte ω ist diese nur mehr ∞^1 . Die Festlegung des Punktes ω hat aber auch im Ausdrucke der Formänderungsarbeit Berücksichtigung zu finden. Mit anderen Worten es muß

$$A = \sum \frac{1}{2} \frac{S^2 s}{E f}$$

ein Minimum werden unter den Bedingungen:

$$(4) \quad \sum_1^n X_r \cdot x_r = P \cdot x, \text{ und da } P = 1, \quad \sum_1^n X \cdot x = x,$$

$$(5) \quad \sum_1^n X_r \cdot y_r = P \cdot y, \quad " \quad " \quad P = 1, \quad \sum_1^n X \cdot y = y,$$

oder aber, wenn wir

$$\sum_1^n X \cdot x - x = \varphi = 0$$

so erhaltenen Spannungen S_0 , behält man weiter die statisch bestimmte Stützung bei und setzt $X_1 = 1$, so erhält man die Spannungen S_1 u. s. w.; es ergeben sich so $(n - 3)$ „Zustände $X = 1$ “, weil es $(n - 3)$ statisch unbestimmbare Größe X giebt. Um nun die X_1, X_2, \dots, X_{n-3} zu bestimmen, wendet man auf alle Zustände $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_{n-3} = 1$ das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an, indem man als „virtuelle“ Verschiebungen die dem statisch bestimmten Zustand entsprechenden Verschiebungen annimmt; dadurch erhält man so viele Arbeitsgleichungen als unbekannte Größen X vorhanden sind und kann letztere leicht berechnen. Hat man die X , so sind auch die übrigen Stabspannungen (Auflagerkomponenten) leicht bestimmt. Man sieht, daß sich auf diesen Fall eine ganz analoge Methode anwenden läßt, wie bei der Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke. Als wesentlich für diesen speziellen Fall ist die Unabhängigkeit der Verschiebungen der Stützpunkte zu betrachten. (Man hätte auch davon ausgehen können, daß die Größen X so zu wählen sind, daß die Formänderungsarbeit des ganzen Systems ein Minimum wird). Bei dem Hinweis auf das Riesenflechtwerk der Weltausstellung zu *Saint-Louis* werden wir noch einmal auf diese Methode zurückkommen.

und

$$\sum_1^n X \cdot y - y = \psi = 0$$

setzen und die Methode der unbestimmten Multiplikatoren anwenden, folgt, daß

$$(6) \quad A = A + \lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \psi$$

ein Minimum werden muß, wobei λ und μ unbestimmte Multiplikatoren sind. Damit dies eintritt, muß das Gleichungssystem bestehen:

$$(7) \quad \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X_2} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X_3} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X_4} = 0.$$

Die Gleichung (4), (5), (7) ermöglichen die Berechnung der Größen $X_1, X_2, X_3, X_4, \lambda, \mu$, von welchen uns nur die vier ersten interessieren.

Anmerkung. Die Funktion A soll „ideelle Formänderungsarbeit“ heißen. Man hat schon früher für den Ausdruck

$$A + Z_1 + Z_2,$$

(wobei A die gewöhnliche Formänderungsarbeit, ohne Rücksicht auf Temperaturänderungen und Verschiebungen der unbeweglich konstruierten Auflager, ist, und Z_1, Z_2 zwei Zusatzglieder sind, welche beziehungsweise die Temperaturänderungen und die Längenänderungen der ideellen Auflagerstäbe berücksichtigen) den Namen „ideelle Formänderungsarbeit“ gebraucht, und es ist auf diesen wesentlichen Unterschied wohl zu achten.

Entwickelt man die erste der Gleichungen (7), so hat man:

$$\sum \frac{Ss}{Ef} \cdot \frac{\partial S}{\partial X_1} + \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1 = 0$$

oder

$$X_1 \cdot \sum \frac{S_1 S_1 s}{Ef} + X_2 \cdot \sum \frac{S_1 S_2 s}{Ef} + X_3 \cdot \sum \frac{S_1 S_3 s}{Ef} + X_4 \cdot \sum \frac{S_1 S_4 s}{Ef} + \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1 = 0.$$

Ebenso findet man die drei übrigen Gleichungen:

$$X_1 \cdot \sum \frac{S_2 S_1 s}{Ef} + X_2 \cdot \sum \frac{S_2 S_2 s}{Ef} + X_3 \cdot \sum \frac{S_2 S_3 s}{Ef} + X_4 \cdot \sum \frac{S_2 S_4 s}{Ef} + \lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2 = 0,$$

$$X_1 \cdot \sum \frac{S_3 S_1 s}{Ef} + X_2 \cdot \sum \frac{S_3 S_2 s}{Ef} + X_3 \cdot \sum \frac{S_3 S_3 s}{Ef} + X_4 \cdot \sum \frac{S_3 S_4 s}{Ef} + \lambda \cdot x_3 + \mu \cdot y_3 = 0,$$

$$X_1 \cdot \sum \frac{S_4 S_1 s}{Ef} + X_2 \cdot \sum \frac{S_4 S_2 s}{Ef} + X_3 \cdot \sum \frac{S_4 S_3 s}{Ef} + X_4 \cdot \sum \frac{S_4 S_4 s}{Ef} + \lambda \cdot x_4 + \mu \cdot y_4 = 0,$$

wobei die Σ (Summe) über das ganze Fachwerk zu erstrecken ist.

Setzen wir

$$\sum \frac{S_1 S_1 s}{E f} = \alpha_{11}, \quad \sum \frac{S_1 S_2 s}{E f} = \alpha_{12}, \quad \sum \frac{S_1 S_3 s}{E f} = \alpha_{13} \text{ u. s. w.}$$

wobei

$$\begin{cases} \alpha_{12} = \alpha_{21} \text{ u. s. w.} \\ \alpha_{11} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{33} = \alpha_{44} \end{cases}$$

ist (die Koeffizienten α sind in gewissem Sinne Fachwerkkonstante), so erhalten wir für die Berechnung von $X_1, X_2, X_3, X_4, \lambda, \mu$ zusammengestellt, folgende 6 Gleichungen:

$$(7') \quad \begin{cases} \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \alpha_{14} X_4 + x_1 \cdot \lambda + y_1 \cdot \mu = 0 \\ \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 + \alpha_{24} X_4 + x_2 \cdot \lambda + y_2 \cdot \mu = 0 \\ \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3 + \alpha_{34} X_4 + x_3 \cdot \lambda + y_3 \cdot \mu = 0 \\ \alpha_{41} X_1 + \alpha_{42} X_2 + \alpha_{43} X_3 + \alpha_{44} X_4 + x_4 \cdot \lambda + y_4 \cdot \mu = 0 \end{cases}$$

$$(4') \quad \begin{cases} x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 & = x \end{cases}$$

$$(5') \quad \begin{cases} y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 + y_4 X_4 & = y. \end{cases}$$

Man kann durch Elimination von λ und μ sich 4 weitere Gleichungen abgeleitet denken, die nur X_1, X_2, X_3, X_4 linear enthalten, von denen 2 homogen und 2 nichthomogen sind:

$$\begin{cases} a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0 \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 = 0 \\ x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = x \\ y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 + y_4 X_4 = y. \end{cases}$$

Diese Gleichungen kann man sich sofort nach den X_1, X_2, X_3, X_4 aufgelöst denken. (Die Größen $a_1, a_2 \dots b_1, b_2, b_3 \dots$ sind Zahlenkoeffizienten, entstanden aus denen der Gleichungen (7').)

Es folgt aus dieser Auflösung (etwa durch allmähliche Elimination), daß die Größen X lineare Funktionen der Punktkoordinaten x, y sind. Aus Gleichung (3) folgt, daß auch die Spannung S eine lineare Funktion der Koordinaten x, y des Punktes ω ist; mit anderen Worten, es ist bewiesen, daß die Einflußfläche einer beliebigen Stabspannung innerhalb eines Trapezfeldes eine Ebene ist.

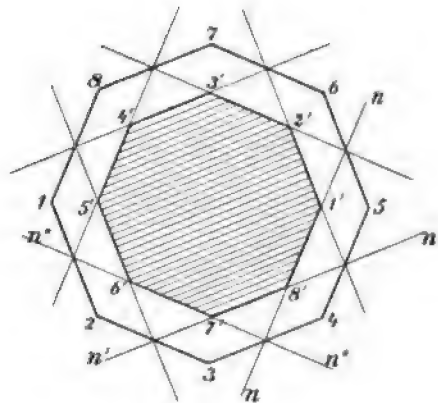
Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch kurz die Einflußverhältnisse in der Laternenfläche (Text Fig. 2). Es muß auch hier

Es wurde oben gezeigt, daß innerhalb des Laternenraumes die Einflußfläche einer Stabspannung eine Ebene ist. Sei nun nn die Nulllinie (Schnittlinie der Einflußebene mit der Grundebene, von welcher aus die Einflußstrecken aufgetragen werden) innerhalb der Laternenfläche für einen bestimmten Stab eines Geschosses; $n'n'$, $n''n''$... seien die Nulllinien (innerhalb der Laterne) für die cyklisch nächstfolgenden Stäbe derselben Gattung und desselben Geschosses, so sieht man, daß sich infolge der Achsensymmetrie der Kuppel innerhalb des Laternenpolygons 1, 2, 3, ..., n , ein *Kernpolygon* $1', 2', \dots, n'$ für diese Stäbe zeichnen läßt. Wie der Name sagt, ist seine Bedeutung folgende: Innerhalb von $1', 2', \dots, n'$ (des Kernes) stehende Lasten rufen in sämtlichen Stäben, auf welche sich derselbe bezieht, gleichartige Spannungen hervor; steht die Last (= 1) außerhalb des Kernpolygons (jedoch noch innerhalb des Laternenpolygons), so sind diese Spannungen ungleichartig.

Eine andere Frage ist die nach etwaiger Vereinfachung der Konstruktion der Einflußlinien. Man weiß, eine Einflußlinie eines Fachwerkstabes in der Ebene geht geradlinig unter mehreren Lastübertragungspunkten hindurch. Dort ist es leicht, dies zu zeigen, da die analytischen Gesetze für die Spannungsgrößen relativ einfach sind. Man kann hier eine Vereinfachung mittelst projektiver Geometrie versuchen. Wir wollen, um diese vereinfachende Behandlung zu zeigen, ein Kuppelfachwerk allgemeiner Form betrachten und seine Berechnung auf die oben vorgeführte Einflußmethode zurückführen.

Es sei ein Kuppelflecht mit *elliptischem Grundriß* gegeben. (Bisher hatten wir immer als Knotenpunktfäche eine Drehungsfläche vorausgesetzt). Man kann sich immer denken, daß dieses Kuppelfachwerk

Fig. 13.

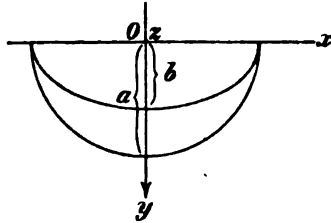


messer, dessen Äquatorknotenpunkte durch eine große Anzahl von Fachwerkpeilern gestützt werden. In das Flechtwerk selbst werden horizontale Böden eingebaut, woraus sich die oben erwähnte Belastung ergibt. Leider ist es dem Verfasser bis jetzt nicht gelungen, die für dieses Bauwerk in Saint-Louis angestellten theoretischen Berechnungen oder schematische Skizzen der Konstruktion desselben zu erhalten.

aus einem Drehungsfachwerke entstanden ist (s. Fig. 14). Das kugelförmige und das ellipsoidische Fachwerk sind bekanntlich zwei räumlich affine Gebilde und zwar ist hier die Papierebene die „Affinitätssebene“ und die darauf senkrechte Strahlenrichtung die „Richtung der Affinitätsstrahlen“.

Das die Affinität kennzeichnende Verhältnis ist $\frac{b}{a}$. Jede Strecke des Ellipsoidgebildes hat mit der entsprechenden im Kugelgebilde eine x - und z -Komponente von gleicher Größe, die y -Komponente dagegen ist im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkürzt.

Fig. 14.



Leicht läßt sich nun beweisen:

Affinen Belastungen der beiden *affinen Fachwerkkuppeln* entsprechen *affine Kräftepläne*.

(Affine Belastungen sind solche, welche affine Kraftstrecken zur Darstellung haben.)

Um dies zu beweisen, denken wir uns etwa bei beiden Kuppeln einen Fachwerkknoten herausgeschnitten, an welchem man die Spannungsbestimmung (Zeichnung des räumlichen Kräftepolygons) beginnen kann, an dem also eine „äußere Kraft“ und drei Fachwerkstäbe angreifen. Um in beiden Kuppelgeflechten diese drei Stabspannungen zu bestimmen, wenden wir die Föpplsche Methode an. Das jedem der zwei Knotenpunkte entsprechende Kräftepolygon ist ein räumliches Viereck. Dasselbe zerfällt durch die Strecke der „Hilfskraft“ in zwei Dreiecke. Wir fassen nun diejenigen zwei Dreiecke ins Auge, welche je einer Kuppel entsprechen und je die äußere Kraft als Seite enthalten. In denselben sind die äußeren Kraftstrecken als affin vorausgesetzt, ebenso je die Richtungen der beiden anderen Seiten. Da einander affin entsprechende Geradenpaare affine Schnittpunkte besitzen, so sind auch die dritten Punkte der oben betrachteten zwei Kräftereiecke entsprechende Punkte. Da sich aber der ganze räumliche Kräfteplan, der dem jeweiligen Spannungszustande entspricht, aus solchen Dreiecken zusammengesetzt denken läßt, so kommt man durch schrittweise Anwendung des soeben Gefundenen zu dem oben behaupteten Satz.

Damit ist die allgemeinste Berechnung dieser Kuppeln, nämlich mittelst ungünstigster einseitiger Belastungen, wesentlich vereinfacht. Da nämlich das ellipsoidische Kuppelfachwerk einer Symmetrie um seine Achse entbehrt, so wäre die Bestimmung der Einflußflächen mittelst direkter Spannungsberechnung im ellipsoidischen Fachwerke

durch Zeichnung von nur solchen Kräfteplänen, welche den Belastungen von 1' längs der Knotenpunkte eines Sparrens entsprechen, unmöglich. Mittelst der oben aufgestellten Beziehung aber zwischen den Spannungsgrößen beider Kuppelfachwerke bei affinen Belastungen kann man die Einflußflächen der Stabspannungen für das ellipsoidische Fachwerk in folgender einfacher Weise bestimmen. Man berechnet zuerst das Hilfskugelfachwerk wie früher gezeigt wurde. Faßt man eine beliebige Spannung im Kugelfachwerk heraus, so findet man die Größe der entsprechenden Spannung im ellipsoidischen, wenn man die y -Komponente der ersteren im Verhältnis von $\frac{b}{a}$ verkürzt. Weiter läßt sich zeigen: Die von den irgend einer Stabspannung entsprechenden neutralen Linien beim Kreiskuppelfachwerk in der xy -Ebene gebildeten Figuren sind *affin* zu denjenigen, welche dem entsprechenden Stabe beim ellipsoidischen angehören. Denkt man sich nämlich die einander entsprechenden Spannungen eines Stabes (für einander entsprechende Belastungen von je 1') in Komponenten nach den Achsen x, y, z zerlegt, so folgt aus der Affinitätsbeziehung, daß die x - und z -Komponenten immer gleich, die y -Komponenten im Verhältnis von $\frac{b}{a}$ verkürzt, also auch immer gleichzeitig Null sind.

Eine ähnliche geometrische Beziehung zwischen den Einflußflächen der Spannungen zweier einander entsprechender Stäbe besteht *nicht*. Wohl aber besteht sie, wenn man die einander entsprechenden Stabspannungen in die drei Komponenten S_x, S_y, S_z zerlegt; dann sind die den Komponenten S_x und S_z entsprechenden Einflußflächen *affin*, bei den S_y geht wegen der zweiten Verkürzung in der y -Richtung die Affinität verloren.

Dadurch ist es also möglich, selbst bei elliptischem Grundriß im Vergleich zur Verwickeltheit der allgemeinen Berechnung räumlicher Fachwerke in relativ einfacher Weise bei großen Kuppelfachwerken (sind doch Gaswerkkuppeln mit 25—30 m Halbmesser nichts Außergewöhnliches) einseitige ungünstigste (Schnee-)Lasten in Betracht zu ziehen.

Es sei endlich hier darauf hingewiesen, daß man ähnliche Beziehungen zwischen den Spannungsbildern von Kuppelfachwerken ableiten kann, welche sich im kreisförmigen Grundriß vollständig decken, jedoch gegeneinander abgeflacht oder überhöht sind.

Es wären nun weiter aus den oben analytisch abgeleiteten Grundbegriffen zu bestimmen:

- 1) Die Beziehungen der Einflußlinien untereinander,

2) der Einflußflächen der einzelnen Felder für eine bestimmte Stabgattung zu einander, sowie auch

3) diejenigen zwischen Einflußlinien und Einflußebenen untereinander.

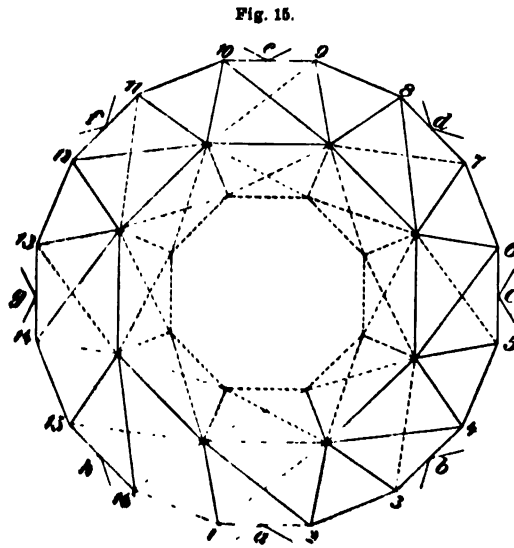
Ob dazu der *analytische* oder der *projektiv-geometrische Weg* der gangbarere ist, wird die Zukunft lehren.

c) Verallgemeinertes System der Berliner Reichstagskuppel.

In letzterer Zeit ist das System der Berliner Reichstagskuppel seiner Vorteile wegen in den Vordergrund des Interesses gerückt, namentlich wegen besonders zweckmäßiger Art der Lagerung mit

horizontal freien und Tangentiallagern und relativ großer elastischer Steifheit im Vergleich zu anderen Geflechten.

(Vgl. Zschetzsche, Die Kuppel des Berliner Reichstagshauses, Zeitschrift der österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1901; Zimmermann, Über Raumfachwerke, Berlin 1901 u. a.) Fig. 15 stellt schematisch ein verallgemeinertes System dieser Art dar. (Man kann es ein „gemischtes“



Kuppelgeflecht nennen, allerdings in anderer Bedeutung als dies Zimmermann tut.) 1, 2, ... 14 sind horizontal freie Lager, a, b, c, ... h Tangentiallager. In demselben bestehen Einflußflächen über Dreiecksfachen und solche über Trapezflächen nebeneinander. Alles oben Gesagte gilt auch hier.

III. Beispiele.

In den beiliegenden Tafeln sind eine Schwedler- und eine Netzkuppel mit Anwendung der im vorigen abgeleiteten Begriffe berechnet. Die Kräftepläne erfordern, nach den in der Einleitung — allerdings nur in knapper Form erwähnten Methoden ihrer Her-

stellung keinerlei weitere Erklärung. Die Zeichnungen zeigen weiter die Spannungszustände der Geflechte für Belastungen in den einzelnen Knotenpunkten derselben. Das Ziel jeder derartigen Berechnung eines Geflechtes ist die Gewinnung der „Einflußzahlen“ der Stabspannungen für die einzelnen Knotenpunkte desselben.

Schlußbemerkung. Im obigen theoretischen Teil ist gefunden worden, daß man zu unterscheiden hat zwischen 1) den leicht bestimmbarcn Einflußlinien längs der Sparren- und Ringstabzüge, und 2) den Einflußebenen der einzelnen Fache (den Laternraum mit eingeschlossen), welche relativ schwer bestimmbar sind.

Mit Rücksicht hierauf kann man für die *praktische Anwendung* die Regel aufstellen:

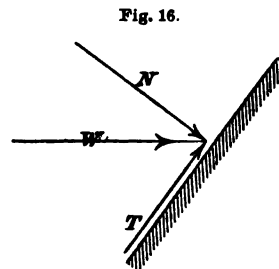
Es ist am besten jeden Teil der aus *Eigengewicht, Schneelast und Winddruck* bestehenden Belastung gesondert zu betrachten.

1) Der Einfluß des Eigengewichts wird am schnellsten durch die schon von Schwedler gegebene graphische Methode bestimmt.

2) Die Schneelast ($80\text{--}100\text{ kg/m}^2$ Grundriß). Bisher wurde im allgemeinen die Schwedlerkuppel mit Schnee gänzlich belastet gedacht, und diese Belastung zum Eigengewicht derselben zugeschlagen. Zeichnet man sich den Kuppelgrundriß mit den entsprechenden Spannungszahlen, so kann man auf strenger Grundlage einseitige ungünstigste Belastungen berücksichtigen (streifenartig). Dabei umgeht man die (bis jetzt) schwierige Bestimmung der Einflußflächen im Fach; man hat nur die Spannungszahlen zu bestimmen und die Belastung der Kuppel entsprechend auf die einzelnen Knotenpunkte zu verteilen.

3) Der Winddruck. Von der in horizontaler Richtung angenommenen Windstärke wirkt (nach Loessl) nur die Normalkomponente N . Dies ergibt als Knotenlasten (auf der vom Wind bestrichenen Kuppelseite) nur Kräfte senkrecht zur Sparrenkurve, die in der Ebene derselben liegen. Für diesen Belastungszustand berechnet man das Geflecht. Maßgebend ist — allseitig möglichen Winddruck vorausgesetzt — die für eine Stabgattung sich ergebende größte Spannung. (Der Einfachheit halber wurden schon oben schiefstehende äußere Kräfte von der Untersuchung der Einflußflächen ausgenommen.)

Die algebraische Addition dieser drei Einflüsse auf die Stabspannung gibt bekanntlich die zwei Grenzspannungen, für welche der Stab zu dimensionieren ist.



$$(3) \quad \begin{cases} X_1 = -\alpha_1 \Sigma S_0 S_1 \varphi - \beta_1 \Sigma S_0 S_2 \varphi - \gamma_1 \Sigma S_0 S_3 \varphi - \dots \\ X_2 = -\alpha_2 \Sigma S_0 S_1 \varphi - \beta_2 \Sigma S_0 S_2 \varphi - \gamma_2 \Sigma S_0 S_3 \varphi - \dots \\ \vdots \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen (3) lassen sich die Einflußflächen für die Größen X_1, X_2, \dots sofort finden, sobald die Einflußflächen für die Summen $\Sigma S_0 S_1 \varphi, \Sigma S_0 S_2 \varphi, \dots$ bekannt sind.

Es wandere wieder die vertikale Lasteinheit P über das statisch bestimmte Hauptfachwerk. Diese Last P erzeugt in den Stäben des Hauptfachwerks die Spannkkräfte S_0 ; die durch irgend welche Änderungen Δs der Stablängen hervorgerufene Senkung δ ihres Angriffspunktes ist durch die Gleichung

$$P\delta = \Sigma S_0 \cdot \Delta s$$

gegeben (Voraussetzung: Verschiebungen der Stützpunkte und Reibungswiderstände an den Auflagern gleich Null); speziell für die der Ursache $X_1 = 1$ entsprechenden Verschiebungen δ_1 und $\Delta_1 s$ gilt:

$$P\delta_1 = \Sigma S_0 \Delta_1 s = \Sigma S_0 \cdot \frac{S_1 s}{E f},$$

woraus $\Sigma S_0 S_1 \varphi = P\delta_1$, oder wenn $P = 1$,
(5) $\delta_1 = \Sigma S_0 S_1 \varphi$ folgt.

Trägt man die Senkungen (positiv oder negativ) der Knotenpunkte des Fachwerks bei einer beliebigen Belastung des Geflechtes von einer horizontalen Ebene aus auf der jeweiligen Senkrechten durch den Knotenpunkt auf, so soll das so entstehende von Dreiecken begrenzte Polyeder das „*Biegungspolyeder des Kuppelfachwerks*“ heißen. Dabei ist vorausgesetzt, daß immer eine Kante der Biegungsfläche des Fachwerks in der Richtung eines Kuppeldiagonalstabes liegt (welche dem Biegungspolygon des Diagonalstabzuges entspricht.)

Der zwischen der Biegungsfläche und der horizontalen Ebene liegende Raum heiße „*Biegungsraum des Kuppelfachwerks*“ für die gegebene Belastung. Entsprechend den „Biegungspolygonen der Gurtungen“ der ebenen Fachwerke kann man auch hier „*Biegungslinien*“ der *Sparrenstab*-, *Ringstab*-, *Diagonalstabzüge der Kuppel* unterscheiden.

Nun ist δ_1 die Ordinate der Biegungsfläche für den Zustand $X_1 = 1$, daher folgt:

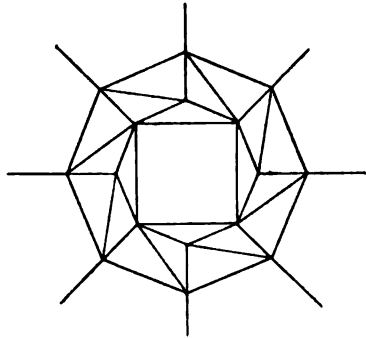
Die Einflußfläche für den Ausdruck $\Sigma S_0 S_1 \varphi$ stimmt mit der für den Belastungszustand $X_1 = 1$ berechneten Biegungsfläche des Hauptnetzes überein. Dieser Satz gilt jedoch nur für die Netzwerkkuppel und zwar nur für den Netzwerkteil derselben, weil der Natur der Sache nach für den Raum der Laterne keine Biegungsfläche vorhanden ist.

Dieser Satz bietet bei der Netzwerkkuppel eine wesentliche Erleichterung. Für das Schwedler-Geflecht und dasjenige des Berliner Reichstagshauses gilt dieser Satz nicht. Es stimmen nämlich bei denselben im allgemeinen der einem Fache entsprechende Teil der Biegungs-

fläche und der entsprechende der Einflußfläche von $\Sigma S_0 S_1 \rho$, welcher eine Ebene ist, da die Einflußfläche von S_0 bzw. ΣS_0 , also auch von $\Sigma S_0 S_1 \rho$ eine solche ist (Benützung des Übereinanderlegens), nicht überein.

Aus Fig. 17 z. B. sieht man sofort, daß wohl eine Biegungsfläche über einem Teile der Laterne, wie über den Trapezfächen vorhanden ist, jedoch keine Übereinstimmung mit der über der Laterne ebenen Einflußfläche von $\Sigma S_0 S_1 \rho$.

Fig. 17.



Die Gleichungen:

$$(5) \begin{cases} X_1 = -(\alpha_1 \delta_1 + \beta_1 \delta_2 + \gamma_1 \delta_3 + \dots) P \\ X_2 = -(\alpha_2 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 + \gamma_2 \delta_3 + \dots) P \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

welche eine schnelle Berechnung der Einflußflächen für die X ermöglichen, gelten nur für das Netzwerkgeflecht (mit und ohne Sparren).

Aus Obigem sieht man wieder, daß das Verfahren der Bestimmung der Einflußflächen für die statisch nicht bestimmbaren Größen X wohl noch immer verwickelt, doch — entsprechend der einfacheren Natur des Fachwerks — beim Netzwerkgeflecht einfacher ist als bei den anderen. Bei diesen letzteren muß man also behufs Bestimmung der Einflußflächen der Größen X direkt diejenigen der Ausdrücke $\Sigma S_0 S_1 \rho$, $\Sigma S_0 S_2 \rho$, bestimmen (auch innerhalb der Trapez- und Laternenfelder).

Begnügt man sich mit Einfluß- (Spannungs-)Zahlen an den Knotenpunkten, so kann man die auf dieselbe Weise reduzierte Biegungsfläche (nur an den einzelnen Knotenpunkten Senkungszahlen) anwenden.

Wien, im Juli 1902.

Bedeutung der Tafelfiguren:

Fig. 1a, 1b, 1c: Zusammenstellung der „Einflußzahlen“ für die einzelnen Stabgattungen des vorliegenden Schwedlergeflechtes.

Fig. 2a, 2b, 2c: Darstellung der Einflußlinien für die einzelnen in den Figuren 1a, 1b, 1c bezeichneten Stäbe, längs der Sparren und längs des Laternenringes.

Fig. 3a, 3b, 4a, 4b, 5a, 5b: Darstellung der einzelnen Spannungszustände $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$ für das Schwedlergeflecht.

Fig. 6a, 6b, 7a, 7b: Darstellung der analogen Spannungszustände für das Netzwerkgeflecht.

Fig. 8a, 8b, 9a, 9b: Darstellung der Einflußräume für die Stäbe 1a, 1b, 8a, 8b des Netzwerkgeflechtes.

Über einige Gelenksysteme mit ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Elementen.

Von P. SOMOFF in Warschau.

I. Verbindung eines Kurbelvierecks mit einem ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Systeme.

1. *Gegenstand der Untersuchung.* Die Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems wird bekanntlich durch die Bewegung *zweier* seiner Punkte bestimmt, wobei diese Bewegungen unabhängig von einander gegeben werden können. Wird ein ähnlich-veränderliches System P durch zwei seiner Punkte M' , M'' mit zwei verschiedenen Gliedern eines Kurbelvierecks verbunden, dessen Glieder A_1 , A_2 , A_3 , A_4 sind und von welchem ein Glied, A_4 , fest bleibt, so wird jeder Punkt des Systems P eine bestimmte Bewegung erhalten, deren Eigenschaften sowohl von den Eigenschaften des Gelenkvierecks wie auch von der Lage der Punkte M' und M'' in demselben abhängen.

Ähnliches kann man auch von einem ebenen affin-veränderlichen Systeme Q sagen. Die Bewegung desselben wird durch willkürlich gegebene Bewegungen *dreier* seiner Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt. Werden diese Punkte M' , M'' , M''' in einem Kurbelviereck, aber nur nicht alle in einem und demselben Gliede des letzteren genommen, so wird die Bewegung eines jeden Punktes des Systems Q sowohl mit den Eigenschaften des Kurbelvierecks wie auch mit der Lage der Punkte M' , M'' , M''' in demselben eng zusammenhängen.

Die Punkte M' , M'' , M''' sollen in der Folge *Grundpunkte* der Systeme P oder Q heißen.

Es ist bekannt, daß jeder Punkt M_0 des mittleren Gliedes A_2 eines Kurbelvierecks eine algebraische *Kurve* σ_0 vom 6. Grade beschreibt. Wenn man beachtet, daß die Cartesischen Koordinaten eines Punktes M des Systems P oder Q durch die Koordinaten der Grundpunkte linear ausgedrückt werden, so kann man von Anfang an sehen, daß die von dem Punkte M beschriebene *Kurve* σ auch vom 6. Grade ist und im ganzen dieselben Eigenschaften wie die Kurve σ_0 besitzt, aber dabei als eine Verallgemeinerung der letzteren betrachtet werden kann. Cayley und Roberts haben zuerst allgemeine Eigenschaften der Linie σ_0 untersucht und Roberts¹⁾ hat ihre Gleichung auf eine ein-

1) Roberts, Proceedings of the London Mathem. Soc. 1875.

fache symmetrische Form gebracht. Weiter unten (§ 6) werden wir genauer sehen, daß die Form der Gleichung, welche eine *Linie* σ bestimmt, in der Tat mit der Form der Gleichung der *Linie* σ_0 zusammenfällt. Der wesentliche Unterschied besteht aber darin, daß man bei Hinzunahme des Systems P oder Q eine größere Zahl von Parametern zur Verfügung hat, so daß man größere Mannigfaltigkeit in der Form der Linien σ und im Falle, daß sie bestimmten Forderungen genügen sollen, eine größere Freiheit in der Auswahl derselben erhält. Bei einem gegebenen Kurbelviereck nämlich hängt die ganze Mannigfaltigkeit der Kurven σ_0 nur von 2 Parametern, den Koordinaten des Punktes M im Gliede A_2 ab; wird aber ein System P angeschlossen, so hat man schon 6 Parameter zur Verfügung: die 4 Koordinaten, welche die Lage der Grundpunkte in den Gliedern des Kurbelvierecks und die 2 Parameter, welche die Lage des Punktes M im Systeme P selbst in Bezug auf die Grundpunkte M' und M'' bestimmen. Wenn das System Q mit dem Kurbelviereck verbunden wird, so hängt die Linie σ von 8 Parametern ab, von denen 6 die Lage der Grundpunkte M' , M'' , M''' im Kurbelviereck und zwei andere die Lage des Punktes M im Systeme Q bestimmen.

Dieser Umstand gibt die Veranlassung dazu, die Verbindungen des Kurbelvierecks mit den Systemen P und Q näher zu untersuchen. Dabei werden wir voraussetzen, daß diese letzteren Elemente auch durch Gelenksysteme verwirklicht werden. Zum Systeme P soll der verallgemeinerte Pantograph (Plagiograph) von Sylvester und zum Systeme Q ein Gelenksystem, welches in meiner Arbeit: „Über einige Anwendungen der Kinematik veränderlicher Systeme auf Gelenkmechanismen“¹⁾ beschrieben ist, genommen werden.

Praktische Anwendungen werden in dieser Arbeit nicht im Vordergrund stehen, wenn auch einige Resultate dieser Art genannt werden können (§§ 11, 17, 23, 24); das Hauptziel der Untersuchung im I. Teile besteht aber darin, einige Eigenschaften sowohl des Kurbelvierecks wie auch der beiden oben genannten veränderlichen Systeme von einer neuen Seite zu beleuchten.

Anmerkung. Die Hinzufügung eines Seitenzweiges aus zwei *festen* durch Drehpaarungen miteinander und mit dem Kurbelviereck verbundenen Gliedern würde auch, anstatt zweier, sechs Parameter zu unserer Verfügung und dabei nur einen sechsgliedrigen Mechanismus geben, wogegen das System P in Verbindung mit dem Kurbelviereck einen Mechanismus von 8 und das System Q einen Mechanismus von

1) Diese Zeitschrift Bd. 46 (1901), S. 199.

16 und sogar 18 Gliedern bildet. Die Linien aber, welche dann von den Punkten des hinzugefügten Zweiges beschrieben werden, unterscheiden sich schon wesentlich von der Koppelkurve σ_0 . Solche sechsgliedrige Mechanismen, welche zudem schon öfters und zu verschiedenen praktischen Zwecken untersucht wurden, werden wir weiter nicht betrachten, da dieses unserer oben gestellten Aufgabe nicht mehr entspricht.

2. *Verbindungen der Systeme P und Q mit dem Kurbelviereck.* Um die Lagen der Grundpunkte dieser Systeme in dem Kurbelviereck anschaulicher anzugeben, werden wir mit M_i oder M'_i denjenigen Grundpunkt dieses oder jenes Systems bezeichnen, welcher im Gliede A_i des Kurbelvierecks liegt. Dann können wir folgende wesentlich verschiedene Fälle einer Anschließung des Systems P oder Q an das Kurbelviereck unterscheiden. Für das System P:

1. (M_4, M_1) , 2. (M_4, M_2) , 3. (M_1, M_3) , 4. (M_1, M_2)

und für das System Q:

5. (M_4, M'_1, M_1) , 6. (M_4, M'_1, M_2) , 7. (M_4, M_1, M_3) ,
8. (M_4, M_1, M_2) , 9. (M_4, M_1, M'_1) , 10. (M_4, M_2, M'_2) ,
11. (M_1, M_2, M_3) , 12. (M_1, M'_1, M_3) , 13. (M_1, M'_1, M_2) ,
14. (M_1, M_2, M'_2) .

Dabei soll immer vorausgesetzt werden, daß A_4 das unbewegliche Glied des Kurbelvierecks ist.

Wir werden übrigens nicht alle 14 Fälle betrachten. Wenn ein Punkt, M_4 , eines ähnlich-veränderlichen Systems fest bleibt, so beschreiben bekanntlich alle übrigen Punkte ähnliche Linien mit proportionalen Geschwindigkeiten, daher stellt der Fall 1, wo der Punkt M_1 im Gliede A_1 liegt und also einen Kreis beschreibt, eine „einförmige“ kreislinige Bewegung dieses Systems dar. Ebenso beschreiben im Falle 2 alle Punkte des Systems P solche Linien, die der Bahn des Punktes M_2 ähnlich sind; dieser Punkt aber, da er dem Gliede A_2 angehört, beschreibt eine gewöhnliche Koppelkurve. In den Fällen 5 und 6 besteht die Bewegung des affin-veränderlichen Systems in einer einfachen Schiebung, und daher sind die Bahnen aller seiner Punkte ebenfalls untereinander ähnlich. Alle diese Fälle, sowie die Fälle 9, 10, 12, 13 und 14, wo der Abstand zweier Grundpunkte des affin-veränderlichen Systems unveränderlich bleibt, können außer Acht gelassen werden. Somit werden wir nur folgende 5 Fälle genauer untersuchen: Bei dem ähnlich-veränderlichen Systeme P:

- (1) I (M_1, M_3) , II (M_1, M_2) ,

und bei dem affin-veränderlichen Systeme Q:

- III (M_4, M_1, M_2) , IV (M_4, M_1, M_3) , V (M_1, M_2, M_3) .

Die Lagen der Grundpunkte in den ihnen entsprechenden Gliedern des Kurbelvierecks sollen dabei durch Polarkoordinaten folgendermaßen bestimmt werden. Es seien (Fig. 1)

$$(1) \quad c_1 = O_{41} M_1, \quad \varepsilon_1 = \sphericalangle (O_{12} O_{41} M_1)$$

die Koordinaten des Punktes M_1 , indem O_{41} als Pol und $O_{41} O_{12}$ als

Achse der Polarkoordinaten im Gliede A_1 angenommen wird; ebenso sollen für den Punkt M_2 die Koordinaten

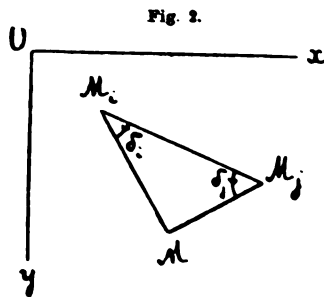
$$(2) \quad c_2 = O_{12} M_2, \quad \varepsilon_2 = \sphericalangle (O_{23} O_{12} M_2)$$

und für den Punkt M_3 die Koordinaten

$$(3) \quad c_3 = O_{34} M_3, \quad \varepsilon_3 = \sphericalangle (O_{23} O_{34} M_3)$$

genommen werden.

Außerdem werden wir im unbeweglichen Gliede A_4 den Drehpunkt O_{41} als Anfangspunkt und die Gerade $O_{41} O_{34}$ als Abscissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems nehmen und die Koordinaten des Punktes M_4 in diesem System mit x, y bezeichnen.



3. Koordinaten, welche die Lage der Punkte in den veränderlichen Systemen P und Q bestimmen. Die Lage eines Punktes $M(x, y)$ eines ähnlich-veränderlichen Systems P in Bezug auf zwei Grundpunkte desselben, $M_i(x_i, y_i)$ und $M_j(x_j, y_j)$, soll in der Folge durch die Winkel (Fig. 2)

$$(4) \quad \delta_i = \sphericalangle (M, M_i, M), \quad \delta_j = \sphericalangle (M, M_j, M)$$

bestimmt werden. Indem man

$$(5) \quad \operatorname{tg} \delta_i = k_i, \quad \operatorname{tg} \delta_j = k_j$$

setzt, bekommt man:

$$x = \frac{k_i x_i + k_j x_j + k_i k_j (y_i - y_j)}{k_i + k_j},$$

$$y = \frac{k_i y_i + k_j y_j - k_i k_j (x_i - x_j)}{k_i + k_j}.$$

In dem affin-veränderlichen Systeme Q wird die Lage eines Punktes $M(x, y)$ in Bezug auf seine drei Grundpunkte $M_i(x_i, y_i)$, $M_j(x_j, y_j)$, $M_k(x_k, y_k)$ durch die Verhältnisse

(Fig. 3)

$$m_j = \frac{M_i P}{M_i M_j}, \quad m_k = \frac{M_i Q}{M_i M_k}$$

bestimmt werden, wo P und Q in den Geraden $M_i M_j$ und $M_i M_k$ liegen und mit den Punkten M_i und M die Ecken eines Parallelogramms bilden. Sodann haben wir:

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= m_i x_i + m_j x_j + m_k x_k, \\ y &= m_i y_i + m_j y_j + m_k y_k, \end{aligned}$$

mit der Bedingung:

$$(8) \quad m_i + m_j + m_k = 1.$$

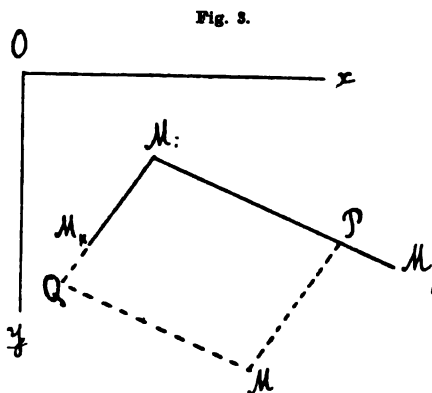


Fig. 3.

4. *Bestimmung der Lage des ganzen Gelenksystems.* Da wir nur einige Vergleiche zwischen den Bahnlinien der Punkte des Systems P oder Q , wenn dasselbe einem Kurbelviereck angeschlossen wird, und den gewöhnlichen Koppelkurven anstellen wollen, so brauchen wir nicht die Gleichungen dieser Linien in den Koordinaten x, y auszudrücken, da zudem diese Gleichungen wie diejenigen der Koppelkurven vom 6. Grade sind. Für unseren Zweck wird es sogar genügen die beiden Koordinaten nicht als Funktionen eines und desselben Parameters auszudrücken, sondern diese Koordinaten als Funktionen zweier Parameter stehen zu lassen und dabei nötigenfalls die Abhängigkeit derselben von einander zu beachten. Als solche Parameter werden wir die Winkel α_1 und α_3 , welche die Geraden $O_{41} O_{12}$ und $O_{24} O_{33}$ (Fig. 4) mit der festen Geraden $O_{41} O_{34}$ bilden, annehmen. Diese Winkel sind durch die Gleichung

$$(9) \quad g_3 \cos \alpha_1 - g_1 \cos \alpha_3 + \cos(\alpha_1 - \alpha_3) = n$$

verbunden, wo

$$(10) \quad g_1 = \frac{a_4}{a_1}, \quad g_3 = \frac{a_4}{a_3}, \quad n = \frac{a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_2^2}{2 a_1 a_3}$$

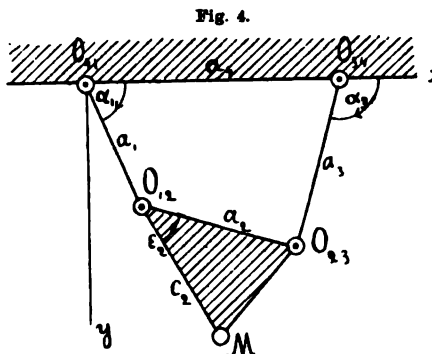


Fig. 4.

gesetzt ist und a_1, a_2, a_3, a_4 die Längen der Glieder A_1, A_2, A_3, A_4 , d. h. die Entfernungen zwischen ihren Drehpunkten bezeichnen.

5. Die Koppelkurven σ_0 und die von den Punkten des Systems P oder Q beschriebenen Linien σ . Wenn ein Punkt M_0 dem Gliede A_2 eines Kurbelvierecks angehört und seine Lage in diesem Gliede durch die Koordinaten c_2, ε_2 (§ 2) bestimmt wird, so werden seine Koordinaten x, y in der festen Ebene, bei der in § 2 angenommenen Lage der Koordinatenachsen durch die Formeln

$$(11) \quad \begin{aligned} x &= A \cos \alpha_1 + B \sin \alpha_1 + C \cos \alpha_3 + D \sin \alpha_3 + E, \\ y &= -B \cos \alpha_1 + A \sin \alpha_1 - D \cos \alpha_3 + C \sin \alpha_3 + E' \end{aligned}$$

ausgedrückt, wo

$$(12) \quad \begin{aligned} A &= \frac{a_1}{a_2} (a_2 - c_2 \cos \varepsilon_2), & B &= \frac{a_1}{a_2} c_2 \sin \varepsilon_2, \\ C &= \frac{a_3}{a_2} c_2 \cos \varepsilon_2, & D &= -\frac{a_3}{a_2} c_2 \sin \varepsilon_2, \\ E &= \frac{a_4}{a_2} c_2 \cos \varepsilon_2, & E' &= \frac{a_4}{a_2} c_2 \sin \varepsilon_2 \end{aligned}$$

ist.

Wenn man beachtet, daß die Koordinaten aller Punkte aller beweglicher Glieder des Kurbelvierecks lineare Funktionen der Cosinus und Sinus der Winkel α_1 und α_3 sind und daß andererseits die Koordinaten irgend eines Punktes M des Systems P oder Q , wie die Formeln (6) und (7) zeigen, linear durch die Koordinaten seiner Grundpunkte ausgedrückt werden, diese Punkte aber dem Kurbelviereck angehören, so sieht man leicht ein, daß die Koordinaten des Punktes M auch lineare Funktionen der Cosinus und Sinus von α_1 und α_3 sind. Wenn man alle Substitutionen vollzieht, um diese Funktionen zu bilden, so überzeugt man sich, daß die Formeln (11) und (9) in allen Fällen die Bahnen der Punkte M bestimmen, gleichgültig, ob diese Punkte dem Kurbelviereck selbst oder einem an dasselbe angeschlossenen ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Systeme angehören.

Alle diese Fälle unterscheiden sich nur durch den Bestand der Koeffizienten und die Zahl der in ihnen enthaltenen Parameter.

Da die Bahngleichung zwischen den Koordinaten x, y in allen Fällen durch Elimination der Winkel α_1 und α_3 aus den Gleichungen (11) und (9) erhalten wird, so können wir schließen, daß die Linien σ alle allgemeinen Eigenschaften der Koppelkurven besitzen, dabei aber als eine Verallgemeinerung derselben auftreten, da ihre Gleichungen, bei einem gegebenen Kurbelviereck, nicht von 2 sondern von 6 oder 8 Parametern abhängen, wie es schon in § 1 bemerkt wurde.

6. Die Gleichung der Linie σ . Roberts hat gezeigt¹⁾, daß die Gleichung einer gewöhnlichen Koppelkurve in die Form

$$(13) \quad M^2 + N^2 = R^2$$

gebracht werden kann, wo M und N ganze Funktionen der Koordinaten sind, und jede von ihnen zwei solche Polynome zweiten Grades enthält, die, gleich Null gesetzt, Kreislinien bestimmen, und wo R ein eben solches Polynom enthält. Aus § 5 folgt, daß die Gleichung der Linie σ in allen Fällen in eine ähnliche Form gebracht werden kann. Diese Gleichung kann unmittelbar durch Elimination von α_1 und α_3 aus den Gleichungen (11) und (9) gefunden werden. Indem wir

$$(14) \quad x - E = \xi, \quad y - E' = \eta,$$

$$(15) \quad \begin{aligned} A &= \varrho_1 \cos \lambda_1, & B &= \varrho_1 \sin \lambda_1, \\ C &= \varrho_3 \cos \lambda_3, & D &= \varrho_3 \sin \lambda_3 \end{aligned}$$

setzen, so daß

$$(16) \quad \begin{aligned} \xi &= \varrho_1 \cos(\alpha_1 - \lambda_1) + \varrho_3 \cos(\alpha_3 - \lambda_3), \\ \eta &= \varrho_1 \sin(\alpha_1 - \lambda_1) + \varrho_3 \sin(\alpha_3 - \lambda_3) \end{aligned}$$

wird, erhalten wir:

$$(17) \quad \begin{aligned} \xi \cos(\alpha_1 - \lambda_1) + \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_1) &= \varrho_1 + \varrho_3 \cos[(\alpha_1 - \alpha_3) - (\lambda_1 - \lambda_3)], \\ \xi \sin(\alpha_1 - \lambda_1) - \eta \cos(\alpha_1 - \lambda_1) &= \varrho_3 \sin[(\alpha_1 - \alpha_3) - (\lambda_1 - \lambda_3)]; \end{aligned}$$

woraus

$$(18) \quad \xi^2 + \eta^2 - 2\varrho_1 \xi \cos(\alpha_1 - \lambda_1) - 2\varrho_1 \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_1) + \varrho_1^2 = \varrho_3^2.$$

Aus denselben Gleichungen (16) folgt:

$$\xi \cos(\alpha_1 - \lambda_3) + \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_3) = \varrho_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_3) + \varrho_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_3)$$

oder, wenn man die Bedingung (9) benützt:

$$(19) \quad \begin{aligned} \xi \cos(\alpha_1 - \lambda_3) + \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_3) &= \varrho_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_3) \\ &+ n\varrho_3 - g_3\varrho_3 \cos \alpha_1 + g_1\varrho_3 \cos \alpha_3. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (16) aber erhält man:

$$\xi \cos \lambda_3 - \eta \sin \lambda_3 = \varrho_1 \cos[\alpha_1 - (\lambda_1 - \lambda_3)] + \varrho_3 \cos \alpha_3.$$

Indem wir aus den beiden letzten Gleichungen $\cos \alpha_3$ eliminieren, bekommen wir:

$$(20) \quad \begin{aligned} \xi \cos(\alpha_1 - \lambda_3) + \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_3) + g_3\varrho_3 \cos \alpha_1 + g_1\varrho_1 \cos[\alpha_1 - (\lambda_1 - \lambda_3)] \\ = g_1\xi \cos \lambda_3 - g_1\eta \sin \lambda_3 + n\varrho_3 + g_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_3). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (18) und (20) können in der Form

$$(21) \quad \begin{aligned} p \cos \alpha_1 + q \sin \alpha_1 &= s, \\ p' \cos \alpha_1 + q' \sin \alpha_1 &= s' \end{aligned}$$

1) Proceedings of the London Mathem. Soc. 1875.

geschrieben werden, wo

$$\begin{aligned}
 (22) \quad p &= 2\varrho_1 (\xi \cos \lambda_1 - \eta \sin \lambda_1), \\
 q &= 2\varrho_1 (\xi \sin \lambda_1 + \eta \cos \lambda_1), \\
 s &= \xi^2 + \eta^2 + \varrho_1^2 - \varrho_2^2, \\
 p' &= \xi \cos \lambda_2 - \eta \sin \lambda_2 + g_1 \varrho_1 \cos (\lambda_1 - \lambda_2) + g_2 \varrho_2, \\
 q' &= \xi \sin \lambda_2 + \eta \cos \lambda_2 + g_1 \varrho_1 \sin (\lambda_1 - \lambda_2), \\
 s' &= g_1 (\xi \cos \lambda_2 - \eta \sin \lambda_2) + \varrho_1 \cos (\lambda_1 - \lambda_2) + n \varrho_2
 \end{aligned}$$

ist. Durch Elimination von α_1 aus den Gleichungen (21) erhalten wir die Gleichung der Kurve σ in der Form

$$(23) \quad (p's - ps')^2 + (q's - qs')^2 = (qp' - pq')^2.$$

Diese Gleichung könnte man der Robertsschen Form noch näher bringen; wir werden uns aber damit nicht weiter aufhalten.

7. *Über die Vergleichung einer gegebenen Linie mit einer Linie σ .*
Es sei eine Linie

$$(24) \quad f(x, y) = 0$$

gegeben; damit ein Punkt M des Systems P oder Q , wenn dasselbe an ein Kurbelviereck angeschlossen wird, diese Linie beschreibt, ist es notwendig, daß die Ausdrücke (11), in die Gleichung (24) eingesetzt, eine solche Beziehung zwischen den Winkeln α_1 und α_2

$$(25) \quad F(\alpha_1, \alpha_2, A, B, C, D, E, E') = 0$$

ergeben, welche mit der Bedingung (9) identisch ist. Die Möglichkeit, dieser Forderung zu genügen, hängt davon ab, ob die Parameter A, B, C, D, E und E' entsprechender Weise gewählt werden können. Dabei stehen uns zur Verfügung: 1) die Längen a_1, a_2, a_3, a_4 der Glieder des Kurbelvierecks, 2) die Koordinaten, welche die Lage der Grundpunkte des Systems P oder Q in dem Kurbelvierecke bestimmen, und 3) die Koordinaten, welche die Lage des Punktes M im Systeme P oder Q angeben.

Wenn die genaue Erfüllung der oben genannten Forderung nicht möglich ist, so bleibt die Aufgabe bestehen: die Bedingungen zu finden, damit die Linie σ in gewissen Grenzen sich an die gegebene Linie (24) möglichst nahe anschmiegt. Diese Methode kann auch auf die gewöhnliche Koppelkurve angewendet werden.

Wir werden übrigens auf die analytische Untersuchung dieser Frage nicht eingehen und werden nur einige einfachere Fälle betrachten, wo eine genauere Identifizierung der Bedingungen (25) und (9) sich als möglich erweist.

8. *Koeffizientenausdrücke in den Formeln (11) für die fünf in § 2 angegebenen Hauptfälle.* Indem wir uns der in §§ 2, 3 und 4 eingeführten Bezeichnungen erinnern, finden wir: *im Falle I:*

$$\begin{aligned}
 (26) \quad & x_1 = c_1 \cos(\alpha_1 + \varepsilon_1), \quad y_1 = c_1 \sin(\alpha_1 + \varepsilon_1), \\
 & x_3 = a_4 + c_3 \cos(\alpha_3 + \varepsilon_3), \quad y_3 = c_3 \sin(\alpha_3 + \varepsilon_3), \\
 & A = \frac{k_1 c_1}{k_1 + k_3} (\cos \varepsilon_1 + k_3 \sin \varepsilon_1) = c_1 \frac{\sin \delta_1 \cos(\varepsilon_1 - \delta_3)}{\sin(\delta_1 + \delta_3)}, \\
 & B = -\frac{k_1 c_1}{k_1 + k_3} (\sin \varepsilon_1 - k_3 \cos \varepsilon_3) = -c_1 \frac{\sin \delta_1 \sin(\varepsilon_1 - \delta_3)}{\sin(\delta_1 + \delta_3)}, \\
 & C = \frac{k_3 c_3}{k_1 + k_3} (\cos \varepsilon_3 - k_1 \sin \varepsilon_3) = c_3 \frac{\sin \delta_3 \cos(\varepsilon_3 + \delta_1)}{\sin(\delta_1 + \delta_3)}, \\
 (27) \quad & D = -\frac{k_3 c_3}{k_1 + k_3} (\sin \varepsilon_3 + k_1 \cos \varepsilon_3) = -c_3 \frac{\sin \delta_3 \sin(\varepsilon_3 + \delta_1)}{\sin(\delta_1 + \delta_3)}, \\
 & E = \frac{k_3 a_4}{k_1 + k_3} = a_4 \frac{\cos \delta_1 \sin \delta_3}{\sin(\delta_1 + \delta_3)}, \\
 & E' = \frac{k_1 k_3 a_4}{k_1 + k_3} = a_4 \frac{\sin \delta_1 \sin \delta_3}{\sin(\delta_1 + \delta_3)};
 \end{aligned}$$

im Falle II:

$$\begin{aligned}
 & x_1 = c_1 \cos(\alpha_1 + \varepsilon_1), \quad y_1 = c_1 \sin(\alpha_1 + \varepsilon_1), \\
 (28) \quad & x_2 = \frac{a_4}{a_2} c_3 \cos \varepsilon_3 + a_1 \cos \alpha_1 - \frac{a_1}{a_2} c_3 \cos(\alpha_1 + \varepsilon_3) + \frac{a_2}{a_2} c_2 \cos(\alpha_3 + \varepsilon_3), \\
 & y_2 = \frac{a_4}{a_2} c_3 \sin \varepsilon_3 + a_1 \sin \alpha_1 - \frac{a_1}{a_2} c_3 \sin(\alpha_1 + \varepsilon_3) + \frac{a_2}{a_2} c_2 \sin(\alpha_3 + \varepsilon_3), \\
 & A = \frac{k_1 c_1 a_2 (\cos \varepsilon_1 + k_3 \sin \varepsilon_1) - k_3 c_3 a_1 (\cos \varepsilon_3 - k_1 \sin \varepsilon_3) + k_3 a_1 a_2}{(k_1 + k_3) a_2}, \\
 & B = \frac{-k_1 c_1 a_2 (\sin \varepsilon_1 - k_3 \cos \varepsilon_3) + k_3 c_3 a_1 (\sin \varepsilon_3 + k_1 \cos \varepsilon_3) - k_1 k_3 a_1 a_2}{(k_1 + k_3) a_2}, \\
 (29) \quad & C = \frac{k_3 a_3 c_2}{(k_1 + k_3) a_2} (\cos \varepsilon_3 - k_1 \sin \varepsilon_3), \\
 & D = -\frac{k_3 a_3 c_2}{(k_1 + k_3) a_2} (\sin \varepsilon_3 + k_1 \cos \varepsilon_3), \\
 & E = \frac{k_3 a_4 c_2}{(k_1 + k_3) a_2} (\cos \varepsilon_3 - k_1 \sin \varepsilon_3), \\
 & E' = \frac{k_3 a_4 c_2}{(k_1 + k_3) a_2} (\sin \varepsilon_3 + k_1 \cos \varepsilon_3);
 \end{aligned}$$

im Falle III sind x_4, y_4 konstant und x_1, y_1, x_3, y_3 werden nach den Formeln (26) bestimmt und

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & A = m_1 c_1 \cos \varepsilon_1, \quad B = -m_1 c_1 \sin \varepsilon_1, \\
 & C = m_3 c_3 \cos \varepsilon_3, \quad D = -m_3 c_3 \sin \varepsilon_3, \\
 & E = m_4 x_4 + m_3 a_4, \quad E' = m_4 y_4, \\
 & m_1 + m_3 + m_3 = 1;
 \end{aligned}$$

im Falle IV sind x_4, y_4 konstant, x_1, y_1, x_2, y_2 werden durch die Formeln (28) ausgedrückt und

$$\begin{aligned}
 A &= m_1 c_1 \cos \varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2} (a_2 - c_2 \cos \varepsilon_2), \\
 B &= -m_1 c_1 \sin \varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2} c_2 \sin \varepsilon_2, \\
 C &= m_2 \frac{a_2}{a_3} c_2 \cos \varepsilon_2, \\
 D &= -m_2 \frac{a_2}{a_3} c_2 \sin \varepsilon_2, \\
 E &= m_2 \frac{a_4}{a_3} c_2 \cos \varepsilon_2 + m_4 x_4, \\
 E' &= m_2 \frac{a_4}{a_3} c_2 \sin \varepsilon_2 + m_4 y_4, \\
 m_1 + m_2 + m_3 &= 1;
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

im Falle V werden $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ durch die Formeln (26) und (28) bestimmt und

$$\begin{aligned}
 A &= m_1 c_1 \cos \varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2} (a_2 - c_2 \cos \varepsilon_2), \\
 B &= -m_1 c_1 \sin \varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2} c_2 \sin \varepsilon_2, \\
 C &= m_2 \frac{a_2}{a_3} c_2 \cos \varepsilon_2 + m_3 c_3 \cos \varepsilon_3, \\
 D &= -m_2 \frac{a_2}{a_3} c_2 \sin \varepsilon_2 - m_3 c_3 \sin \varepsilon_3, \\
 E &= m_2 \frac{a_4}{a_3} c_2 \cos \varepsilon_2 + m_3 a_4, \\
 E' &= m_2 \frac{a_4}{a_3} c_2 \sin \varepsilon_2, \\
 m_1 + m_2 + m_3 &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

9. *Bewegungen, bei denen ein Punkt M des Systems P oder Q fest bleibt.* Der Punkt M bleibt unbeweglich, wenn bei allen Werten von α_1 und α_3 , die der Bedingung (9) genügen,

$$\begin{aligned}
 A \cos \alpha_1 + B \sin \alpha_1 + C \cos \alpha_3 + D \sin \alpha_3 &= x - E = \text{const.} \\
 -B \cos \alpha_1 + A \sin \alpha_1 - D \cos \alpha_3 + C \sin \alpha_3 &= y - E' = \text{const.}
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

ist. Wenn die Winkel α_1 und α_3 nicht beständig einander gleich bleiben, so folgt daraus:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0,
 \tag{34}$$

und für die Lage des Punktes M:

$$x = E, \quad y = E'.
 \tag{35}$$

Ist aber bei jeder Lage des Kurbelvierecks

$$\alpha_1 = \alpha_3$$

also das Kurbelviereck ein gelenkiges Parallelogramm, welches nicht in ein Antiparallelogramm übergeht, so sind die Bedingungen

$$(36) \quad A + C = 0, \quad B + D = 0$$

genügend.

Bei einem gewöhnlichen Kurbelviereck sind die Bedingungen (34) oder (36) nicht erfüllbar, ohne daß eine von den Größen a_1, a_2, a_3, a_4 gleich Null wird; dann geht aber das Kurbelviereck in ein unbewegliches Dreieck über.

Im *Falle I*, wenn δ_1 und δ_3 von Null verschieden sind, werden die Bedingungen (34) nur durch die Annahme

$$(37) \quad c_1 = 0, \quad c_3 = 0$$

erfüllt; dabei fallen aber die Punkte M_1 und M_3 mit den unbeweglichen Drehpunkten O_{41} und O_{34} zusammen, und das ganze ähnlich-veränderliche System P bleibt dann unbeweglich. Bei der Voraussetzung

$$(38) \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_3 = 0,$$

welche mit der Annahme, daß der Punkt M in der Geraden $M_1 M_3$ liegt, gleichbedeutend ist, kommen wir zu demselben Ergebnis. Es sei nämlich:

$$\frac{M_1 M}{M_3 M} = \frac{\mu_1}{\mu_3};$$

anstatt der Formeln (6) hat man dann:

$$x = \frac{\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3}{\mu_1 + \mu_3}, \quad y = \frac{\mu_3 y_1 + \mu_1 y_3}{\mu_1 + \mu_3}.$$

Wenn man die Ausdrücke (26) hierin einsetzt, findet man:

$$A = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} c_1 \cos \varepsilon_1, \quad B = -\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} c_1 \sin \varepsilon_1,$$

$$C = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} c_3 \cos \varepsilon_3, \quad D = -\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} c_3 \sin \varepsilon_3,$$

was bei den Voraussetzungen (34) wieder mit der Annahme (37) gleichbedeutend wird.

Indem wir die Voraussetzung (38) wieder fallen lassen, wollen wir jetzt die Annahme (36), welche einem gelenkigen Parallelogramm entspricht, näher betrachten. Daß die Bedingungen (36) jetzt mit der Beweglichkeit des Systems P verträglich sind, kann man schon aus dem bekannten Falle einer „einförmigen Bewegung“ des ähnlich-veränderlichen Systems einsehen.¹⁾ Die Lage des un-

1) Beschreiben zwei Punkte eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems ähnliche Bahnen, in denen sie entsprechende Lagen einnehmen, so bleibt der Ähnlichkeitspol fest.

beweglichen Punktes M wird jetzt in dem Systeme P durch die Koordinaten

$$k_1 = \frac{c_2 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{c_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - c_1}, \quad k_2 = \frac{c_1 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{c_1 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - c_2}$$

und in der festen Ebene durch die Koordinaten

$$x = \frac{c_1^2 - c_1 c_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} a_4, \quad y = -\frac{c_1 c_2 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} a_4$$

bestimmt. Die Lage der Punkte M_1 und M_2 in den Gliedern A_1 und A_2 kann dabei frei gewählt werden.

Ähnliche Schlüsse gelten auch für den *Fall II*.

Im *Falle III*, wenn die Winkel α_1 und α_2 einander nicht gleich sind, kann es außer dem Punkte M_4 keine anderen unbeweglichen Punkte geben. Wenn aber $\alpha_1 = \alpha_2$ ist, so hat man für den festen Punkt die Bedingungen

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1, \quad m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0$$

oder

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \pi, \quad m_1 c_1 - m_2 c_2 = 0.$$

Die Bedingung

$$(39) \quad m_1 c_1 \pm m_2 c_2 = 0$$

zeigt, daß es jetzt unendlich viele feste Punkte gibt, welche eine durch den Punkt M_4 gehende Gerade bilden. Wir haben hier offenbar den Fall einer einfachen Schiebungsbewegung des affin-veränderlichen Systems.

Ähnliches stellt auch der *Fall IV* dar.

Eine größere Beachtung verdient der *Fall V*. Das ist der einzige Fall, wo das System Q bei jeder Form des Kurbelvierecks, mit demselben so verbunden werden kann, daß ein Punkt des Systems fest bleibt. Dazu haben wir die Bedingungen:

$$(40) \quad \begin{aligned} m_2 a_1 a_2 + m_1 a_2 c_1 \cos \varepsilon_1 - m_2 a_1 c_2 \cos \varepsilon_2 &= 0, \\ m_1 a_2 c_1 \sin \varepsilon_1 + m_2 a_1 c_2 \sin \varepsilon_2 &= 0, \\ m_2 a_3 c_2 \cos \varepsilon_2 + m_3 a_2 c_3 \cos \varepsilon_3 &= 0, \\ m_2 a_3 c_2 \sin \varepsilon_2 + m_3 a_2 c_3 \sin \varepsilon_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1, \quad m_2 a_3 c_2 + m_3 a_2 c_3 = 0$$

oder

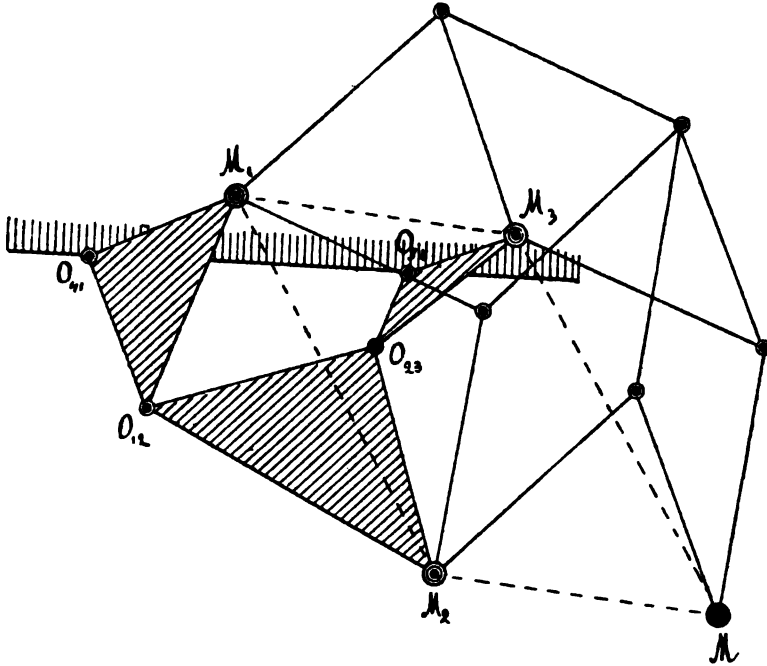
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \pi, \quad m_2 a_3 c_2 - m_3 a_2 c_3 = 0.$$

Ein Paar dieser Gleichungen, die ersten zwei von den Gleichungen (40) und die Bedingung

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

können dazu dienen, um 5 von den 9 Elementen $m_1, m_2, m_3, c_1, \varepsilon_1, c_2, \varepsilon_2, c_3, \varepsilon_3$ zu bestimmen; somit bleibt noch eine große Auswahl für die Lage der Grundpunkte im Systeme Q und dementsprechend für die Lage des festen Punktes M frei. Es ist bemerkenswert, daß die Gleichungen (40) a_4 nicht enthalten. In der Figur 5 ist genommen: $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = 2 : 3 : 1 : 4$,

Fig. 5.



so daß $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ und das Kurbelviereck also ein durchschlagender Mechanismus ist, und weiter $m_1 = -1, m_2 = 1, m_3 = 1$, so daß die Punkte M_1, M_2, M_3 und M die Ecken eines Parallelogramms sind; endlich ist

$$\varepsilon_1 = -\frac{\pi}{2}, \varepsilon_2 = \frac{\pi}{4}, \varepsilon_3 = \frac{5\pi}{4}, c_1 = a_1, c_2 = a_2\sqrt{2}, c_3 = a_3\sqrt{2}$$

genommen.

10. Ein anderer das letzte Ergebnis betreffender Standpunkt. Ein ebenes affin-veränderliches System hat sechs Freiheitsgrade; wenn also ein Punkt von ihm festgehalten wird, so bleiben noch vier Freiheitsgrade übrig, über die man auf verschiedene Weise verfügen kann, um eine zwangsläufige Bewegung des Systems zu erhalten: man kann die Bahnen noch zweier Punkte und ihr Geschwindigkeitsverhältnis aufstellen, oder auch die Bahnen dreier Punkte angeben, wobei die Ge-

geschwindigkeitsverhältnisse dieser Punkte in jeder Lage des Systems schon bestimmte sein werden. Die oben betrachtete Bewegung des Systems Q entspricht eben diesem letzteren Falle: ein Punkt M ist fest, die Punkte M_1 und M_2 befinden sich auf gegebenen Kreislinien und der Punkt M_3 beschreibt eine Koppelkurve. Im allgemeinen können diese Linien willkürlich gewählt werden und brauchen nicht Bahnen der Punkte eines und desselben Kurbelvierecks zu sein; es ist aber bemerkenswert, daß wenn man für diese Linien die Bahnen dreier Punkte annimmt, welche den beweglichen Gliedern eines Kurbelvierecks angehören und in diesen Gliedern bestimmte Lagen einnehmen, solche Geschwindigkeitsverhältnisse dieser Punkte bei der betrachteten Bewegung des affin-veränderlichen Systems sich ergeben, wie sie in der Tat bei der Bewegung des Kurbelvierecks bestehen. Dabei können die Zahlen m_1, m_2, m_3 unter der Bedingung

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

sowie die Koordinaten

$$x = E, \quad y = E'$$

des festen Punktes M im Voraus gegeben werden; die Formeln (32) für E und E' bestimmen dann c_2 und ε_2 , also die Lage des Punktes M_2 in der Koppel des Kurbelvierecks, und die Gleichungen (40) bestimmen darauf c_1, ε_1 und c_3, ε_3 , d. h. die Lagen der Punkte M_1 und M_3 in den Kurbeln desselben Mechanismus. Daraus schließen wir: *Es kann eine solche Bewegung eines affin-veränderlichen Systems angegeben werden, daß ein willkürlich gegebener Punkt desselben festgehalten wird und irgend drei andere seiner Punkte dreien beweglichen Gliedern eines und desselben willkürlich gegebenen Kurbelvierecks angehören.*

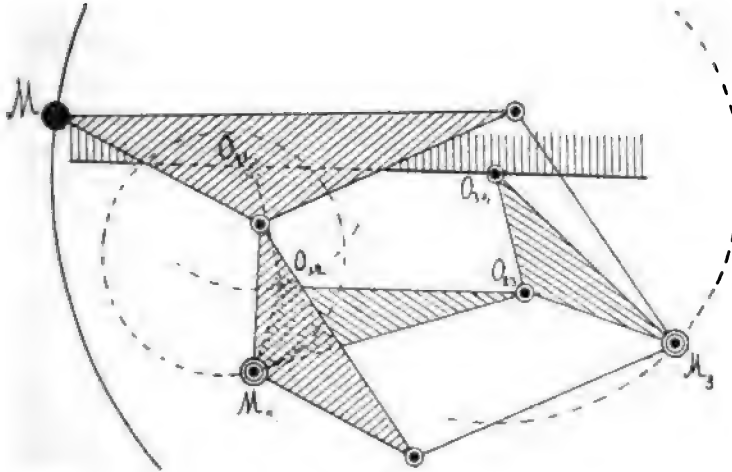
11. *Praktische Anwendung eines in § 9 angegebenen Ergebnisses.* In § 9 wurde unter anderem gezeigt, daß nur in dem Falle das System P an ein Kurbelviereck so angeschlossen werden kann, daß ein Punkt M des letzteren bei jeder Lage des Kurbelvierecks fest bleibt, wenn das Kurbelviereck ein Parallelogramm ist. Es gibt aber solche Lagen des gelenkigen Parallelogramms, wo es in ein Antiparallelogramm übergeht; dann setzt sich der Punkt M in Bewegung.¹⁾ Daraus schließen wir folgendes: *Wird der Punkt M durch irgend welche mechanische Mittel festgehalten, so wird das Parallelogramm dadurch gehindert in ein Antiparallelogramm überzugehen* (Fig. 6).

Das System P wird am einfachsten durch einen Plagiographen von Sylvester verwirklicht. Da dieser Mechanismus aus vier gelenkig mit einander verbundenen Gliedern besteht, so wird das genannte Ziel

1) In § 16 wird gezeigt, daß dieser Punkt dann einen Kreis beschreibt.

mit derselben Einfachheit erreicht wie durch den bekannten Dreikurbelmechanismus, welcher außer dem Grundparallelogramme ebenfalls noch vier bewegliche Glieder enthält. Der oben angegebene Mechanismus hat aber einen Vorzug: beim Dreikurbelmechanismus, wenn die Kurbeln des Parallelogramms volle Umdrehungen machen, muß auch die dritte Kurbel ganze Umdrehungen vollziehen; während im Systeme P der

Fig. 6.



festen Punkt M so gewählt werden kann, daß das um ihn drehbare Glied des Plagiographen nur eine schwingende Bewegung macht, wobei die Amplitude derselben in gewissen gegebenen Grenzen bleiben kann.

12. Zur Frage über die geradlinige Bewegung des Punktes M . Es sei

$$ax + by + c = 0$$

die Gleichung der Geraden, die von dem Punkte M des Systems P oder Q beschrieben werden soll. Nach § 7 finden wir dazu die Bedingung:

$$(aA - bB) \cos \alpha_1 + (aB + bA) \sin \alpha_1 + (aC - bD) \cos \alpha_2 + (aD + bC) \sin \alpha_2 + aE + bE' + c = 0.$$

Da dieselbe $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ nicht enthält, so kann man daraus schon unmittelbar schließen, daß ihre Übereinstimmung mit der Bedingung (9), also auch eine geradlinige Bewegung des Punktes M bei keinem Falle der Anschließung des Systems P oder Q an ein Kurbelviereck möglich ist.

Das Gesagte bezieht sich auch auf die gewöhnlichen Koppelkurven, und wir haben hiermit einen einfachen Beweis für die Unmöglichkeit

keit, mittelst eines einfachen Kurbelvierecks in einer *genauen* Geraden zu führen.

Was die angenäherte Zeichnung der geraden Linien mittelst der Systeme P und Q betrifft, so ist es nicht der Mühe wert sich damit aufzuhalten, da solche Mechanismen mindestens 7 bewegliche Glieder enthalten, während schon fünfgliedrige genaue Geradfürungen möglich sind.

13. *Bestimmung der Punkte im Systeme P oder Q , welche Kreislinien beschreiben.* Bei der Bewegung eines gewöhnlichen Kurbelvierecks bilden die kreislinigen Koppelkurven eine Ausnahme: von den Punkten der Koppel beschreiben nur die Drehpunkte O_{12} und O_{34} Kreislinien. Andere solche Punkte gibt es nicht, wenn nur das Kurbelviereck kein Parallelogramm oder kein Rhomboid mit paarweise zusammengefallenen Gliedern darstellt; in den zwei letzten Fällen erscheint die Kreislinie als ein Zweig der Koppelkurve, deren anderer Zweig vom vierten Grade ist und dann beschrieben wird, wenn das Parallelogramm in ein Antiparallelogramm oder der andere Mechanismus in ein wirkliches Rhomboid übergeht. Die Verbindung des Systems P oder Q mit dem Kurbelviereck führt zu anderen Ergebnissen: es erweist sich, daß die Linie σ bei jeder Form des Kurbelvierecks einen kreislinigen Zweig aussondern kann, wenn nur die 6 oder 8 zur Verfügung stehenden Parameter (§ 1) entsprechend gewählt werden. Setzen wir:

$$(41) \quad x - E = \xi, \quad y - E' = \eta$$

und nehmen den Punkt (E, E') , dessen Lage bei der Untersuchung selbst nach den Formeln des § 8 bestimmt werden soll, zum neuen Koordinatenanfange; es sei ferner

$$(42) \quad \xi^2 + \eta^2 - 2a\xi - 2b\eta + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung des zu beschreibenden Kreises. Dem in § 7 Gesagten gemäß schreiben wir:

$$(43) \quad \begin{aligned} & 2(A' + BD) \cos(\alpha_1 - \alpha_3) - 2(aA - bB) \cos \alpha_1 - 2(aC - bD) \cos \alpha_3 \\ & + 2(B' - AD) \sin(\alpha_1 - \alpha_3) - 2(aB + bA) \sin \alpha_1 - 2(aD + bC) \sin \alpha_3 \\ & + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + a^2 + b^2 - r^2 = 0, \end{aligned}$$

und wir wollen jetzt die Übereinstimmung dieser Bedingung mit der Formel (9) herstellen. Die linke Seite dieser letzteren stellt eine solche Funktion von α_1 und α_3 dar, die durch gleichzeitiges Wechseln der Vorzeichen von α_1 und α_3 nicht geändert wird. Damit die Formel (43) dieselbe Eigenschaft besitze, ist es notwendig, daß die Summe aller Glieder, welche mit α_1 und α_3 ihr Zeichen wechseln, für sich

allein gleich Null sei. Somit zerfällt die Bedingung in die beiden folgenden:

$$(44) \quad (BC - AD \sin(\alpha_1 - \alpha_3) - (aB + bA) \sin \alpha_1 - (aD + bC) \sin \alpha_3 = 0,$$

$$(45) \quad 2(AC + BD) \cos(\alpha_1 - \alpha_3) - 2(aA - bB) \cos \alpha_1 - 2(aC - bD) \cos \alpha_3 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + a^2 + b^2 - r^2 = 0,$$

von denen die erste bei allen Werten von α_1 und α_3 , die der Bedingung (9) genügen, erfüllt und die zweite mit dieser Bedingung identisch werden muß. Die Bedingung (44) ist aber nur dann mit (9) verträglich, wenn

$$(46) \quad BC - AD = 0,$$

$$(47) \quad aB + bA = 0,$$

$$(48) \quad aD + bC = 0$$

ist. Um dieses genauer zu beweisen, genügt es, einige spezielle Lagen des Kurbelvierecks, nämlich solche, bei welchen zwei seiner Glieder in einer Geraden zusammenfallen, zu betrachten. Eigentlich müßte man alle drei Haupttypen dieses Mechanismus untersuchen, je nachdem die beiden Kurbeln oder nur eine von ihnen volle Umdrehungen machen kann oder beide Kurbeln nur schwingen können; da aber der Gedankengang in allen Fällen derselbe bleibt, werden wir nur den letzten Fall betrachten. Der Kürze wegen werden wir unter A_1, A_2, A_3, A_4 nicht nur die einzelnen Glieder des Kurbelvierecks sondern auch die Geraden, welche die Drehpaarungen verbinden, verstehen. Im Falle, daß die Geraden A_1 und A_3 mit A_4 zusammenfallen können, kann man $\alpha_1 = 0$ nehmen und daraus folgt:

$$(49) \quad (BC - AD) + (aD + bC) = 0,$$

oder $\alpha_3 = \pi$, und dann ist

$$(50) \quad (BC - AD) + (aB + bA) = 0.$$

Außerdem können die Geraden A_2 und A_3 oder auch A_1 und A_2 in eine Gerade fallen, und dann hat man im ersteren Falle:

$$\frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{a_4} = \frac{\sin \alpha_1}{a_2 + a_3} = \frac{\sin \alpha_3}{a_1}$$

und im zweiten Falle

$$\frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{a_4} = \frac{\sin \alpha_1}{a_3} = \frac{\sin \alpha_2}{a_1 + a_2}.$$

Dem entsprechend bekommt man aus (44):

$$a_4(BC - AD) + (a_2 + a_3)(aB + bA) + a_1(aD + bC) = 0,$$

$$a_4(BC - AD) + a_3(aB + bA) + (a_1 + a_2)(aD + bC) = 0,$$

und in Verbindung mit (49) und (50):

$$a_4(BC - AD) + (a_1 + a_2 + a_3)(aD + bC) = 0.$$

Da a_4 und $a_1 + a_2 + a_3$ nicht einander gleich sein können, so folgen aus der letzten Gleichung die Bedingungen (46), (47) und (48), von denen übrigens nur zwei voneinander verschieden sind. Im Falle, daß die Geraden A_1 und A_3 nicht mit A_4 , dafür aber mit A_2 auf zweierlei Weise zusammenfallen können, kommen wir zu demselben Schlusse.

Der Vergleich von (45) mit (9) gibt weiter:

$$(51) \quad \frac{aA - bB}{g_3} = \frac{aC - bD}{-g_1} = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + a^2 + b^2 - r^2}{2n} = -(AC + BD).$$

Somit müssen 7 Elemente A, B, C, D, a, b, r fünf Bedingungen genügen.

In der Voraussetzung, daß keiner von den Koeffizienten A, B, C, D gleich Null ist, und indem man

$$(52) \quad \frac{D}{C} = \frac{B}{A} = k$$

setzt, bekommt man:

$$ak + b = 0,$$

und dann geben die Gleichungen (51):

$$(53) \quad a = Ag_1 = -Cg_3,$$

$$(54) \quad r^2 = (1 + k^2) \left(1 + \frac{g_1^2}{g_3^2} + g_1^2 - 2n \frac{g_1}{g_3} \right),$$

und endlich, wenn man die Ausdrücke (10) beachtet:

$$(55) \quad B = kA, \quad C = -\frac{g_1}{g_3}A = -\frac{a_2}{a_1}A, \quad D = -k\frac{g_1}{g_3}A = -k\frac{a_2}{a_1}A,$$

$$(56) \quad a = g_1A = \frac{a_1}{a_1}A, \quad b = -kg_1A = -k\frac{a_1}{a_1}A, \\ r = \pm \frac{a_2}{a_1} \sqrt{1 + k^2} \cdot A;$$

wobei A und k willkürlich bleiben.

Wenn einer von den Koeffizienten, z. B. A , gleich Null vorausgesetzt wird, so muß infolge von (46) B oder C auch gleich Null sein. Im Falle

$$A = 0, \quad C = 0$$

geben die Bedingungen (47), (48) und (51):

$$(57) \quad D = -\frac{a_2}{a_1}B,$$

$$(58) \quad a = 0, \quad b = -g_1, \quad B = -\frac{a_1}{a_1}B, \quad r = \pm \frac{a_2}{a_1}B,$$

wobei B willkürlich bleibt. Im Falle, daß

$$A = 0, \quad B = 0$$

ist, hat man:

$$\begin{aligned}\xi &= C \cos \alpha_3 + D \sin \alpha_3, \\ \eta &= -D \cos \alpha_3 + C \sin \alpha_3;\end{aligned}$$

die Koordinaten ξ, η genügen also der Gleichung des Kreises

$$\xi^2 + \eta^2 = C^2 + D^2$$

bei allen Werten von C und D . Das Zentrum dieses Kreises wird durch die Koordinaten E, E' bestimmt.

14. *Die Winkelgeschwindigkeit dieser Kreisbewegung.* Es seien ω_1 und ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Kurbeln des Kurbelvierecks; sie sind infolge der Bedingung (9) durch die Gleichung

$$\omega_3 = \frac{g_2 \sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} \omega_1$$

verbunden. Indem man dieses benützt und die Ausdrücke (55) in die Formeln (11) einführt, findet man:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} (y + k g_1 A) \omega_1, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} (x - g_1 A) \omega_1;\end{aligned}$$

und hieraus, wenn man die Formeln (56) beachtet, erhält man die gesuchte Winkelgeschwindigkeit:

$$(59) \quad \omega = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} \omega_1.$$

Wir sehen, daß diese Winkelgeschwindigkeit weder von der Lage der Grundpunkte des Systems P oder Q im Kurbelviereck, noch von der Lage des Punktes M zu diesen Grundpunkten abhängt.

Dieselbe Formel (59) bekommt man im Falle, daß $A = 0, C = 0$ ist. Wenn aber $A = 0, B = 0$ ist, so hat man:

$$\omega = \omega_1.$$

15. *Untersuchung der möglichen Fälle der Kreisbewegung.* Wir haben in § 13 folgende drei Fälle für das Bestehen einer kreislinigen verallgemeinerten Koppelkurve σ gefunden: 1) Wenn A, B, C, D alle von Null verschieden sind und die Bedingungen (55) erfüllt werden; 2) wenn $A = 0, C = 0$ ist, mit der Bedingung (57); 3) wenn $A = 0, B = 0$ ist, ohne andere Bedingungen. Diese Fälle werden wir zur Abkürzung mit (*), (**) und (***) bezeichnen. Wir wollen jetzt sehen, wieweit

diese Fälle durch die in § 2 aufgestellten Mechanismen I, II, III, IV und V verwirklicht werden können.

Vor allem, wenn wir die diesen Fällen entsprechenden Bedingungen auf das gewöhnliche Kurbelviereck anwenden, können wir uns jetzt überzeugen, daß in der Tat keine Koppelkurve einen kreisförmigen Zweig aussondern kann, natürlich die bekannten speziellen Fälle ausgeschlossen. Wenn wir aber zur verallgemeinerten Koppelkurve übergehen, finden wir folgendes.

Mechanismus I. Im Falle (*) verlangen die Bedingungen (55):

$$(60) \quad k = -tg(\varepsilon_1 - \delta_3) = -tg(\varepsilon_3 - \delta_1),$$

$$(61) \quad c_3 a_1 \sin \delta_3 \cos(\varepsilon_3 + \delta_1) + c_1 a_3 \sin \delta_1 \cos(\varepsilon_1 - \delta_3) = 0.$$

Daraus folgt:

$$c_3 a_1 \sin \delta_3 \sin(\varepsilon_3 + \delta_1) + c_1 a_3 \sin \delta_1 \sin(\varepsilon_1 - \delta_3) = 0$$

und daher:

$$(62) \quad c_3^2 a_1^2 \sin^2 \delta_3 = c_1^2 a_3^2 \sin^2 \delta_1.$$

Den Gleichungen (60) und (62) kann man auf verschiedene Weise genügen. Wenn c_1 , ε_1 , c_3 , ε_3 , d. h. die Lagen der Punkte M_1 und M_3 in den Gliedern A_1 und A_3 des Kurbelvierecks gegeben sind, so haben wir zwei Gleichungen für δ_1 und δ_3 , können also die Lage des Punktes M im Systeme P bestimmen.

Im Falle (**) haben wir anstatt (60) die Bedingungen:

$$(63) \quad \cos(\varepsilon_1 - \delta_3) = 0, \quad \cos(\varepsilon_3 + \delta_1) = 0$$

und wieder die Gleichung (62). Diesen Forderungen kann man z. B. dadurch genügen, daß man c_1 , ε_1 , ε_3 willkürlich wählt und dann aus (63) δ_1 und δ_3 und aus (62) c_3 bestimmt. Somit können jetzt bei einem gegebenen Kurbelviereck die Lagen der Grundpunkte nicht ganz willkürlich genommen werden; ist aber das getan, so müssen schon die Längen a_1 und a_3 zweier Glieder des Kurbelvierecks der Gleichung (62) entsprechend genommen werden.

Im Falle (***), wenn man in Betracht zieht, daß $k_1 = tg\delta_1$, $k_3 = tg\delta_3$ nur gleichzeitig verschwinden können (§ 3), so sind Bedingungen $A = 0$, $B = 0$ (oder auch $C = 0$, $D = 0$) nicht erfüllbar, den Fall ausgeschlossen, daß einer von den Grundpunkten des Systems P mit einem der festen Drehpunkte zusammenfällt. Im letzteren Falle aber, wenn also z. B. $c_1 = 0$ ist, kann der andere Grundpunkt, welcher im Gliede A_3 liegt, willkürlich genommen werden; alle Punkte des Systems P beschreiben dann Kreislinien, was übrigens selbstverständlich ist, da dann die Bewegung des ähnlich veränderlichen Systems eine

„einförmige“ kreislinige wird. Das Kurbelviereck spielt dann schon keine Rolle, und man kann sagen, daß in dem Sinne, wie es in § 13 verstanden wurde, der Fall (***) beim Mechanismus I nicht möglich ist.

Die Ergebnisse, welche den Fällen (*) und (**) entsprechen, kann man auch von einem anderen Standpunkte betrachten. Da das ebene ähnlich-veränderliche System vier Freiheitsgrade besitzt, so wird seine Bewegung zwangsläufig, wenn die Bahnen irgend welcher drei von seinen Punkten gegeben werden; und dann sind schon die Geschwindigkeitsverhältnisse dieser Punkte ganz bestimmte. Wenn man diese Bahnen in Form von Kreislinien wählt, so wird bei gewissen Lagen der Mittelpunkte und Größen der Radien dieser Kreise das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zweier der Kreisbewegungen in jeder Lage des Mechanismus mit demjenigen Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zusammenfallen, welches die beiden Kurbeln eines gegebenen Kurbelvierecks besitzen. Es folgt daraus, daß, wenn man im Mechanismus I den Punkt M mittelst einer hinzugefügten Kurbel in demselben Kreise führt, welchen dieser Punkt ohnedies schon beschreibt, das Glied A_2 des Kurbelvierecks aber wegnimmt, dieselbe Drehungstransformation mit dem Systeme P erreicht wird, wie sie beim gewöhnlichen Kurbelvierecke erfolgt.

Mechanismus II. Es kann leicht gezeigt werden, daß bei ihm alle drei Fälle (*), (**) und (***) bei jeder Form des Kurbelvierecks möglich sind. Wir wollen nur den letzten Fall betrachten, in welchem, wie wir oben gesehen haben, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Punkte (E, E') zusammenfällt. Nachdem man die Lagen der Punkte M_1 und M_2 im Kurbelvierecke willkürlich angenommen hat, kann man die Lage des den Kreis beschreibenden Punktes M_1 den den Bedingungen $A = 0$, $B = 0$ gemäß, aus den Formeln (29) finden, indem man k_1 und k_2 bestimmt:

$$\begin{aligned} k_1 k_2 (a_2 c_1 \sin \varepsilon_1 + a_1 c_2 \sin \varepsilon_2) + k_1 a_2 c_1 \cos \varepsilon_1 + k_2 a_1 (a_2 - c_2 \cos \varepsilon_2) &= 0, \\ k_1 k_2 [a_2 c_1 \sin \varepsilon_1 - a_1 (a_2 - c_2 \cos \varepsilon_2)] - k_1 a_2 c_1 \sin \varepsilon_1 + k_2 a_1 c_2 \sin \varepsilon_2 &= 0. \end{aligned}$$

Wir sehen also, daß die Lage des Punktes M im Systeme P von a_3 und a_4 nicht abhängt; die Formeln (29) für C , D , E , und E' zeigen außerdem, daß der Radius des Kreises von a_1 und a_4 und die Lage seines Mittelpunktes von a_1 und a_3 unabhängig ist. In der Figur 7 sin

$$c_1 = a_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{3}{2}\pi, \quad c_2 = \frac{3}{2}a_2, \quad \varepsilon_2 = 0$$

genommen, und daher

$$k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = -2, \quad a = \frac{6}{5}a_4, \quad b = -\frac{3}{5}a_4, \quad r = \frac{3}{5}\sqrt{5}a_1^1)$$

1) Man vergleiche mit der Figur 1.

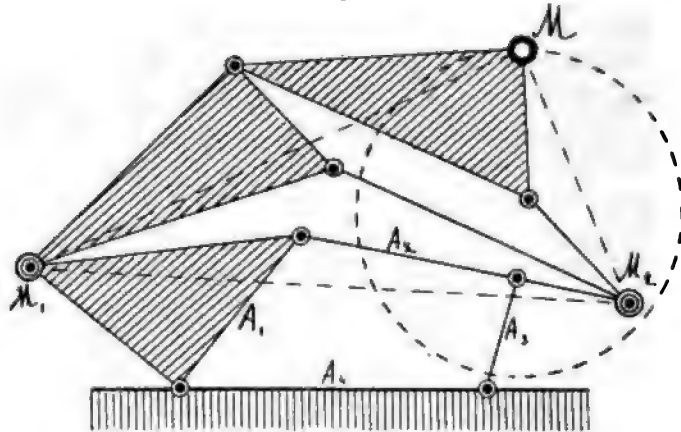
Mechanismus III. Um den Bedingungen des Falles (*) zu genügen, muß man, den Formeln (30) gemäß,

$$(64) \quad k = -tg \varepsilon_1 = -tg \varepsilon_3,$$

$$(65) \quad a_1 m_3 c_3 \pm a_3 m_1 c_1 = 0$$

nehmen. Aus der Gleichung (65) sieht man, daß es unendlich viele Punkte gibt, welche Kreislinien beschreiben, und daß diese Punkte einer Geraden liegen. Das folgt übrigens schon unmittelbar daraus, daß, wenn in einem affin-veränderlichen Systeme ein Punkt fest bleibt, alle anderen Punkte einer durch ihn gehenden Geraden ähnliche Linien beschreiben, die den festen Punkt zu ihrem gemeinsamen Ähnlichkeitspole haben. Wir finden also, daß eine solche Bewegung des affin-veränderlichen Systems möglich ist, bei welcher ein Punkt fest bleibt

Fig. 7.



alle Punkte einer ihn enthaltenden Geraden Kreise beschreiben und noch zwei andere Punkte zweien Kurbeln eines Kurbelvierecks angehören. Da ein ebenes affin-veränderliches System sechs Freiheitsgrade besitzt, so kann seine Bewegung immer auf solche Weise gegeben werden, daß einer von seinen Punkten fest bleibt und drei andere Punkte gegebene Linien beschreiben; die Geschwindigkeitsverhältnisse werden dann aber schon ganz bestimmte sein müssen. Aus dem betrachteten Falle ersehen wir aber, daß bei gewisser Wahl der Grundpunkte das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zweier von ihnen in jeder Lage des Mechanismus mit ebensolchem Verhältnisse der beiden Kurbeln eines Kurbelvierecks zusammenfallen kann.

Die Bedingungen des Falles (**) ergeben:

$$(66) \quad \cos \varepsilon_1 = 0, \quad \cos \varepsilon_3 = 0, \quad a_1 m_3 c_3 \pm a_3 m_1 c_1 = 0$$

und können auch erfüllt werden.

Die Bedingungen des Falles (***) werden erfüllt, wenn man

$$(67) \quad m_1 = 0, \quad m_3 + m_4 = 1$$

nimmt. Dieser Fall ist aber von keinem Interesse, da die Gleichung (67) die Punkte der Geraden $M_3 M_4$ bestimmt; es ist aber ohnedies klar, daß bei der Kreisbewegung des Punktes M_3 alle Punkte dieser Geraden Kreislinien beschreiben.

Beim *Mechanismus IV* kommen wir zu ähnlichen Schlüssen: auch bei ihm ist eine Kreisbewegung eines seiner Punkte möglich.

Der *Mechanismus V* läßt erst recht eine Kreisbewegung eines seiner Punkte zu. Werden fünf von den Größen $c_1, \varepsilon_1, c_2, \varepsilon_2, c_3, \varepsilon_3$ willkürlich genommen, so bestimmen die Bedingungen (55) die sechste derselben und die Parameter m_1, m_2, m_3 .

16. *Eine Beziehung zwischen dem gelenkigen Parallelogramm und Antiparallelogramm.* In § 9 wurde eine Bewegung des an ein gelenkiges Parallelogramm angeschlossenen Systems P betrachtet, bei der ein bestimmter Punkt M von P fest blieb, und in § 11 wurde eine praktische Anwendung dieser Bewegung gezeigt, welche durch das Festhalten dieses Punktes erreicht wird. Wird dieser Punkt frei gelassen, so kann das Parallelogramm in ein Antiparallelogramm übergehen, und dann setzt sich der Punkt M in Bewegung. Wir wollen zeigen, daß dann dieser Punkt einen Kreis beschreibt. Bei den Bedingungen (36):

$$(68) \quad A + C = 0, \quad B + D = 0$$

geben die Formeln (11):

$$(69) \quad \begin{aligned} x &= A(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + B(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) + E, \\ y &= -B(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + A(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) + E', \end{aligned}$$

also

$$(70) \quad (x - E)^2 + (y - E')^2 = 2(A^2 + B^2)[1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)].$$

Im Falle eines Parallelogramms oder Antiparallelogramms, da jetzt

$$g_1 = g_2 = \frac{a_2}{a_1}, \quad n = 1$$

ist, bekommt man aus (9):

$$1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{a_2}{a_1}(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Aus den Formeln (69) hat man aber:

$$(A^2 + B^2)(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = A(x - E) - B(y - E'),$$

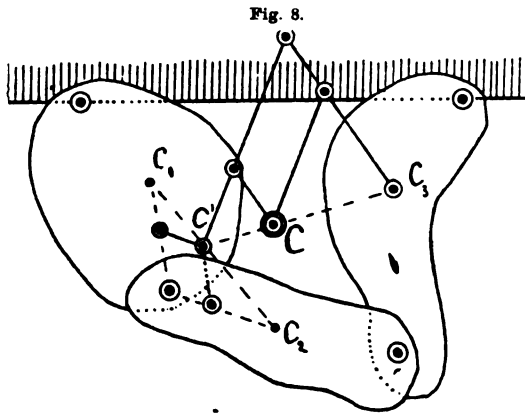
wodurch die Gleichung (70) die Form

$$(x - E)^2 + (y - E')^2 - 2\frac{a_2}{a_1}A(x - E) + 2\frac{a_2}{a_1}B(y - E') = 0$$

annimmt. Diesen Kreis beschreibt derjenige Punkt M des Systems P , dessen Koordinaten, k_1, k_2 , in diesem Systeme den Bedingungen (68) genügen, welcher also im Falle eines Parallelogramms fest bleibt (Fig. 6).

17. Andere Anwendungen der Systeme P und Q .

a) *Darstellung der Bewegung des Massenmittelpunktes eines ebenen Gelenksystems.* Aus der Eigenschaft, daß der Massenmittelpunkt zweier Körper die Entfernung zwischen den Massenmittelpunkten derselben



im konstanten Verhältnisse teilt, folgt, daß der Massenmittelpunkt C dreier Körper, deren Massenmittelpunkte C_1, C_2, C_3 sind, demjenigen affin-veränderlichen Systeme angehört, das die Punkte C_1, C_2, C_3 zu seinen Grundpunkten hat. Indem man diese Bemerkung auf ein Kurbelviereck mit einem un-

beweglichen Gliede anwendet, erhält man die Möglichkeit, durch eine Verbindung des Systems Q mit diesem Kurbelviereck die Bewegung seines Massenmittelpunktes darzustellen. Die Verbindung muß offenbar nach Art des Mechanismus V hergestellt werden. Übrigens kann man jetzt auch einfacher verfahren, indem man anstatt des Systems Q ein sechsgliedriges System gebraucht, welches aus zwei gewöhnlichen Pantographen besteht (Fig. 8), wobei zwei Glieder des Kurbelvierecks selbst als Elemente eines dieser Pantographen benützt werden können. Selbstverständlich wird dabei die Masse des hinzugefügten Systems in Vergleich mit der Masse des Kurbelvierecks vernachlässigt.

Neulich wurde von O. Fischer ein anderes Gelenksystem angegeben, um die Bewegung des Massenmittelpunktes eines Kurbelvierecks darzustellen.¹⁾ Diesem Systeme liegt der Begriff der *Hauptpunkte* des Mechanismus zu Grunde, und es enthält ebenfalls sechs Glieder.

Um die Bewegung des Massenmittelpunktes eines mehrgliedrigen Gelenksystems darzustellen, kann man sich mehrerer affin-veränderlicher Systeme bedienen. Wenn man beachtet, daß die Bewegung eines ebenen affin-veränderlichen Systems durch die Bewegung dreier seiner Punkte bestimmt wird, so kann man leicht einsehen, daß für ein Gelenksystem

1) Diese Zeitschr. Bd. 47 (1902), S. 435.

von $n > 3$ Gliedern $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ Systeme Q nötig sind, je nachdem die Zahl n eine gerade oder eine ungerade ist.

b) *Ein Fall der konformen Abbildung in der Ebene.* Jede solche konforme Abbildung in der Ebene, bei welcher jeder Kreis wieder in einen Kreis übergeht, kann bekanntlich (Satz von Liouville) aus einer Transformation durch reziproke Radienvektoren und einer Ähnlichkeitstransformation zusammengesetzt werden. Diese konforme Transformation kann also durch eine Verbindung eines Inversors mit dem Systeme P dargestellt werden. Man muß nur dazu bemerken, daß die Zahl aller möglichen konformen Abbildungen der genannten Art ∞^6 ist, während man bei dem dazu dienenden Gelenksysteme nur über vier Parameter verfügen kann, da von den vier Parametern der Ähnlichkeitstransformation — den Koordinaten des Ähnlichkeitspoles, dem Ausdehnungskoeffizienten und der Drehung, — bei dem gegebenen Mechanismus nur die ersten zwei bequem geändert werden können. Jedenfalls aber kann eine jede im voraus gegebene konforme Transformation der genannten Art durch eine Verbindung eines Inversors mit einem Systeme P verwirklicht werden.

II. Aus ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Gliedern gebildete kinematische Ketten.

1. *Freiheitsgrade solcher Ketten.* Es sei eine einfache, geschlossene kinematische Kette S gegeben, die aus n veränderlichen Gliedern A_1, A_2, \dots, A_n besteht. Von diesen Gliedern soll vorausgesetzt werden, daß jedes von ihnen, einzeln genommen, im gegebenen Raume μ Freiheitsgrade besitzt, und daß sie miteinander durch *bestimmte* kinematische Paare verbunden sind, also jedes von ihnen nur einen Freiheitsgrad in Bezug auf die Nachbarglieder hat. Wenn

$$n \geq \mu$$

und die Kette frei ist, so hat sie n Freiheitsgrade; sind aber einem ihrer Glieder $k \leq \mu$ Freiheitsgrade weggenommen, so verliert die ganze Kette ebenso viele Freiheitsgrade. Im Falle, daß

$$n = \mu + 1$$

ist und ein Glied der Kette festgehalten wird, verliert die Kette μ Freiheitsgrade, und sie wird zwangsläufig.

Diese Betrachtung wollen wir auf Ketten anwenden, deren Glieder eben ähnlich-veränderliche Systeme sind. Dann ist $\mu = 4$, und eine

Kette, die aus solchen Gliedern gebildet ist, wird zwangsläufig, wenn $n = 5$ ist und ein Glied dieser Kette festgehalten wird. Somit bekommen wir einen ebenen *Mechanismus, der aus vier beweglichen ähnlich-veränderlichen Systemen besteht*.

Dieselbe Betrachtung, wenn sie auf ebene affin-veränderliche Systeme, welche in der Ebene 6 Freiheitsgrade besitzen, angewandt wird, führt uns zu dem Schlusse, daß eine Kette, die aus 7 solchen Gliedern gebildet ist, von denen ein Glied festgehalten wird, zwangsläufig ist. Wir erhalten somit einen ebenen *Mechanismus, der aus sechs beweglichen affin-veränderlichen Gliedern besteht*.

Wenn ein oder mehrere kinematische Paare nicht mehr bestimmte Paare sind, wenn also zwei Nachbarglieder in Bezug auf einander mehr als einen Freiheitsgrad haben, so vergrößert sich entsprechender Weise die Zahl der Freiheitsgrade der ganzen Kette. Damit also diese Kette ihre Zwangsläufigkeit nicht verliert, muß die Zahl ihrer Glieder entsprechend vermindert werden. Wenn also zwei Nachbarglieder gegenseitig $1 + k$ Freiheitsgrade haben, wo wir k als einen *Überschuß* der Freiheitsgrade bezeichnen können, so ist die Zahl der Glieder einer zwangsläufigen kinematischen Kette:

$$(71) \quad n = \mu + 1 - \sum k,$$

wobei die Summe auf alle Überschüsse der Freiheitsgrade sich erstreckt.

Dieses gibt Ketten, die aus 2 oder 3 ähnlich-veränderlichen oder aus 2, 3, 4 oder 5 affin-veränderlichen Gliedern bestehen.

19. Grundlage zur Einteilung dieser Ketten. Diese Angaben führen auch zu einer natürlichen Einteilung der kinematischen Ketten (nach einem Gedanken von Reuleaux) in jedem Raume mit einer gegebenen Zahl von Freiheitsgraden. Unabhängig von der Form der kinematischen Paare, dient als erste Grundlage dazu die Zahl der Überschüsse der Freiheitsgrade in denselben; die weitere Unterordnung erfolgt dann nach der Art, wie diese Überschüsse in der kinematischen Kette verteilt sind. Indem wir dieses auf Ketten anwenden, die aus ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Gliedern gebildet werden, und diese Glieder in Form von Gelenksystemen P oder Q voraussetzen, gelangen wir zu einer Reihe neuer Mechanismen. Wenn dieselben, vielleicht mit wenigen Ausnahmen, keine praktische Bedeutung haben, — in Folge der Verwickeltheit, mit welcher diese Mechanismen durch gelenkig verbundene feste Körper gebildet werden, — so kann doch eine systematische Untersuchung derselben zu verschiedenen solchen Aufgaben über Bewegungstransformationen führen, die kaum auftreten könnten, wenn wir diese Mechanismen als kinematische Ketten mit

festen Gliedern betrachteten. Zudem würden diese Ketten, welche von dem oben gezeigten Standpunkte aus als *einfache Ketten* erscheinen, andernfalls als *zusammengesetzte Ketten* betrachtet werden müssen, und dann würde die Untersuchung derselben viel verwickelter ausfallen müssen.

20. *Einteilung der genannten Ketten.* Bei der Ausführung dieser Einteilung werden wir unter $A_i A_{i+1}$ das kinematische Paar verstehen, welches die Glieder A_i und A_{i+1} verbindet, und die Zahl der Überschüsse der Freiheitsgrade durch eine darunter gestellte Zahl angeben. Wenn n die Zahl der Glieder ist, so soll das unbewegliche Glied A_n heißen.

Kinematische Ketten, deren Glieder ähnlich-veränderliche Systeme sind.

a) Mit zwei überschüssigen Freiheitsgraden in den kinematischen Paaren — *dreigliedrige Ketten*:

	A_3	A_1	A_2	A_3
I	0	0	2	
II	0	1	1	
III	0	2	0	
IV	1	0	1	

b) Mit einem überschüssigen Freiheitsgrade oder *viergliedrige Ketten*:

	A_4	A_1	A_2	A_3	A_4
V	0	0	0	1	
VI	0	0	1	0	

c) Vollständige — *fünfgliedrige Ketten*:

	A_5	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
VII	0	0	0	0	0	

Die übrigen Fälle der Verteilung der Freiheitsgrade in den kinematischen Paaren führen zu kinematischen Ketten, welche sich von den vorhergehenden nicht wesentlich unterscheiden, da sie in Betreff der Verteilung der Freiheitsgrade zu ihnen symmetrisch sind.

Ketten, deren Glieder affin-veränderliche Systeme sind. Indem wir auf ähnliche Weise verfahren, können wir folgende Gruppen von kinematischen Ketten aufzählen, wobei wir wieder nur *wesentlich* verschiedene Verteilung von Freiheitsgraden beachten, die Überschüsse der

letzteren aber, der Kürze wegen, nicht mehr ausführlich aufschreiben wollen.

a) Vier Überschüsse	drei	Glieder	9	Fälle,
b) Drei "	vier	"	10	" ,
c) Zwei "	fünf	"	9	" ,
d) Ein "	sechs	"	3	" ,
e) Vollständige Kette	sieben	"	1	" .

Im ganzen bekommen wir also 39 wesentlich verschiedene kinematische Ketten.

Diesen Mechanismen könnte man noch solche an die Seite stellen, welche gleichzeitig ähnlich-veränderliche und affin-veränderliche Glieder enthalten, indem man sich dabei auf allgemeine Betrachtungen stützt¹⁾, welche nicht homogene Ketten betreffen, d. h. solche, deren Glieder verschiedene Zahlen von Freiheitsgraden besitzen. Wir werden uns aber damit nicht aufhalten. Was aber die oben aufgezählten Mechanismen betrifft, so werden wir nur die vier ersten, welche auch die einfachsten sind, etwas ausführlicher betrachten, um zu zeigen, wie solche Mechanismen praktisch überhaupt verwirklicht werden können.

21. Kinematische Paare dieser Ketten. Um eine kinematische Kette aus ähnlich-veränderlichen Gliedern zu bilden, kann man dazu das Gelenksystem gebrauchen, welches wir als System *P* bezeichnet haben, und ebenso für Ketten mit affin-veränderlichen Gliedern das System *Q* benutzen. Dabei entsteht aber die Frage: wie soll man die kinematischen Paare bilden, welche solche Systeme miteinander verbinden? Praktisch kann das auf dreierlei Weise getan werden: a) indem man einen Punkt zwingt eine gegebene Linie zu beschreiben, wobei *ein* Freiheitsgrad verloren geht, b) durch das Festhalten eines Punktes, unter Verlust von *zwei* Freiheitsgraden, und c) indem man für jede Lage des Systems ein bestimmtes Geschwindigkeitsverhältnis zweier seiner Punkte aufstellt, wodurch *ein* Freiheitsgrad verschwindet. Wenn ein Kettenglied an ein unbewegliches Glied angrenzt, so hat die Forderung, daß einer seiner Punkte eine gegebene dem anderen Gliede angehörende Linie beschreibt, einen bestimmten Sinn und kann mittelst eines Hilfsmechanismus verwirklicht werden; wenn aber beide Glieder beweglich sind, so ist diese Linie veränderlich, wobei sie nicht nur ihre Lage sondern auch (im ähnlich-veränderlichen Gliede) ihre Größe und (im affin-veränderlichen Gliede) sogar ihre Form wechselt. Es ist begreiflich, daß eine mechanische Verwirklichung einer solchen

1) P. Somoff, Über Freiheitsgrade kinematischer Ketten. Journ. der russ. Phys.-Chem. Ges. 1887 (russisch).

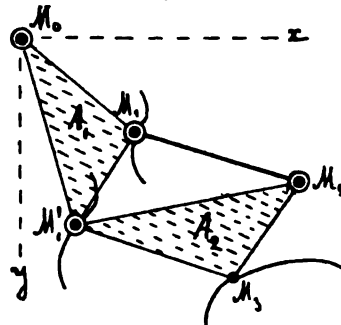
Linie überhaupt schwer zu erreichen, in einem Gelenksysteme aber, welches nur einzelne isolierte Punkte veränderlicher Systeme enthält, ganz unmöglich ist. Wir müssen daher, wenn zwei benachbarte Glieder keinen gemeinschaftlichen Punkt haben dürfen oder wenn dieses für das kinematische Paar ungenügend ist, auf eine andere Weise die Bewegung dieser Glieder gegeneinander begrenzen: wir können einen Punkt zwingen eine *unveränderliche* Linie zu beschreiben. Eine solche Linie wird nicht mehr aus denselben Punkten des veränderlichen Systems bestehen, da sie in Bezug auf dieses System veränderlich ist; es wird aber auch durch dieses Mittel ein Freiheitsgrad im kinematischen Paare und zugleich in der ganzen Kette vernichtet. Als einfachstes Mittel dieser Art werden wir weiter unten Kurbeln benutzen, deren Drehpunkte zweien veränderlichen Gliedern einer Kette angehören.

22. *Mechanismus I.* Das ähnlich-veränderliche Glied A_1 soll gegenüber dem unbeweglichen Gliede A_3 einen Freiheitsgrad behalten; am einfachsten kann das dadurch erzielt werden, daß ein Punkt M_0 des Gliedes A_3 festgehalten wird und ein anderer seiner Punkte, M_1 , eine gegebene Linie σ_1 zu beschreiben genötigt wird. Vom Gliede A_3 , welches auch nur einen Freiheitsgrad in Bezug auf A_1 haben soll, können wir voraussetzen, daß es mit A_1 einen gemeinsamen Punkt M'_1 hat und daß ein anderer Punkt von ihm, M_2 , eine bestimmte Linie im Gliede A_1 beschreibt. Anstatt dessen wollen wir aber, dem in § 21 Gesagten gemäß, die Punkte M_1 und M_2 durch eine Kurbel miteinander verbinden. Endlich, damit A_2 gegen A_3 drei Freiheitsgrade habe, muß man das Glied A_2 einer Bedingung in Bezug auf A_3 unterwerfen; wir bewirken das dadurch, daß wir einen Punkt M_3 des Gliedes A_2 auf einer gegebenen Linie σ_3 führen. Somit erhalten wir einen Mechanismus, der in Fig. 9 abgebildet ist. Die Gelenksysteme, welche die ähnlich-veränderlichen Glieder A_1 und A_2 darstellen, sind hier, wie auch weiter unten bei den übrigen Mechanismen, der Einfachheit wegen durch schraffierte Dreiecke dargestellt; in Wirklichkeit aber sind sie viergliedrige Gelenksysteme P .

Es kommt alles darauf hinaus, die Abhängigkeit der Bahn des Punktes M_2 von den gegebenen Bahnen σ_1 und σ_3 zu bestimmen. Dazu haben wir: die Gleichung der Linie σ_1 :

$$(72) \quad f_1(x_1, y_1) = 0,$$

Fig. 9.



den Zusammenhang zwischen den Koordinaten der Punkte M_1 und M'_1 :

$$(73) \quad \begin{aligned} x'_1 &= f(x_1 \cos \gamma - y_1 \sin \gamma), \\ y'_1 &= f(x_1 \sin \gamma + y_1 \cos \gamma), \end{aligned}$$

wo

$$f = \frac{M'_1 M_2}{M_1 M_2} = \text{const.}, \quad \gamma = \sphericalangle (M_1 M_2 M'_1) = \text{const.}$$

ist, die Gleichung der Linie σ_3 :

$$(74) \quad f_3(x_3, y_3) = 0,$$

die Koordinaten von M_3 in Funktion von den Koordinaten der Punkte M'_1 und M_2 nach den Formeln (6) ausgedrückt:

$$(75) \quad \begin{aligned} x_3 &= \frac{k'_1 x'_1 + k_2 x_2 + k'_1 k_2 (y'_1 - y_2)}{k'_1 + k_2}, \\ y_3 &= \frac{k'_1 y'_1 + k_2 y_2 - k'_1 k_2 (x'_1 - x_2)}{k'_1 + k_2}, \end{aligned}$$

wo

$$k'_1 = \text{tg}(M_2 M'_1 M_3), \quad k_2 = \text{tg}(M'_1 M_2 M_3)$$

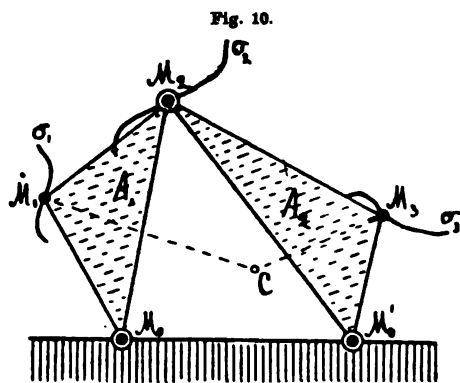
bedeutet, und endlich, da die Punkte M_1 , M_2 durch eine Kurbel von der Länge l miteinander verbunden sind,

$$(76) \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.$$

Die Bahngleichung des Punktes M_3 wird dann durch Elimination von x_1 , y_1 , x'_1 , y'_1 , x_2 , y_2 aus den sieben Gleichungen (72), (73), (74), (75) und (76) erhalten.

Wenn die Linien σ_1 und σ_2 Geraden sind, so beschreibt der Punkt M_3 eine Ellipse.

23. Mechanismus II. Die einfachste Form eines solchen Mechanismus ist die folgende (Fig. 10).



Das Glied A_1 hat einen in der Ebene festen Punkt M_0 , und ein anderer seiner Punkte, M_1 , wird genötigt eine gegebene Linie σ_1 zu beschreiben; ein dritter Punkt M_2 desselben Gliedes beschreibt dann eine Linie σ_2 , die der Linie σ_1 ähnlich ist; σ_1 und σ_2 haben dabei den Punkt M_0 zu ihrem Ähnlichkeitspole. Der Punkt M_1

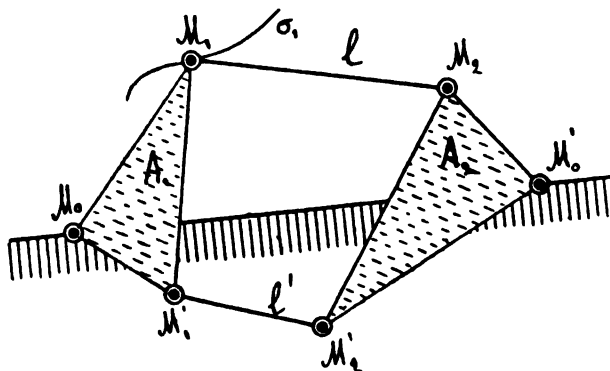
soll zugleich dem Gliede A_2 angehören, welches somit in Bezug auf A_1 zwei Freiheitsgrade behält. Es möge weiter ein Punkt M'_0

von A_1 in der Ebene fest sein, was der Voraussetzung entspricht, daß A_2 zwei Freiheitsgrade in Bezug auf A_1 besitzt. Ein dritter Punkt M_3 des Gliedes A_2 wird dann eine Linie beschreiben, welche der Linie σ_1 und folglich auch der Linie σ_2 ähnlich ist; der Ähnlichkeitspol von σ_2 und σ_3 , der Punkt M'_0 , fällt aber mit demjenigen der Linien σ_1 und σ_2 nicht zusammen. Der Ähnlichkeitspol C von σ_1 und σ_3 kann durch die bekannte Konstruktion als Durchschnittspunkt zweier Kreise gefunden werden.

Dieser Mechanismus, welcher in theoretischer Beziehung also von keinem Interesse ist, kann aber eine praktische Anwendung finden: er kann nämlich dazu dienen, eine Linie in eine ihr ähnliche zu transformieren in dem Falle, daß der Ähnlichkeitspol dieser Linien materiell nicht vorhanden ist, wenn also der gewöhnliche Pantograph oder Plagiograph nicht ausreicht. Das kommt vor, wenn das lineare Verhältnis beider Linien nur wenig von Eins verschieden ist und diese Linien parallel zu einander sind oder nur wenig von einer solchen Lage abweichen, und wenn also, in einem Mechanismus, die Geschwindigkeiten entsprechender Punkt einer ähnlichen Forderung genügen sollen.

Eine andere Form des Mechanismus II ist in der Fig. 11 abgebildet. Das Glied A_1 hat einen festen Punkt M_0 , und ein anderer Punkt von ihm,

Fig. 11.



M_1 , beschreibt eine gegebene Linie σ_1 ; A_2 hat auch einen festen Punkt M'_0 und behält gegen A_1 zwei Freiheitsgrade dadurch, daß zwei seiner Punkte, M_2 und M'_2 , mit zwei Punkten, M_1 und M'_1 , von A_1 durch feste Kur-

beln l, l' verbunden sind. Die Bewegung des Punktes M_1 wird dann in eine andere bestimmte Bewegung des Punktes M_2 transformiert. Analytische Beziehungen, welche diese Transformation bestimmen, können leicht auf dieselbe Weise zusammengestellt werden, wie es in § 22 gezeigt wurde. Es sollen nur folgende spezielle Fälle angeführt werden.

Wenn $M_0M_1 = M_0M'_1$, $M_0M_2 = M_0M'_2$ und $l = l'$ genommen ist, so beschreibt bei der Bewegung des Punktes M_1 auf einem kleinen

Kreise der Punkt M_1 in entgegengesetzter Richtung eine geschlossene Kurve vierter Ordnung, die sich nur wenig von einem Kreise unterscheidet.

Wenn der Punkt M_1 die Gerade M_0M_1 und also M'_1 die Gerade $M_0M'_1$ beschreibt, so beschreiben die Punkte M_2 und M'_2 auch gerade Linien M'_0M_2 und $M'_0M'_2$; wenn dabei die Punkte M_1, M'_1 sich dem Punkte M_0 nähern, so entfernen sich die Punkte M_2, M'_2 vom Punkte M'_0 , und umgekehrt; die Kurbeln l und l' vollführen dann elliptische Bewegungen.

24. *Mechanismus III.* Bei ihm sind die beiden Überschüsse der Freiheitsgrade in einem kinematischen Paare (A_1A_2) vereinigt, d. h. A_2

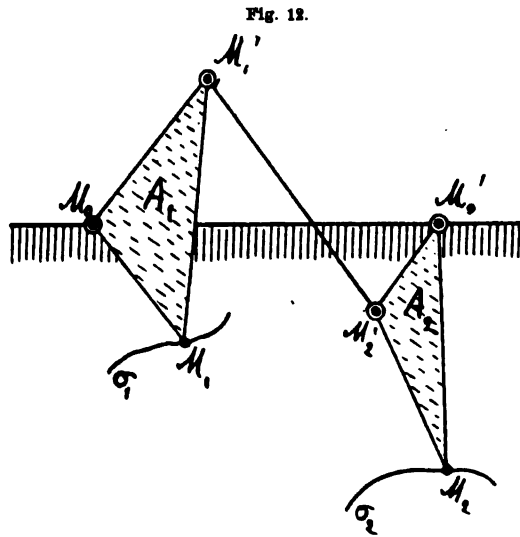


Fig. 12.

hat in Bezug auf A_1 , und umgekehrt, drei Freiheitsgrade, während die übrigen zwei Paare, (A_0A_1) und (A_2A_0), bestimmte sind. Wir werden uns wieder auf den einfachsten Fall eines solchen Mechanismus beschränken. Es sei der Punkt M_0 des Gliedes A_1 unbeweglich (Fig. 12), während ein anderer Punkt M_1 desselben eine gegebene Linie σ_1 in der festen Ebene beschreibt; ebenso soll ein Punkt M'_0 des Gliedes A_2 unbeweglich

sein und ein anderer Punkt M_2 eine gegebene Linie zu beschreiben genötigt werden. Die Punkte M'_1, M'_2 der Glieder A_1, A_2 sind durch eine Kurbel mittelst Drehpaarungen miteinander verbunden, wodurch zwei Überschüsse von Freiheitsgraden in dem kinematischen Paare (A_1A_2) übrig bleiben.

Ein solcher Mechanismus kann von Nutzen sein, wenn bei der Konstruktion eines Gelenkmechanismus auf einer Seite einer festen Ebene (z. B. auf einem Reißbrette) die festen Achsen einiger von den Gliedern des Mechanismus demselben nicht erlauben volle Umläufe auszuführen — ein Fall, welcher schon bei einem gewöhnlichen Kurbelviereck öfters vorkommt. Der betrachtete Mechanismus erlaubt ein gegebenes Gelenkssystem so in Teile zu zerlegen, daß jeder derselben seine Bewegung relativ zu den andern behält, aber dabei nicht mehr gehindert wird alle ihm geometrisch möglichen Lagen einzunehmen.

Beispielshalber wollen wir diese Bemerkung auf das Gallowaysche Kurbelviereck $B_1 B_2 B_3 B_4$ (Fig. 13) anwenden. In diesem Mechanismus sind die angrenzenden Glieder paarweise gleich, $B_1 = B_4$, $B_2 = B_3$, und das feste Glied ist das kleinere; dann dient es als ein Drehungsverdoppler. Wenn die beiden Glieder B_1 , B_2 ihre Drehpaarungen in einer und derselben Ebene enthalten, so ist eine stetige Drehung dieser Glieder nicht möglich, da es solche Lagen gibt, in welchen die Drehpaarungen dieser Bewegung hinderlich werden. Der Mechanismus III erlaubt, das Gallowaysche Kurbelviereck so zu zerlegen, daß die Glieder B_1 und B_2 vom Gliede B_3 abgetrennt sich bewegen, während die relative Bewegung aller drei Glieder dieselbe

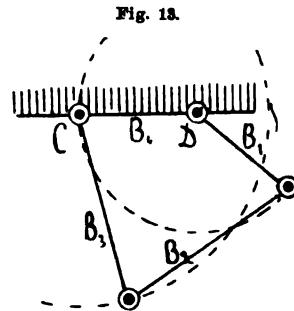
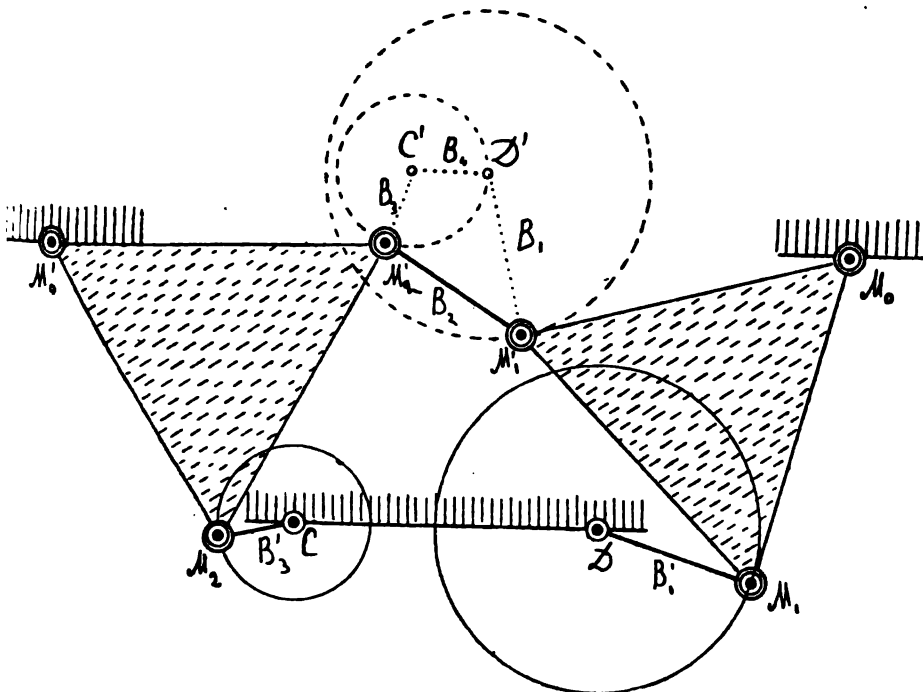


Fig. 14.



bleibt. Zu diesem Zwecke muß man die Punkte M_1 und M_2 des Mechanismus III mittelst zweier Kurbeln auf Kreisen führen (Fig. 14). Die Mittelpunkte C und D , sowie die Radien r_1 und r_2 dieser Kreise

können durch eine einfache Konstruktion so bestimmt werden, daß die Gerade $M'_1 M'_2$, deren Punkte $M'_1 M'_2$ in Folge der Ähnlichkeitstransformation ebenfalls Kreise beschreiben, eine mit dem Gliede B_2 des gegebenen Gallowayschen Kurbelvierecks identische Bewegung vollführt. In der Fig. 14 ist

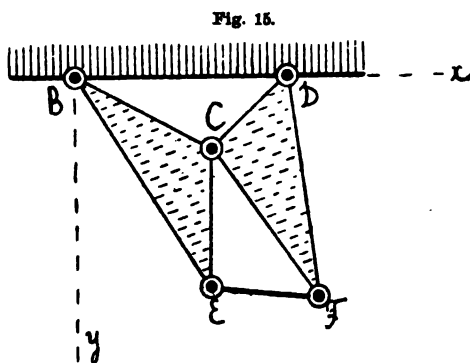
$$M_0 M_1 = M_0 M'_1, \quad M_0 M_2 = M_2 M'_2$$

genommen; dann ist

$$r_1 = B_1, \quad r_2 = B_2.$$

Natürlich müssen die beiden ähnlich-veränderlichen Dreiecke groß genug genommen werden, damit keiner von den festen Drehpunkten M_0, M'_0 den vollen Kreisbewegungen der Punkte M_1, M'_1, M_2, M'_2 hinderlich wird. Außerdem müssen die Drehpaarungen so ausgeführt sein, daß das Glied $M'_1 M'_2$ über einem der ähnlich-veränderlichen Dreiecke und unter dem anderen sich hinbewegen kann.

Das in dem obigen Beispiele gezeigte Ziel kann auch ohne ähnlich-veränderliche Systeme erreicht werden, indem man zwei gelenkige



Parallelogramme benutzt. Die Koppel eines solchen Gelenkvierecks hat bekanntlich eine fortschreitende Kreisbewegung; und man kann in den Koppeln zweier solcher Parallelogramme solche Punkte nehmen, die genügend weit entfernt von allen Drehpaarungen bleiben, und durch eine Verbindung dieser Punkte miteinander durch eine Kurbel eine solche

Bewegung für dieselbe erhalten, wie sie von der Koppel eines gegebenen Kurbelvierecks ausgeführt wird. Der Mechanismus III hat aber nicht den Nachteil, welcher beim gelenkigen Parallelogramme auftritt, daß derselbe sich in ein Antiparallelogramm verwandeln kann, und hat außerdem folgenden Vorzug: wollten wir die relativen Längen der Glieder eines Kurbelvierecks ändern, so müßte man die Lagen von vier Drehpaarungen und die Längen von vier Kurbeln der beiden Hilfsparallelogramme wechseln, während bei dem Mechanismus III die Abänderung nur von zweien, die Punkte M_1 und M_2 führenden Kurbeln genügt.

25. Mechanismus IV. Er hat einen Überschuß der Freiheitsgrade in den Paaren $(A_2 A_3)$ und $(A_3 A_1)$. Die einfachste Art eines solchen

Mechanismus erhält man, indem man je einen Punkt der Glieder A_1 und A_2 in der Ebene festhält und das kinematische Paar (A_1, A_2) so einrichtet, wie es beim Mechanismus I gezeigt wurde. Wir erhalten somit ein Gelenksystem, welches als ein Kurbelviereck $BEFDB$ (Fig. 15) betrachtet werden kann, bei dem die beiden Kurbeln durch ähnlich-veränderliche Systeme ersetzt sind und, um die dadurch er-

scheinenden zwei Überschlüsse von Freiheitsgraden zu tilgen, diese beiden Systeme noch durch eine Drehpaarung C miteinander verbunden sind. Man kann übrigens leicht einsehen, daß dann der Punkt C immer einen Kreis beschreibt. Die Koordinaten von E und F werden nämlich, nach der Eigenschaft des ähnlich-veränderlichen Systems, durch die Koordinaten von C linear ausgedrückt. Wenn wir die Koordinaten des letzteren Punktes in die Gleichung, welche die Unveränderlichkeit der Entfernung EF ausdrückt, einsetzen, so erhalten wir eine Gleichung zweiten Grades, die sich als eine Kreisgleichung erweist. Dieses

kann übrigens leicht auch auf geometrischem Wege gefunden werden.

Die Punkte E und F beschreiben Linien, die der Bahn des Punktes C ähnlich sind und zu ihren Ähnlichkeitspolen mit der letzteren die Punkte B und D haben; ihre Geschwindigkeiten sind derjenigen des Punktes C proportional; daher sind die Bahnen von E und F ebenfalls Kreise und werden mit derselben Winkelgeschwindigkeit durchlaufen. Die Radien r_1, r_2 , der von den Punkten E und F beschriebenen

Fig. 16.

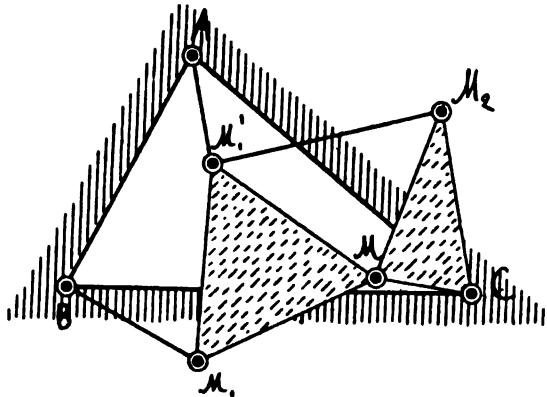
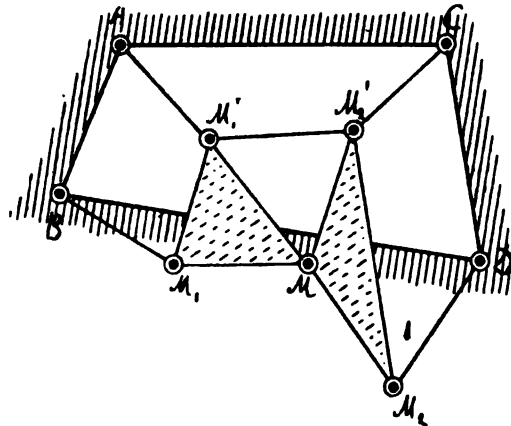


Fig. 17.



Kreise verhalten sich zum Radius des Kreises von C , wie BE zu BC und DF zu DC ; und wenn man beachtet, daß r_1 und r_2 im allgemeinen nicht gleich sind, andererseits aber die Entfernung EF konstant bleibt, so muß man daraus schließen, daß die Mittelpunkte der beiden Kreise zusammen fallen, d. h. die Gerade EF dreht sich einfach um einen festen Punkt.

26. *Abänderungen der Mechanismen I, II, III und IV.* In allen oben beschriebenen Mechanismen sind diejenigen kinematischen Paare,

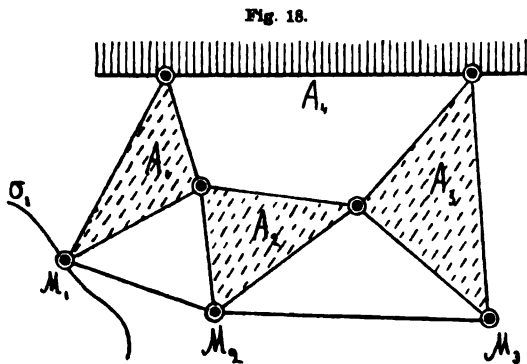


Fig. 18.

welche einen Überschuß von Freiheitsgraden enthalten und die an das unbewegliche Glied der Kette sich anschließenden Glieder mit dem letzteren verbinden, durch feste Drehpaarungen hergestellt. An Stelle dieses Bewegungszwanges kann auch ein anderer treten; z. B. kann man die For-

derung aufstellen, daß zwei Punkte eines solchen Gliedes gegebene Linien in der festen Ebene beschreiben. Werden für diese Linien Kreise genommen, so können wir, um ein kinematisches Paar mit einem

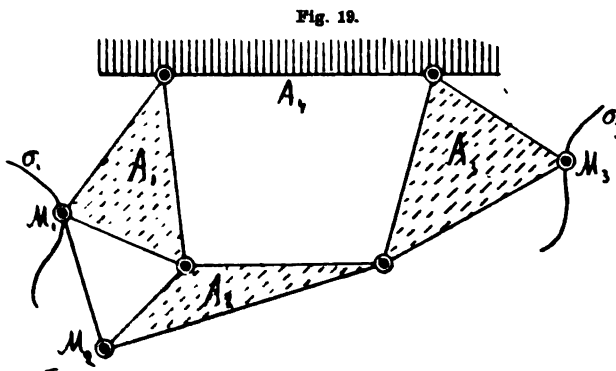


Fig. 19.

Überschusse der Freiheitsgrade zu bekommen, zwei Punkte des ähnlich-veränderlichen Gliedes durch zwei Kurbeln mit festen Drehpunkten verbinden.

Diese Abänderungen der Me-

chanismen kann man als solche kinematische Ketten betrachten, welche gelenkige Vierecke enthalten, von denen aber einige Glieder veränderlich sind.

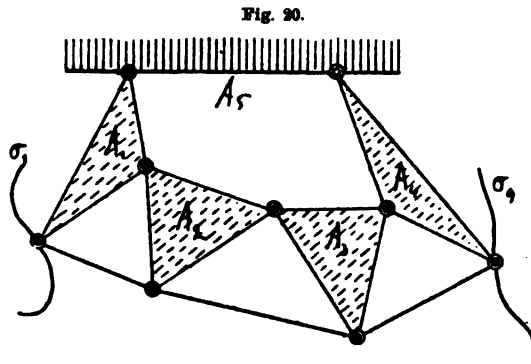
Zur Erläuterung wollen wir das Gesagte auf den Mechanismus IV anwenden. Man kann sich zwei Arten von Mechanismen mit solcher Abänderung vorstellen: 1) solche, bei denen das eine von den Paaren (A_2, A_1) , (A_2, A_3) auf diese Weise abgeändert ist, und 2) solche, bei welchen dieses in den beiden genannten Paaren geschehen ist. Das

ergibt die in den Figuren 16 und 17 abgebildeten Mechanismen. In dem ersten von ihnen haben die Vierecke:

BM_1MC zwei veränderliche Glieder,
 AM_1MC „ „ „ „
 AM_1M_1B ein veränderliches Glied,
 AM_1M_2C „ „ „ „

Der zweite Mechanismus enthält drei gelenkige Vierecke: AM_1M_1B und CM_2M_2D , in welchen das mittlere Glied veränderlich ist, und ein gewöhnliches Kurbelviereck CM_2M_1A .

27. Die Mechanismen V, VI und VII. Diese Mechanismen können auch von dem eben gezeigten Standpunkte aus betrachtet werden. Die ersten zwei derselben (Fig. 18 und 19) stellen gelenkige Vierecke mit drei veränderlichen Gliedern dar. Da ein solches Viereck, wenn seine Glieder nur durch Drehpaarungen miteinander verbunden werden, drei überschüssige Freiheitsgrade hat, so müssen dieselben getilgt werden,



was auf verschiedene Weise erreicht werden kann. Im Mechanismus V (Fig. 18) wird ein Punkt M_1 des Gliedes A_1 auf einer gegebenen Linie σ_1 geführt und die Glieder A_1 und A_2 sind mit dem Gliede A_3 durch Koppeln verbunden. Im Mechanismus VI (Fig. 19) werden die Punkte M_1 und M_2 der Glieder A_1 , A_2 genötigt, gegebene Linien zu beschreiben und die Glieder A_1 und A_2 sind durch eine Koppel verbunden.

Man kann diese drei Freiheitsgrade auch dadurch wegnehmen, daß man in jedem der Glieder A_1 , A_2 , A_3 einen Punkt in der festen Ebene auf einer gegebenen Linie führt; dadurch wird aber eine Verbindung des mittleren Gliedes A_2 mit dem festen Gliede A_4 eingeführt und die kinematische Kette hört dann auf, eine einfache Kette zu sein (§ 19).

Der Mechanismus VII stellt eine vollständige aus ähnlich-veränderlichen Gliedern gebildete Kette dar. Eine solche Kette ist in der einfachsten Form in Fig. 20 gezeichnet. Die Mannigfaltigkeit solcher Ketten wird durch die Form der vier ähnlich-veränderlichen Dreiecke, die Entfernung der festen Drehpunkte im Gliede A_5 , die Längen der Koppeln und durch die Form der führenden Linien σ_1 , σ_4 bedingt.

Über die Benennung und kinematische Unterscheidung der verschiedenen Arten von Kurvenpunkten sowie über Krümmungen und Windungen verschiedener Ordnung.

Von R. MEHMKE in Stuttgart.

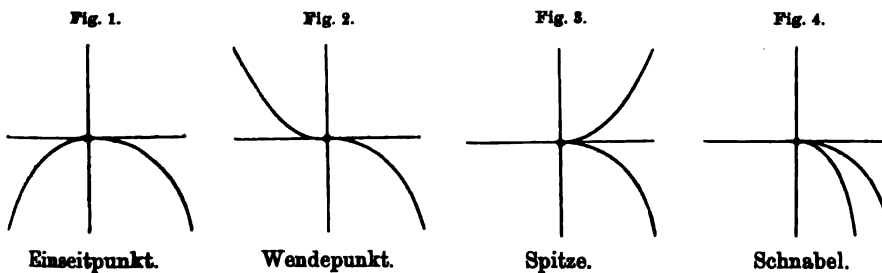
Bezüglich der singulären Punkte ebener und räumlicher Kurven hat mir die Einsichtnahme in den von Herrn v. Mangoldt verfaßten Abschnitt über die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (III, D 1, 2, insbes. Nr. 3, 19, 29) und in die einschlägigen Arbeiten, die dort wie auch in der „Allgemeinen Theorie der Kurven doppelter Krümmung“ von W. Schell (2. Aufl., Leipzig 1898, S. 13—17, 39) angeführt sind, gezeigt, daß es für die acht Hauptarten von Punkten bei Raumkurven, ja sogar für die einfachste Art von Punkten bei ebenen Kurven, zu welcher Art der gewöhnliche Kurvenpunkt gehört, an passenden Namen gänzlich fehlt. Dies veranlaßt mich, hier Namen vorzuschlagen, die ich seit etwa 20 Jahren in meinen Vorlesungen benütze und die auch die Billigung des verstorbenen Chr. Wiener, dem ich sie in den 80er Jahren mitteilte, gefunden haben. Im Streben nach einfacher und anschaulicher Darstellung und zugleich im Hinblick auf Anwendungen, die ich in späteren Veröffentlichungen zu machen beabsichtige, bediene ich mich bei den angeschlossenen analytischen Untersuchungen, deren Ergebnisse ich ebenfalls wiederholt in Vorlesungen entwickelt habe, der Ausdrucksweise der Kinematik, wenigstens des Begriffes der Geschwindigkeiten verschiedener Ordnung. Der Gedanke, die Begriffe Krümmung und Windung in der in § 8 gezeigten Weise zu verallgemeinern, auf den ich durch kinematische Fragen geführt worden bin, scheint mir auch für die reine Geometrie von Bedeutung zu sein (vgl. die Anmerkung auf S. 82). Der verallgemeinerte Krümmungsbegriff ist bereits von Herrn R. Müller, dem ich im März 1897 den fraglichen Gedanken mitgeteilt hatte, in einer kinematischen Arbeit in dieser Zeitschrift Bd. 48 (1902), S. 208—219, mit Erfolg angewendet worden.

§ 1. Namen für die vier bzw. acht Hauptarten von Punkten bei ebenen bzw. räumlichen Kurven.

Zu der Erkenntnis, daß bei den ebenen Kurven vier, bei den Raumkurven acht Hauptarten von Punkten unterschieden werden müssen, gelangt man wohl am leichtesten auf die folgende Weise. Betrachten

wir die Kurve als Bahn eines bewegten Punktes, dann können wir von der zu untersuchenden Stelle aus in zwei Richtungen, vorwärts und rückwärts, auf der Kurve weitergehen. Bei einer ebenen Kurve wird die ganze Ebene durch die zu jener Stelle gehörige Tangente der Kurve und irgend eine Sekante (z. B. die Normale) in vier Quadranten geteilt. Bezeichnet man als den ersten Quadranten immer den, in welchen man beim Vorwärtsschreiten auf der Kurve zunächst gelangt, so wird man beim Rückwärtsschreiten in irgend einen der vier Quadranten kommen, was vier Fälle gibt. Die bei einer Raumkurve möglichen acht Fälle entspringen ähnlicherweise dem Umstande, daß durch die Schmiegungelebene der Kurve, eine von ihr verschiedene, aber die Tangente enthaltende Ebene (z. B. die rektifizierende Ebene) und eine beliebige durch den Punkt gehende, die Tangente nicht enthaltende Ebene (z. B. die Normalebene) der Raum in acht Oktanten zerlegt wird.¹⁾

Was nun zuerst die Benennungen bei ebenen Kurven betrifft, so habe ich in dieser Zeitschrift Band 35 (1890), S. 4 den Namen *Einseitpunkt* für alle die Punkte vorgeschlagen, bei denen (wie beim gewöhnlichen Punkt) die Kurve in der Nähe des betreffenden Punktes, ohne hier eine Rückkehrstelle zu haben, auf einer und derselben Seite der Tangente bleibt (Fig. 1). Dieser Name sollte den Gegensatz zum *Wendepunkt* (Fig. 2) ausdrücken, bei welchem sich die Kurve von



einer Seite der Tangente nach der andern wendet — wieder ohne daß eine Rückkehrstelle vorhanden wäre. Weil mir inzwischen kein besserer, überhaupt kein anderer Name bekannt geworden ist, behalte ich denselben bei, ebenso behalte ich bei die Namen *Spitze* für den Rückkehrpunkt erster Art (Fig. 3) und *Schnabel* für den Rückkehrpunkt zweiter Art (Fig. 4), worin ich z. B. mit B. Gugler (Lehrbuch der deskriptiven Geometrie, 4. Aufl., Stuttgart 1880, S. 180) übereinstimme. Den Rück-

¹⁾ Im wesentlichen denselben Gedanken finde ich bei F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig 1902, S. 438 und 439, angewendet.

kehrpunkt zweiter Art „Schnabelspitze“ statt kurz Schnabel zu nennen, ist deshalb unzweckmäßig, weil man durch die Benützung eines zusammengesetzten Wortes in diesem einen Falle sich der Möglichkeit beraubt, für die Raumkurvenpunkte in einfacher Weise Namen zu bilden; das Wort Spitze in gleicher Bedeutung wie Rückkehrpunkt (statt nur für den Rückkehrpunkt erster Art) zu gebrauchen, was manche tun, verbietet sich nach Annahme des Wortes Schnabel von selbst.

Bezüglich der scheinbaren Gestalt einer Raumkurve in der Nähe irgend eines ihrer Punkte sind bekanntlich¹⁾ die drei Fälle zu unterscheiden, ob das Auge sich in einem beliebigen Punkte des Raumes, d. h. nicht in der zu jener Stelle gehörigen Schmiegungeebene befindet — ich spreche in diesem Falle vom *gewöhnlichen Anblick* der fraglichen Kurvenstelle — oder ob das Auge in der Schmiegungeebene liegt, aber nicht in der Tangente, oder endlich in der Tangente, in welcher letzterem Falle ich vom *Tangentenblick* der Kurvenstelle spreche. Nimmt man im Anschluß an die bekannten acht Modelle von Chr. Wiener, die (mit unwesentlichen Änderungen) in den Figuren 5—12 perspektivisch dargestellt sind, die Tangente der Kurve im betrachteten Punkt zur x -Achse, die Hauptnormale zur y -Achse, die Binormale zur z -Achse, die Grundrißtafel parallel der xy - oder Schmiegungeebene, die Aufrißtafel parallel der xz - oder rektifizierenden Ebene, die Seitenrißtafel parallel der yz - oder Normal-Ebene, dann zeigt der Grundriß den gewöhnlichen Anblick der Kurvenstelle, der Seitenriß den Tangentenblick, während der Aufriß dem Anblick der Kurvenstelle entspricht, den sie beim Betrachten aus einem beliebigen, d. h. nicht in der Tangente befindlichen Punkte der Schmiegungeebene darbietet. Ich bezeichne nun die acht Hauptarten von Raumkurvenpunkten durch zusammengesetzte Wörter, wobei mir der *gewöhnliche Anblick das Grundwort, der Tangentenblick die nähere Bestimmung* liefert. Für die Beschreibung der einzelnen Fälle ist es noch zweckdienlich, den Achsen und Tafeln die übliche Stellung zu geben, so daß die $+x$ -Achse von links nach rechts, die $+y$ -Achse von hinten nach vorn, die $+z$ -Achse von unten nach oben geht. Dann lassen sich die Oktanten durch die Beiwörter rechts bzw. links, vorn bzw. hinten, oben bzw. unten unterscheiden, oder (weniger anschaulich, aber für analytische Untersuchungen zweckmäßiger) durch die Vorzeichen der Koordinaten der in ihnen befindlichen Punkte, so daß bei x das Vorzeichen $+$ rechts bedeutet, das Vorzeichen $-$ links usw. Man erhält auf diese Weise für die acht Arten von Kurvenpunkten

1) S. z. B. H. Fine, On the singularities of curves of double curvature, Diss. Leipzig 1886 = Am. J. Math. 8 (1886), p. 156.

Zeichenverbindungen, die weder mit den von Staudt (Geometrie der Lage, S. 113f.), noch mit den von Chr. Wiener (diese Zeitschrift, Bd. 25, 1880, S. 95f.) benützten übereinstimmen, die mir jedoch für die Anwendungen am geeignetsten zu sein scheinen.

Die Kurve sei in solche Lage gebracht, daß man beim „Vorlauf“, d. h. wenn man vom betrachteten Punkt aus in der Kurve vorwärts schreitet, in den Oktanten rechts-vorn-oben (+ + +) kommt. Als

1. Fall werde der untersucht, in welchem der „Rücklauf“ in den Oktanten links-vorn-unten (— + —) führt (s. Fig. 5). Der (nach dem Obigen aus dem Grundriß zu ersiehende) gewöhnliche Anblick ist hier der eines Einseitpunktes, denn im Grundriß haben wir beim Rücklauf eine Bewegung nach links vorn. Der Tangentenanblick — nach dem Früheren aus dem Seitenriß zu erkennen — ist der einer Spitze, weil

Fig. 5.

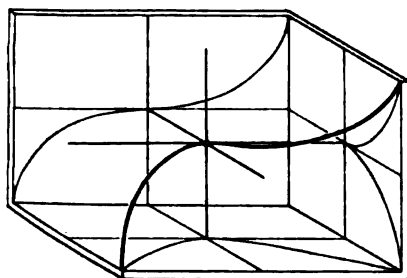
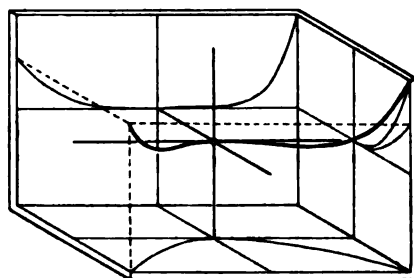


Fig. 6.



(— + —). Spitzeneinseitpunkt.

(— + +). Schnabeleinseitpunkt.

die Kurve im Seitenriß beim Rücklauf nach vorn unten geht. Daher ist gemäß den oben für die Namengebung aufgestellten Grundsätzen hier von einem *Spitzeneinseitpunkt* zu sprechen. Wie der Aufriß zeigt, erblickt man beim Betrachten der Kurvenstelle aus einem nicht in der Tangente befindlichen Punkt der Schmiegungeebene einen scheinbaren Wendepunkt. Zu diesem Fall gehören außer dem gewöhnlichen Kurvenpunkt noch zahlreiche singuläre Punkte (s. § 6), weshalb es nicht angeht, einen Spitzeneinseitpunkt schlechtweg als gewöhnlichen oder regulären Kurvenpunkt zu bezeichnen, wie das häufig geschieht.

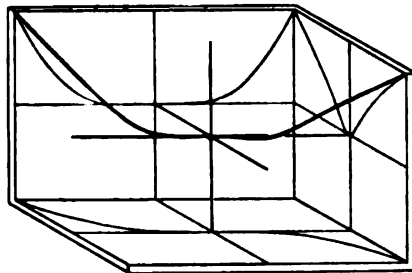
2. Fall: Rücklauf nach links vorn oben (— + +) (s. Fig. 6). Gewöhnlicher Anblick der eines Einseitpunktes, Tangentenanblick der eines Schnabels, folglich: *Schnabeleinseitpunkt*. Erscheint von der Schmiegungeebene (nicht Tangente) aus gesehen als Einseitpunkt.

3. Fall: Rücklauf nach links hinten oben (— — +) (s. Fig. 7). Gewöhnlicher Anblick: Wendepunkt; Tangentenanblick: Einseitpunkt, deshalb *Einseitwendepunkt*. Dieser Name paßt in sofern recht gut,

als die Kurve auf einer und derselben Seite der Schmiegungeebene bleibt. Erscheint von der Schmiegungeebene aus gesehen als Einseitpunkt.

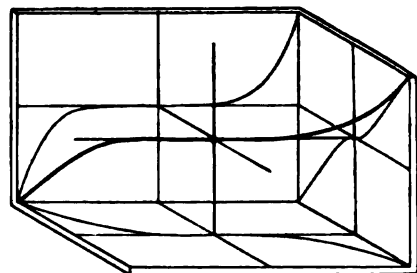
4. Fall: Rücklauf nach links hinten unten (— — —) (s. Fig. 8). Dieser Fall ist dadurch ausgezeichnet, daß der Punkt unabhängig von der Lage des Auges immer als Wendepunkt erscheint. Ich gebe ihm

Fig. 7.



(— — +). Einseitwendepunkt.

Fig. 8.

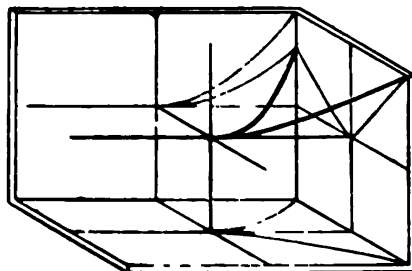


(— — —). Echter Wendepunkt.

deshalb den Namen *echter Wendepunkt*, statt „Wende-Wendepunkt“, wie er in Befolgung des früheren Grundsatzes eigentlich zu nennen wäre.

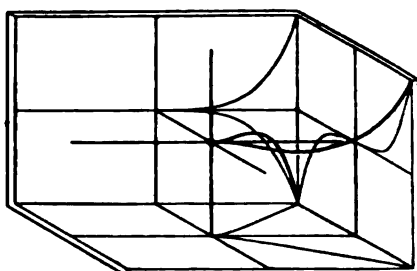
5. Fall: Rücklauf nach rechts hinten oben (+ — +) (s. Fig. 9). Gewöhnlicher Anblick: Spitze; Tangentenblick: Einseitpunkt, folglich

Fig. 9.



(— — +). Einseitspitze.

Fig. 10.



(— — —). Wendespitze.

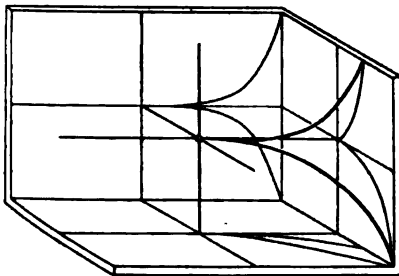
Kinseitspitzer, ein die Sache treffender Name, da die Spitze auf einer und derselben Seite der Schmiegungeebene liegt. Erscheint von der Schmiegungeebene aus gesehen als Schnabel.

6. Fall: Rücklauf nach rechts hinten unten (+ — —) (s. Fig. 10). Gewöhnlicher Anblick: Spitze; Tangentenblick: Wendepunkt, somit *Wendespitze*; in Übereinstimmung damit, daß die Spitze sich von einer Seite der Schmiegungeebene nach der andern wendet. Erscheint aus einem beliebigen Punkt der Schmiegungeebene betrachtet als Spitze.

7. Fall: Rücklauf nach rechts vorn unten $(+ + -)$ (s. Fig. 11).
Gewöhnlicher Anblick: Schnabel; Tangentenanblick: Spitze; deshalb
Spitzenschnabel. Anblick aus einem beliebigen Punkt der Schmiegun-
geebene: Spitze.

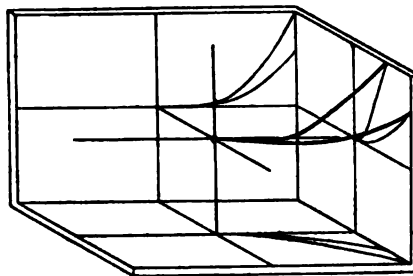
8. Fall: Rücklauf nach rechts vorn oben $(+ + +)$ (s. Fig. 12).
Dieser Fall zeichnet sich wie der vierte dadurch aus, daß immer der-

Fig. 11.



$(+ + -)$. Spitzenschnabel.

Fig. 12.



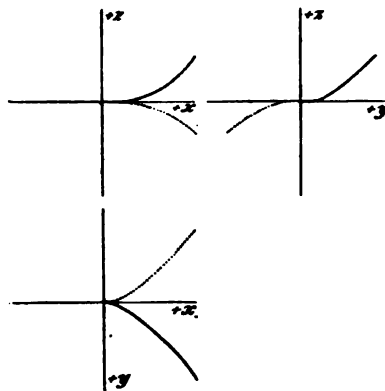
$(+ + +)$. Echter Schnabel.

selbe Anblick sich darbietet, nämlich der eines Schnabels, wo auch
das Auge sich befinden mag. Ich wähle deshalb den Namen *echter*
Schnabel (statt „Schnabel-Schnabel“).

Diese Zusammenstellung hat gezeigt, daß es bei den Raumkurven je
zwei Arten von Einseitpunkten, Wendepunkten, Spitzen und Schnäbeln gibt.

Es ist beachtenswert, daß die Gestalt eines Raumkurvenpunktes
aus dem Namen mit Sicherheit abgeleitet werden kann. Nehmen wir
zum Beispiel die Wendespitze. Man
zeichne zuerst (s. Fig. 13) im Grund-,
Auf- und Seitenriß die Koordinaten-
achsen und den vorwärtslaufenden
Teil der Kurve — in der Figur
voll ausgezogen — der immer nach
rechts vorn oben gehen und im
Grund- und Aufriß die x -Achse, im
Seitenriß die y -Achse berühren muß.
Nun zeichne man den rückwärts-
laufenden Kurventeil (in der Figur
punktirt) so ein, daß er mit dem
vorwärtslaufenden Teil gemeinsame
Tangente erhält und daß im Grundriß
dem gewöhnlichen Anblick entsprechend eine Spitze, im Seitenriß dem
Tangentenanblick entsprechend ein Wendepunkt entsteht. Man sieht

Fig. 13.



dann aus diesen beiden Rissen, daß man beim Rücklauf in den Oktanten rechts hinten unten kommt, wonach sich der Aufriß ergänzen läßt.

Den Figuren 5—13 ist ein linkshändiges (französisches) Koordinatensystem zu Grunde gelegt. Wählte man statt dessen ein rechtshändiges (englisches) Koordinatensystem, so würde jede der dargestellten Formen sich in ihr Spiegelbild bezüglich der xy -Ebene verwandeln. Diese neuen Formen sind jedoch als nicht wesentlich verschieden von den ursprünglichen anzusehen.

§ 2. Analytische Kennzeichen der verschiedenen Arten von Kurvenpunkten.

Es bezeichne p einen beweglichen Punkt, der eine beliebige Kurve beschreibt, und zugleich die Lage des Punktes, in deren Nähe die Gestalt seiner Bahn untersucht werden soll. Betrachten wir p im Sinne von Möbius und Grassmann als Punkt mit der unveränderlichen Masse 1, dann stellt bekanntlich

$$p' = \frac{dp}{dt}$$

die Geschwindigkeit von p nach Größe und Richtung, d. h. als Vektor dar, ebenso

$$p'' = \frac{d^2p}{dt^2}$$

die als Vektor aufgefaßte Beschleunigung oder Geschwindigkeit 2. Ordnung, allgemein

$$p^{(n)} = \frac{d^n p}{dt^n}$$

seine Geschwindigkeit n -ter Ordnung.¹⁾ Wir setzen die Geschwindigkeiten aller Ordnungen als vorhanden und stetig voraus. Jedoch seien im Zeitpunkt t , welchem die Lage p entspricht, beliebig viele der Geschwindigkeiten gleich Null, und die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung, welche nicht Null ist, habe die Ordnung α . Dann ist, wenn p_1 die dem Zeitpunkt $(t + \Delta t)$ entsprechende Lage des bewegten Punktes vorstellt, nach dem Taylorschen Satze:

$$p_1 = p + \frac{\Delta t^\alpha}{\alpha!} \cdot p^{(\alpha)} + \frac{\Delta t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} p^{(\alpha+1)} + \dots,$$

1) Dasselbe würde gelten, wenn p den Träger des bewegten Punktes in Bezug auf einen beliebigen festen Ursprung, d. h. den Vektor bezeichnete, der seinen Anfangspunkt im Ursprung, seinen Endpunkt im bewegten Punkt hat.

2) Das $+$ bedeutet natürlich geometrische Addition. Nach Grassmann ist die Summe eines Punktes von der Masse 1 und eines Vektors derjenige Punkt von der Masse 1, der durch Verschiebung des gegebenen Punktes um den gegebenen Vektor entsteht.

folglich

$$\frac{\alpha!}{\Delta t^\alpha} (p_1 - p) = p^{(\alpha)} + \frac{\Delta t}{\alpha+1} p^{(\alpha+1)} \dots$$

In dieser Gleichung steht links ein mit der Sehne pp_1 paralleler Vektor.¹⁾ Läßt man den absoluten Wert von Δt unbegrenzt abnehmen, so nähert sich die Gerade pp_1 unbegrenzt der Bahntangente in p , also die linke Seite einem zur Tangente parallelen Vektor, während die rechte Seite den Vektor $p^{(\alpha)}$ zur Grenze hat. *Daher wird die Richtung der Bahntangente im Punkte p durch die Richtung des Vektors $p^{(\alpha)}$, d. h. durch die Richtung der Geschwindigkeit niedrigster Ordnung angegeben, die an jener Stelle nicht Null ist.²⁾*

Von den auf $p^{(\alpha)}$ folgenden Geschwindigkeiten $p^{(\alpha+1)}$ usw. können beliebig viele parallel zu $p^{(\alpha)}$ sein.³⁾ Die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung, welche nicht parallel zu $p^{(\alpha)}$ ist, habe die Ordnung β . Dann liegt der Punkt

$$q = p + \frac{\Delta t^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{\Delta t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} + \dots + \frac{\Delta t^{\beta-1}}{(\beta-1)!} p^{(\beta-1)}$$

offenbar auf der zur Stelle p gehörigen Bahntangente, und folglich ist

$$\frac{\beta!}{\Delta t^\beta} (p_1 - q) = p^{(\beta)} + \frac{\Delta t}{\beta+1} p^{(\beta+1)} + \dots$$

ein Vektor, der zur Geraden qp_1 , also auch zur Verbindungsebene der Bahntangente mit dem Punkte p_1 parallel ist. Geht man wieder zur Grenze $\Delta t = 0$ über, so verwandelt sich diese Ebene in die Schmiegungebene der Bahn im Punkte p , während die rechte Seite der vorhergehenden Gleichung den Grenzwert $p^{(\beta)}$ annimmt. *Somit ist die Schmiegungebene der Bahn im Punkte p parallel dem Vektor*

$$p^{(\beta)} = \frac{d^\beta p}{dt^\beta}$$

d. h. parallel der Geschwindigkeit niedrigster Ordnung von p , die nicht parallel zur Bahntangente ist.

Durch die beiden Geschwindigkeiten $p^{(\alpha)}$ und $p^{(\beta)}$ ist die Schmiegungebene der Bahn im Punkte p bestimmt. Von den auf $p^{(\beta)}$ folgenden Geschwindigkeiten $p^{(\beta+1)}$ u. s. w. können beliebig viele parallel zur Schmiegungebene sein. Die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung,

1) Nach Grassmann ist die Punktdifferenz $(p_1 - p)$ gleich dem von p nach p_1 gehenden Vektor. (S. auch Anm. 3.)

2) Vgl. diese Zeitschrift, Bd. 35 (1890), S. 3.

3) Parallel nennen wir nicht nur Vektoren gleicher Richtung, sondern auch entgegengesetzter Richtung.

welche nicht parallel zur Schmiegungeebene ist, habe die Ordnung γ . Wir schreiben die frühere Gleichung für p_1 jetzt so:

$$\begin{aligned} p_1 - p &= \frac{\Delta t^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{\Delta t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} p^{(\alpha+1)} + \dots \\ &+ \frac{\Delta t^\beta}{\beta!} p^{(\beta)} + \frac{\Delta t^{\beta+1}}{(\beta+1)!} p^{(\beta+1)} + \dots \\ &+ \frac{\Delta t^\gamma}{\gamma!} p^{(\gamma)} + \dots \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung stehen in der ersten Reihe lauter Vektoren, die zur Tangente parallel sind, in der zweiten Reihe lauter zur Schmiegungeebene parallele Vektoren. Wir denken uns p_1 so nahe bei p , d. h. Δt so klein genommen, daß in jeder der drei Reihen das erste Glied die Summe der folgenden überwiegt oder die Gleichung näherungsweise geschrieben werden kann:

$$p_1 - p = \frac{\Delta t^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{\Delta t^\beta}{\beta!} p^{(\beta)} + \frac{\Delta t^\gamma}{\gamma!} p^{(\gamma)}.$$

Der Vektor pp_1 erscheint hier in drei Komponenten zerlegt, die den Geschwindigkeiten der Ordnungen α , β , γ parallel sind, und zwar wird z. B. die erste Komponente gleiche Richtung haben wie $p^{(\alpha)}$, oder aber die umgekehrte Richtung, je nachdem Δt^α positiv oder negativ ist. Die einer Zunahme von t entsprechende Bewegungsrichtung gelte als Vorlauf. Ihm entspricht ein positiver Wert von Δt , etwa

$$\Delta t = +\tau,$$

womit man

$$p_1 - p = \frac{\tau^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{\tau^\beta}{\beta!} p^{(\beta)} + \frac{\tau^\gamma}{\gamma!} p^{(\gamma)}$$

erhält. Die Komponenten des Vektors pp_1 sind jetzt wegen der positiven Zahlfactoren gleichgerichtet mit den Vektoren $p^{(\alpha)}$, $p^{(\beta)}$, $p^{(\gamma)}$, oder wenn man sich diese Vektoren von p ausgehend denkt, so muß p_1 in dem von ihnen eingeschlossenen Oktanten liegen. Mit anderen Worten: *Beim Vorlauf kommt man in den Raum, der von den als Vektoren betrachteten und an p angetragenen Geschwindigkeiten $p^{(\alpha)}$, $p^{(\beta)}$, $p^{(\gamma)}$ der Ordnungen α , β , γ eingeschlossen wird.*

Der rückläufigen Bewegung entspricht eine Abnahme von t oder ein negatives Δt . Sei

$$\Delta t = -\tau,$$

dann wird

$$p_1 - p = \frac{\tau^\alpha}{\alpha!} (-1)^\alpha p^{(\alpha)} + \frac{\tau^\beta}{\beta!} (-1)^\beta p^{(\beta)} + \frac{\tau^\gamma}{\gamma!} (-1)^\gamma p^{(\gamma)}.$$

Daraus folgt: *Beim Rücklauf kommt man in den von den Vektoren $(-1)^\alpha p^{(\alpha)}$, $(-1)^\beta p^{(\beta)}$, $(-1)^\gamma p^{(\gamma)}$ eingeschlossenen Raum.*

Die Faktoren $(-1)^\alpha$, $(-1)^\beta$, $(-1)^\gamma$ haben den Wert $+1$ oder -1 , je nachdem die (ihrer Natur nach positiven ganzen) Zahlen α , β , γ gerade oder ungerade sind. Es genügt also, *der Reihe nach für jede der Zahlen α , β , γ $+$ oder $-$ zu setzen, je nachdem sie gerade oder ungerade ist, und die erhaltene Zeichenverbindung mit den unter den Figuren 5—12 stehenden zu vergleichen, um zu erkennen, zu welcher der acht Hauptarten von Kurvenpunkten der untersuchte Bahnpunkt gehört.*

Je nachdem die Vektoren $p^{(\alpha)}$, $p^{(\beta)}$, $p^{(\gamma)}$ zu einander liegen, wie die $+x$ -, $+y$ -, $+z$ -Achse eines linkshändigen oder eines rechtshändigen Koordinatensystems, wird es sich unmittelbar um die in den genannten Figuren dargestellten Formen oder um ihre Spiegelbilder in Bezug auf eine wagerechte Ebene handeln.

Die wichtigen Zahlen α , β , γ haben übrigens auch eine einfache rein geometrische Bedeutung: *Es ist α die Zahl derjenigen Schnittpunkte einer beliebigen durch p gelegten, die Kurventangente nicht enthaltenden Ebene mit der Kurve, die man sich in p zusammengefallen zu denken hat, β die entsprechende Zahl für eine beliebige durch die Tangente gelegte, aber von der Schmiegungeebene verschiedene Ebene, γ die entsprechende Zahl für die Schmiegungeebene.¹⁾ Der Beweis ist auf verschiedene Art leicht zu erbringen.²⁾*

Bei einem gewöhnlichen Kurvenpunkt hat man $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$. Jeder Punkt, für den $\gamma > 3$ ist, soll ein singulärer Punkt heißen. Zur Abkürzung werde die Zahlenverbindung (α, β, γ) das *Zeichen des Kurvenpunktes* genannt.

1) Es stimmen also die Zahlen α , β , γ mit den Zahlen l , m , n in Björlings Arbeit, Arch. M. Ph. (2) 8 (1890), S. 83, überein.

2) Z. B., da nach Grassmann die Bedingung für das Vereinigtliegen eines Punktes und einer Ebene das Verschwinden ihres äußeren Produktes ist, werden die Schnittpunkte einer durch p gehenden Ebene ε mit der Kurve durch die Wurzeln folgender Gleichung in Δt geliefert:

$$0 = [p_1 \varepsilon] = \frac{\Delta t^\alpha}{\alpha!} [p^{(\alpha)} \varepsilon] + \dots + \frac{\Delta t^\beta}{\beta!} [p^{(\beta)} \varepsilon] + \dots + \frac{\Delta t^\gamma}{\gamma!} [p^{(\gamma)} \varepsilon] + \dots$$

Die dem Punkte p entsprechende Wurzel $\Delta t = 0$ ist augenscheinlich α -fach, oder β -fach, oder γ -fach, je nachdem die Ebene ε die Tangente nicht enthält: $[p^{(\alpha)} \varepsilon] \geq 0$, oder die Tangente enthält und von der Schmiegungeebene verschieden ist:

$$[p^{(\alpha)} \varepsilon] = 0, \dots [p^{(\beta-1)} \varepsilon] = 0, \quad [p^{(\beta)} \varepsilon] \geq 0,$$

oder mit der Schmiegungeebene zusammenfällt:

$$[p^{(\alpha)} \varepsilon] = 0, \dots [p^{(\beta-1)} \varepsilon] = 0, \quad [p^{(\beta)} \varepsilon] = 0, \dots [p^{(\gamma-1)} \varepsilon] = 0, \quad [p^{(\gamma)} \varepsilon] \geq 0.$$

§ 3. Beispiele.

Zur Erläuterung der gewonnenen Ergebnisse mögen folgende Beispiele dienen. Bei der Bewegung eines starren räumlichen Systems ist bekanntlich im allgemeinen kein Punkt in Ruhe, also für jeden Systempunkt $\alpha = 1$. Es gibt aber in jedem Augenblick unendlich viele Systempunkte — sie erfüllen eine Fläche dritter Ordnung F^3 — deren Bahnen vierpunktig berührende Schmiegungsebenen besitzen, für die also $\gamma = 4$ ist.¹⁾ Alle Punkte dieser Fläche, bei denen die Geschwindigkeit und die Beschleunigung nicht parallel sind, also $\beta = 2$ ist und bei denen auch die Geschwindigkeit vierter Ordnung nicht parallel zur Schmiegungsebene, d. h. γ nicht größer als 4 ist, beschreiben deshalb augenblicklich Bahnstellen mit dem Zeichen $(1, 2, 4)$, d. h. Schnabeleinseitpunkte (s. Fig. 6). Die Schmiegungsebene ist bei ihnen der Beschleunigung parallel, gerade wie bei den gewöhnlichen Bahnstellen, die von den außerhalb F^3 liegenden Systempunkten beschrieben werden. Nun liegt auf der Fläche F^3 die sog. Wendekurve i^3 , eine Raumkurve dritter Ordnung, bei deren sämtlichen Punkten Geschwindigkeit und Beschleunigung parallel sind, also $\beta = 3$ ist, falls nicht etwa die Geschwindigkeiten erster und dritter Ordnung auch parallel sind. Die Punkte dieser Kurve durchlaufen demnach, worauf ihr Name hinweist, für gewöhnlich Wendepunkte in ihren Bahnen, aber es gibt nach § 1 zwei gestaltlich ganz verschiedene Arten von Wendepunkten, und es fehlt in der kinematischen Literatur jede Angabe über die wirkliche Gestalt der hier auftretenden Wendepunkte. Bis auf die gleich zu besprechenden Ausnahmepunkte werden von den Punkten der Wendekurve augenblicklich Bahnstellen mit dem Zeichen $(1, 3, 4)$, d. h. Einseitwendepunkte (Fig. 7) erzeugt. Die Schmiegungsebene ist jedesmal zu den Geschwindigkeiten erster und dritter Ordnung parallel. Nun enthält die Wendekurve im allgemeinen auch eine endliche Zahl von Punkten, bei denen die Geschwindigkeit vierter Ordnung, aber nicht diejenige fünfter Ordnung, zur Schmiegungsebene parallel, also $\gamma = 5$ ist. Diese Punkte beschreiben Bahnstellen mit dem Zeichen $(1, 3, 5)$, also echte Wendepunkte (Fig. 8). Es ist nämlich, wie ohne Beweis angeführt sei, der Ort der Systempunkte, bei denen augenblicklich die Geschwindigkeiten von den Ordnungen κ, λ, μ einer und derselben Ebene parallel sind, eine Fläche dritter Ordnung $\Phi_{\kappa, \lambda, \mu}^3$, einem Schnittpunkte der Wendekurve mit der Fläche $\Phi_{1, 3, 4}$ kommt deshalb

1) Vgl. etwa, auch zum Folgenden, A. Schönflies, Geometrie der Bewegung Leipzig 1886, §§ 8 und 9.

2) Es ist F^3 selbst eine der Flächen Φ , nämlich $\Phi_{1, 3, 4}$.

im allgemeinen die fragliche Ausnahmestellung zu. Auf der Fläche F^3 befindet sich ferner eine Raumkurve sechster Ordnung c^6 , deren Punkte Bahnen mit fünfpunktig berührender Schmiegungeebene besitzen ($\gamma = 5$). Diese Punkte durchlaufen daher im allgemeinen Bahnstellen mit dem Zeichen (1, 2, 5); es sind dies Spitzeneinseitpunkte, die sich von den gewöhnlichen Punkten im Aussehen wenig unterscheiden (vgl. auch § 9).

§ 4. Ausdruck für die Krümmung und mögliche Werte derselben.

Es werde nun der Punkt p_1 unendlich nahe bei p angenommen und dt für Δt geschrieben. Aus § 2 übernehmen wir die Gleichung für $(p_1 - p)$, nämlich:

$$(1) \quad p_1 - p = \frac{dt^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{dt^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} p^{(\alpha+1)} + \dots \\ + \frac{d\vartheta^\beta}{\beta!} p^{(\beta)} + \dots$$

Für das Bogenelement ds können wir die Länge der Sehne, d. h. des Vektors pp_1 nehmen, der die linke Seite von Gleichung (1) bildet. Bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung ist dieselbe gleich der Länge des ersten Gliedes der rechten Seite von (1), des Vektors $\frac{dt^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)}$. Man hat folglich, wenn allgemein die Größe der Geschwindigkeit n ter Ordnung, d. h. die Länge des Vektors $p^{(n)}$, mit v_n bezeichnet wird:

$$(2) \quad ds = \frac{dt^\alpha}{\alpha!} v_\alpha.$$

Die Tangente in p_1 ist parallel der Geschwindigkeit p'_1 dieses Punktes. Mit Hilfe des Taylorschen Satzes erhält man, da p_1 dem Zeitpunkte $(t + dt)$ entspricht und die Vektoren $p', p'', \dots p^{(\alpha-1)}$ verschwinden:

$$(3) \quad p'_1 = \frac{dt^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} p^{(\alpha)} + \dots + \frac{d\vartheta^{\beta-1}}{(\beta-1)!} p^{(\beta)} + \dots$$

Der sog. Kontingenzwinkel, der spitze Winkel zwischen den Tangenten in p und p_1 , werde mit $d\varphi$ bezeichnet. Er ist gleich dem Winkel, den der Vektor p'_1 mit der Kurventangente in p einschließt und läßt sich mit Hilfe der senkrechten Projektion dieses Vektors auf die Hauptnormale in p bestimmen, welche Projektion gleich dem Produkt aus $d\varphi$ und der Länge des genannten Vektors ist. Die Länge von p'_1 ist bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung gleich der Länge des ersten Gliedes der rechten Seite von (3), d. i.

$$\frac{dt^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} v_\alpha.$$

Andererseits ist die Projektion von p'_1 auf die Hauptnormale gleich der Summe der Projektionen der auf der rechten Seite von (3) stehenden Glieder, oder, weil die Glieder mit Exponenten kleiner als β Vektoren parallel zur Tangente vorstellen und folglich zur Projektion keinen Beitrag liefern, wird bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung die fragliche Projektion auch gleich

$$\frac{dt^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \bar{v}_\beta,$$

wenn man allgemein die Projektion der Geschwindigkeit n ter Ordnung auf die Hauptnormale mit \bar{v}_n bezeichnet. Also hat man

$$d\varphi \frac{dt^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} v_\alpha = \frac{dt^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \bar{v}_\beta$$

oder

$$(4) \quad d\varphi = dt^{\beta-\alpha} \frac{(\alpha-1)!}{(\beta-1)!} \frac{\bar{v}_\beta}{v_\alpha}.$$

Demnach ergibt sich für die Krümmung $k = \frac{d\varphi}{ds}$ der Kurve im Punkte p zunächst

$$k = \frac{\alpha! (\alpha-1)!}{(\beta-1)!} \frac{\bar{v}_\beta}{v_\alpha^2} \lim_{dt=0} dt^{\beta-2\alpha}.$$

Wie man sieht, erhält die Krümmung bloß unter der Bedingung

$$2\alpha = \beta$$

einen endlichen, von Null verschiedenen Wert, nämlich

$$(5) \quad k = \frac{\alpha! (\alpha-1)!}{(\beta-1)!} \frac{\bar{v}_\beta}{v_\alpha^2},$$

während

$$k = 0 \quad \text{wird für } 2\alpha < \beta \text{ und}$$

$$k = \infty \quad \text{,, , } 2\alpha > \beta.$$

1) Eine leichte Umformung ergibt für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{(2\alpha)!}{2(\alpha!)^2} \frac{v_\alpha^2}{\bar{v}_{2\alpha}},$$

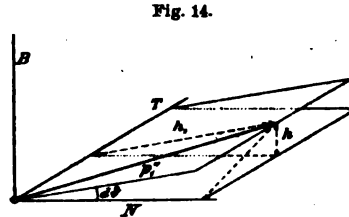
in Übereinstimmung mit der in dieser Zeitschrift Bd. 35 (1890), S. 5 für die Bewegung in der Ebene auf andere Weise abgeleiteten Formel (7). Im Fall eines gewöhnlichen Bahnpunktes, $\alpha = 1$, kommt man zu der allbekannten Beziehung

$$\bar{v}_2 = \frac{v_1^2}{\rho}.$$

Die Gleichung $2\alpha = \beta$ erfordert, daß β eine gerade Zahl sei, was nur bei Einseitpunkten und Schnäbeln zutrifft. Hiernach ist eine endliche, von Null verschiedene Krümmung bloß in Einseitpunkten (Fig. 5 und 6) und Schnäbeln (Fig. 11 und 12) möglich, während in einem Wendepunkte (Fig. 7 und 8) und in einer Spitze (Fig. 9 und 10) die Krümmung bloß einen der beiden Werte Null und Unendlich haben kann.¹⁾

§ 5. Ausdruck für die Windung und mögliche Werte derselben.

Um die Windung w der Kurve im Punkte p berechnen zu können, haben wir den spitzen Winkel $d\vartheta$ zwischen den Schmiegungsebenen in p und dem unendlich benachbarten Punkt p_1 zu bestimmen. Von der zweiten Schmiegungsebene können wir annehmen, daß sie durch die Tangente in p geht; sie ist außerdem parallel zur Beschleunigung p'' von p_1 . Um diese Ebene zu erhalten, verlege man den Vektor p'' , ohne seine Richtung zu ändern, mit seinem Anfangspunkt nach p und verbinde dann seinen Endpunkt mit der Tangente T in p durch eine Ebene. Der fragliche Endpunkt habe (s. Fig. 14) den Abstand h von der Schmiegungsebene in p und den Abstand h_1 von der Tangente T , dann ist



$$(a) \quad d\vartheta = \frac{h}{h_1}.$$

Es ist h gleich der senkrechten Projektion des Vektors p'' auf die Binormale B der Kurve in p . (Über die Vorzeichen wird am Schlusse von § 8 das Nötige gesagt werden). Statt h_1 kann auch die nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung davon verschiedene senkrechte Projektion des Vektors p'' auf die Hauptnormale N in p genommen werden.²⁾ Der Taylorsche Satz gibt nun:

$$p''_1 = p'' + \frac{dt}{1!} p''' + \frac{dt^2}{2!} p^{IV} + \dots$$

1) Für ebene Kurven hat Chr. Wiener in seiner darstellenden Geometrie, 1. Bd. (Leipzig 1884), S. 205—207, diese Ergebnisse abgeleitet und zwar rein geometrisch durch Betrachtung der zugehörigen Evoluten.

2) Diese Projektion ist gleich einer Kathete in dem in Fig. 14 eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck, das h_1 als Hypotenuse und h als die dem Winkel $d\vartheta$ gegenüber liegende Kathete hat, wobei h von höherer Ordnung unendlich klein ist als h_1 .

oder

$$(6) \quad p_1'' = \frac{dt^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} p^{(\alpha)} + \dots \\ + \frac{dt^{\beta-2}}{(\beta-2)!} p^{(\beta)} + \dots \\ + \frac{dt^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!} p^{(\gamma)} + \dots$$

Die Projektion von p_1'' auf die Binormale B ist gleich der Summe der Projektionen der Vektoren auf der rechten Seite von (6), von welchen die vor $p^{(\gamma)}$ kommenden parallel zur Schmiegungeebene sind, sodaß ihre Projektionen auf B verschwinden, während die auf $p^{(\gamma)}$ folgenden als unendlich klein höherer Ordnung nicht in Betracht kommen. Wenn daher allgemein die Binormalkomponente der Geschwindigkeit n -ter Ordnung, d. h. die Projektion des Vektors $p^{(n)}$ auf die Binormale, durch v_n bezeichnet wird, erhält man

$$(b) \quad h = \frac{dt^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!} \bar{v}_\gamma.$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$(c) \quad h_1 = \frac{dt^{\beta-2}}{(\beta-2)!} \bar{v}_\beta.$$

Daraus folgt wegen Gleichung (a):

$$(7) \quad d\theta = dt^{\gamma-2} \frac{(\beta-2)!}{(\gamma-2)!} \frac{\bar{v}_\gamma}{\bar{v}_\beta}.$$

Für die gesuchte Windung ergibt sich daher

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\alpha! (\beta-2)!}{(\gamma-2)!} \frac{\bar{v}_\gamma}{v_\alpha v_\beta} \lim_{dt \rightarrow 0} dt^{\gamma-2-\alpha}.$$

Die Gleichung zeigt, daß eine endliche von Null verschiedene Windung, und zwar vom Werte

$$(8) \quad \kappa = \frac{\alpha! (\beta-2)!}{(\gamma-2)!} \frac{\bar{v}_\gamma}{v_\alpha v_\beta}.$$

1) Für einen gewöhnlichen Bahnpunkt ($\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$) ist die Bedingung $\alpha + \beta - \gamma$ erfüllt und es ergibt sich $\kappa = \frac{\bar{v}_3}{v_1 v_2}$, oder nach Einführung der Windungszahlformel $\kappa = \frac{1}{\rho}$:

$$v_3 = v_1 v_2 \frac{1}{\rho}.$$

wobei die Bezeichnung bekannt ist.

dann und bloß dann vorhanden ist, wenn die Beziehung

$$\alpha + \beta = \gamma$$

besteht, daß man aber

$$w = 0 \text{ erhält für } \alpha + \beta < \gamma$$

und

$$w = \infty \quad , \quad , \quad \alpha + \beta > \gamma.^1)$$

Sind α und β beide ungerade oder beide gerade, so ist zur Erfüllung der Bedingung

$$\alpha + \beta = \gamma$$

notwendig, daß γ gerade sei; ist eine der Zahlen α und β ungerade, die andere gerade, so erfordert jene Bedingung ein ungerades γ . Zu diesen Fällen gehören die Zeichenverbindungen $--+$ (Einseitwendepunkt), $+++$ (echter Schnabel), $-+-$ (Spitzeneinseitpunkt) und $+--$ (Wendespitze). Wir haben somit gefunden:

Eine endliche, von Null verschiedene Windung kann bloß bei Spitzeneinseitpunkten (Fig. 5), Einseitwendepunkten (Fig. 7), Wendespitzen (Fig. 10) und echten Schnäbeln (Fig. 12) vorkommen; in einem Schnabeleinseitpunkt (Fig. 6), einem echten Wendepunkt (Fig. 8), einer Einseitspitze (Fig. 9) und einem Spitzenschnabel (Fig. 11) ist die Windung entweder Null oder unendlich.

§ 6. Einteilung der Raumkurvenpunkte nach den möglichen Werten der Krümmung und Windung.

Sowohl bei der Krümmung als bei der Windung sind die drei Fälle, daß entweder ein endlicher, nicht verschwindender Wert, oder der Wert 0, oder der Wert ∞ vorhanden ist, als wesentlich verschieden anzusehen. Denn die Zahlen α, β, γ , von deren gegenseitigen Größenverhältnissen jene Fälle abhängen, sind wegen ihrer geometrischen Bedeutung (s. § 2) projektiv unveränderlich, weshalb durch kollineare

1) Daß der Torsionsradius 0, oder nicht 0 und nicht ∞ , oder ∞ ist, je nachdem $\alpha + \beta \geq \gamma$, hat bereits mein Kollege Herr Wölffing im Archiv d. Mathem.

u. Physik (2) 15 (1897), S. 149, gezeigt, ohne zu wissen, daß ich dieses Ergebnis und einige sich daran knüpfende Folgerungen damals schon seit einem Jahrzehnt in meinen Vorträgen zu entwickeln pflegte. Übrigens hat Herr Wölffing dort auch die sphärische Krümmung, sphärische Torsion und einige verwandte Größen in ähnlicher Weise behandelt.

Transformation der gegebenen Kurvenstelle kein Fall in einen andern übergeführt werden kann. Nach den Ergebnissen der letzten beiden Paragraphen sind sowohl beim Spitzeneinseitpunkt als auch beim echten Schnabel bezüglich der Krümmung und ebenso bezüglich der Windung alle drei Fälle möglich, also je neun Fälle zu unterscheiden. Beim Schnabeleinseitpunkt und beim Spitzenschnabel dagegen sind bei der Krümmung wohl alle drei Fälle, bei der Windung aber nur zwei Fälle möglich, was im ganzen je sechs verschiedene Fälle gibt. Ähnliches hat man — es erscheinen bloß Krümmung und Windung vertauscht — beim Einseitwendepunkt und bei der Wendespitze. Beim echten Wendepunkt und der Einseitspitze endlich treten bei der Krümmung und Windung je nur zwei Fälle auf, sodaß bei diesen beiden Arten von Kurvenpunkten bloß je vier Fälle bestehen. Im ganzen gibt es daher $2 \cdot 9 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 50$ Fälle, und diese Fälle sind nach dem zu Anfang Bemerkten im Sinne der projektiven Geometrie, natürlich auch vom Standpunkt der Kinematik betrachtet, wesentlich verschieden. Es folgt eine Übersicht der möglichen Fälle.

Name des Punktes	Zahl der möglichen Fälle bezüglich der		
	Krümmung	Windung	im ganzen
1. Spitzeneinseitpunkt (-+-)	3	3	9
2. Schnabeleinseitpunkt (-++)	3	2	6
3. Einseitwendepunkt (--+)	2	3	6
4. Echter Wendepunkt (---)	2	2	4
5. Einseitspitze (+-+)	2	2	4
6. Wendespitze (+--)	2	3	6
7. Spitzenschnabel (++-)	3	2	6
8. Echter Schnabel (+++)	3	3	9

Es ist leicht zu zeigen, daß alle diese 50 Fälle wirklich bestehen. Betrachten wir einige, nach verbreiteten Anschauungen recht unwahrscheinliche Fälle. Sei etwa ein echter Wendepunkt mit unendlich großer Krümmung und unendlich großer Windung anzugeben. Die Zahlen α, β, γ müssen hier alle drei ungerade sein, ferner $2\alpha > \beta$ und

$\alpha + \beta > \gamma$. Die einfachste Lösung ist $\alpha = 3, \beta = 5, \gamma = 7$.¹⁾ Oder ein echter Schnabel mit der Krümmung Null und der Windung Null: Einfachstes Beispiel $\alpha = 2, \beta = 6, \gamma = 10$.²⁾ Oder eine Spitze mit der Krümmung Null und einer endlichen, von Null verschiedenen Windung: Einfachstes Beispiel die Wendespitze mit $\alpha = 2, \beta = 5, \gamma = 7$. Nicht überflüssig ist vielleicht die Bemerkung, daß ein singulärer Punkt gestaltlich mit einem gewöhnlichen Kurvenpunkt vollständig übereinstimmen kann: Einfachster Fall $\alpha = 3, \beta = 6, \gamma = 9$ ³⁾; in der Tat ist dies zwar ein singulärer Punkt, aber ein Spitzeneinseitpunkt mit einer endlichen, von Null verschiedenen Krümmung und Windung.⁴⁾

§ 7. Berührungsordnung und Schmiegungsordnung.

Die Ordnung der Berührung zwischen einer Kurve und ihrer Tangente im Punkt p erklären wir für unsere Zwecke am bequemsten als die Ordnung, von welcher der Kontingenzwinkel $d\varphi$ unendlich klein wird, wenn man das Bogenelement ds unendlich klein erster Ordnung setzt.⁵⁾ Zuzufolge den Gleichungen (2) und (4) in § 4 ist ds von derselben Ordnung unendlich klein wie dt^α , oder dt von derselben Ordnung, wie $ds^{\frac{1}{\alpha}}$ und $d\varphi$ von derselben Ordnung wie $dt^{\beta-\alpha}$, d. h. von derselben Ordnung wie $ds^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}$. Wenn daher die Berührungsordnung mit ν bezeichnet wird, ist

$$(9) \quad \nu = \frac{\beta - \alpha}{\alpha}.^6)$$

1) Die Kurve mit den Koordinatengleichungen

$$x = t^2, \quad y = t^5, \quad z = t^7$$

hat im Ursprung einen solchen Punkt.

2) Im Ursprung vorhanden bei der Kurve mit den Koordinatengleichungen

$$x = t^2 + t^3, \quad y = t^5, \quad z = t^{10}.$$

3) Beispiel der im Ursprung liegende Punkt der Kurve mit den Koordinatengleichungen

$$x = t^2 + t^4, \quad y = t^6, \quad z = t^9.$$

4) Andererseits gibt es auch zahlreiche Spitzeneinseitpunkte, die das Auge sofort als singuläre Punkte erkennt, z. B. wird ein Spitzeneinseitpunkt mit der Krümmung und Windung Null, wie der mit dem Zeichen (1, 4, 7), von überall her gesehen außergewöhnlich flach erscheinen.

5) Diese Erklärung ist leicht auf die von Cauchy gegebene (vgl. v. Mangoldt a. a. O. S. 18) und die von Möbius (Barycentrischer Calcul, 1827, § 75, S. 90 = Werke Bd. 1, S. 98) zurückzuführen. Vergl. auch die folgende Anmerkung.

6) Für $\alpha = 1$ wird $\nu = \beta - 1$, gleich der um 1 verminderten Zahl β , welche angibt, eine wieviel-punktige Berührung zwischen der Kurve und ihrer Tangente

Der obigen Erklärung entsprechend sei unter der *Schmiegungsordnung*, die als Maß für die Innigkeit des Anschmiegens der Kurve an ihre Schmiegungebene dienen soll, die Ordnung verstanden, von welcher der Winkel $d\theta$ zwischen zwei unendlich benachbarten Schmiegungebenen unendlich klein ist, das Bogenelement ds wieder als unendlich klein erster Ordnung vorausgesetzt. Nach § 5 Gleichung (7) ist $d\theta$ von derselben Ordnung unendlich klein, wie $dt^{\gamma-\beta}$, aber dt , wie schon bemerkt, von derselben Ordnung wie $ds^{\frac{1}{\alpha}}$, demnach $d\theta$ von derselben Ordnung wie $ds^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha}}$. Man erhält folglich, wenn die Schmiegungsordnung mit ν bezeichnet wird:

$$(10) \quad \nu = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}.$$

Als normale, weil beim gewöhnlichen Kurvenpunkt vorkommende Werte sind $\nu = 1$ und $\nu = 1$ anzusehen. Deshalb liegt es nahe, bei der Berührungsordnung und bei der Schmiegungsordnung je die drei Fälle > 1 , $= 1$, < 1 zu unterscheiden. Es führt dies aber zu derselben Einteilung der Kurvenpunkte, wie sie in § 6 nach den möglichen Werten der Krümmung und Windung vorgenommen worden ist. Denn man hat

$$1 - \nu = \frac{2\alpha - \beta}{\alpha} \quad \text{und} \quad 1 - \nu = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{\alpha},$$

je nachdem also

$$\nu \begin{matrix} > \\ \geq \end{matrix} 1,$$

ist auch

$$2\alpha \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \beta, \text{ d. h. } k \begin{cases} = 0 \\ \text{nicht } 0 \text{ und nicht } \infty^1) \\ = \infty \end{cases}$$

besteht. Es wird gewöhnlich übersehen, daß die letztere Erklärung des Begriffes der Berührungsordnung bei singulären Punkten mit $\alpha > 1$ nicht mehr anwendbar ist. Die Berührungsordnung soll ja ein Maß für die Innigkeit des Anschmiegens der Kurve an ihre Tangente sein, man würde aber z. B., von der Gleichung $\nu = \beta - 1$ ausgehend, für einen Einseitpunkt mit $\alpha = 3$, $\beta = 4$, dessen Krümmung ∞ ist und bei dem die außerordentliche Flüchtigkeit der Berührung zwischen Kurve und Tangente vom Auge sofort erkannt wird, die Berührungsordnung 3 erhalten, einen wesentlich höheren Wert, als beim gewöhnlichen Kurvenpunkt ($\nu = 1$), und denselben Wert, wie bei einem Einseitpunkt $\alpha = 1$, $\beta = 4$, dessen Krümmung Null ist und der dem Auge wesentlich flacher erscheint als ein gewöhnlicher Punkt. Die obige Formel liefert dagegen die den wirklichen Verhältnissen entsprechenden Werte $\nu = \frac{1}{3}$ bzw. $\nu = 3$.

1) Auf dieselbe Art habe ich das schon in dieser Zeitschrift a. a. O. S. 5 bewiesen.

und je nachdem

$$\nu \geq 1,$$

ist

$$\alpha + \beta \leq \gamma,$$

d. h.

$$w \begin{cases} = 0 \\ \text{nicht } 0 \text{ und nicht } \infty. \\ = \infty \end{cases}$$

Noch leichter ist dieser Zusammenhang, wenigstens bei den oben gegebenen Erklärungen der Berührungsordnung und Schmiegungsordnung, unmittelbar aus den Formeln

$$k = \frac{d\varphi}{ds}, \quad w = \frac{d\vartheta}{ds}$$

zu ersehen, denn dieselben zeigen, daß der Wert $k(w)$ Null, oder nicht Null und nicht unendlich, oder unendlich sein wird, je nachdem die Ordnung der unendlich kleinen Größe $d\varphi (d\vartheta)$ größer, gleich oder kleiner ist als diejenige von ds , d. h. je nachdem $\nu(v) \geq 1$.

§ 8. Krümmungen und Windungen verschiedener Ordnung.

Ist die Krümmung $k = \frac{d\varphi}{ds}$ in einem Kurvenpunkte Null oder unendlich, so erfüllt sie ihren Zweck nicht mehr, beim Vergleich zweier Kurvenstellen derselben Art als Maß für die stärkere oder schwächere Biegung einer Kurve in der Nähe eines Punktes zu dienen, oder als Maß für die Schnelligkeit, mit welcher ein, die Kurve mit bestimmter Schnelligkeit durchlaufender Punkt sich von der zugehörigen Tangente entfernt. Ebenso ist es mit der Windung als einem Maße für die schnellere oder langsamere Entfernung eines die Kurve beschreibenden Punktes von der Schmiegungebene, die zur betrachteten Stelle gehört. Man erhält jedoch bei einem Kurvenpunkte mit der Berührungsordnung ν und der Schmiegungsordnung ν wieder endliche und nicht verschwindende, also zu einem zahlenmäßigen Vergleich geeignete Werte, wenn man die Quotienten

$$(11) \quad k_\nu = \frac{d\varphi}{ds^\nu}$$

und

$$(12) \quad w_\nu = \frac{d\vartheta}{ds^\nu}$$

bildet, bei denen jedesmal Zähler und Nenner von derselben Ordnung unendlich klein sind. Es soll k_ν die Krümmung ν -ter Ordnung, w_ν die

Windung ν -ter Ordnung genannt werden.¹⁾ Die Krümmung (Windung) in irgend einem Punkt wird offenbar Null oder unendlich, wenn die Berührungsordnung (Windungsordnung) in jenem Punkte größer bzw. kleiner ist als die Ordnungszahl der Krümmung (Windung). Die Gleichungen (2) und (4) in § 4, (7) in § 5 ergeben ohne weiteres

$$(13) \quad k_\nu = \frac{(\alpha!)^\nu (\alpha - 1)!}{(\beta - 1)!} \frac{\bar{v}^\beta}{v_\alpha^{\nu+1}}$$

und

$$(14) \quad w_\nu = \frac{(\alpha!)^\nu (\beta - 2)!}{(\gamma - 2)!} \frac{\bar{v}_\gamma}{v_\alpha^\nu \bar{v}_\beta},$$

wo für ν und v die Werte aus Gleichung (9) und (10) in § 7 eingesetzt werden können.

Über die Vorzeichen sei noch folgendes bemerkt. Die Geschwindigkeiten v_α sind als absolute Längen positiv zu nehmen. Wie üblich, werde vorausgesetzt, daß die Bogenlänge s mit t wächst, was darauf hinauskommt, der Tangente T im betrachteten Kurvenpunkte die Richtung des Vektors $p^{(\alpha)}$ als positive Richtung zu geben. Bei der Hauptnormale betrachte man als positive Seite die, auf welche die Projektion der Geschwindigkeit $p^{(\beta)}$ fällt. Dann wird \bar{v}_β , also auch die Krümmung einer beliebigen Ordnung, wenn sie endlich und von Null verschieden ist, immer positiv. Die positive Richtung in der Binormalen B wähle man so, daß die positiven Teile der Tangente, Hauptnormale und Binormale zu einander liegen, wie diejenigen der Achsen eines Koordinatensystems gebräuchlicher Art. Dann wird \bar{v}_γ und ebenso die Windung einer jeden Ordnung positiv oder negativ, je nachdem

1) Von geometrischen Sätzen, in denen diese Begriffe eine Rolle spielen, seien bloß folgende, ohne Beweis, mitgeteilt:

Haben zwei Kurven in einem gemeinsamen singulären Punkt der Berührungsordnung ν dieselbe Tangente und dieselbe Schmiegungeebene, so bleibt das Verhältnis ihrer Krümmungen ν -ter Ordnung in diesem Punkt unverändert, wenn man beide Kurven einer und derselben beliebigen kollinearen Transformation unterwirft (das Verhältnis jener Krümmungen ist eine „projektive Invariante“).

Haben zwei Kurven in einem gemeinsamen singulären Punkt der Schmiegungeordnung ν dieselbe Tangente und dieselbe Schmiegungeebene, so ist das Verhältnis ihrer Windungen ν -ter Ordnung in diesem Punkt eine projektive Invariante. Im Falle $\nu = 1$ gilt letzterer Satz noch, wenn die Kurven in dem gemeinsamen Punkt dieselbe Schmiegungeebene, aber verschiedene Tangenten haben. Für den Fall gewöhnlicher Kurvenpunkte habe ich diese und eine Reihe verwandter Sätze, die in ähnlicher Weise verallgemeinert werden können, in dieser Zeitschrift Bd. 36 (1891), S. 56—60, mitgeteilt. Es liegt nahe, den Begriff des Gaußschen Krümmungsmaßes einer Fläche ähnlich wie den der Krümmung einer Kurve für den Fall eines singulären Flächenpunkts zu verallgemeinern, ein Gedanke, den ich bei anderer Gelegenheit durchzuführen beabsichtige.

die Projektion der Geschwindigkeit $p^{(r)}$ auf die Binormale nach der positiven oder negativen Seite der letzteren fällt, oder was dasselbe ist, je nachdem die Vektoren $p^{(a)}$, $p^{(p)}$, $p^{(r)}$ zu einander liegen, wie die positiven Achsenhälften eines linkshändigen Koordinatensystems, oder nicht. Wie schon in § 2 bemerkt wurde, gelten im ersteren Falle die Fig. 5—12, während im letzteren an Stelle der dort abgebildeten Kurven ihre Spiegelbilder in Bezug auf die xy -Ebene treten müssen. Wir stoßen hier auf die Unterscheidung positiv und negativ gewundener Kurvenstellen, mit der sich auch die Herren Kneser¹⁾ und Staudé²⁾ beschäftigt haben.

§ 9. Beispiele.

Nehmen wir die in § 3 angefangene Betrachtung der bei der Bewegung eines starren räumlichen Systems im gewöhnlichsten Falle von den Systempunkten beschriebenen Bahnstellen wieder auf, um die Ergebnisse der §§ 4—8 auf dieselben anzuwenden. Die von den gewöhnlichen Punkten der Fläche F^3 beschriebenen Schnabeleinseitpunkte mit dem Zeichen (1, 2, 4) haben eine endliche, nicht verschwindende Krümmung, dagegen die Windung Null, und ebenso ist es bei den Spitzeneinseitpunkten (1, 2, 5), welche die Punkte der in F^3 liegenden Ausnahmekurve c^6 beschreiben; die Windungsordnung ist im ersten Fall 2, im zweiten 3, also besteht für diese Punkte eine endliche, von Null verschiedene Windung 2-ter bzw. 3-ter Ordnung. Die gewöhnlichen Punkte der Wendekurve i^3 beschreiben Einseitwendepunkte mit dem Zeichen (1, 3, 4), also mit der Krümmung Null und einer endlichen, von Null verschiedenen Windung; wegen der Berührungsordnung 2 ist eine endliche, nicht verschwindende Krümmung 2-ter Ordnung vorhanden. Bei den von den Ausnahmepunkten der Wendekurve beschriebenen echten Wendepunkten (1, 3, 5) sind die Krümmung und die Windung beide Null; die Berührungsordnung und die Windungsordnung beträgt 2, sodaß die Krümmung und die Windung 2-ter Ordnung endlich und nicht Null sind.

Man bemerke, daß für die Erzielung möglichst flacher Bahnstellen, d. h. solcher, die einer Geraden sich möglichst anschmiegen, die gewöhnlichste ebene Bewegung eines starren Systems günstiger ist, als die gewöhnlichste räumliche Bewegung, da bei der ersteren der Ballische Punkt einen Einseitpunkt (1, 4) mit der Berührungsordnung 3 beschreibt, während bei der letzteren die Berührungsordnung der erzeugten Bahnstellen sich nicht über 2 erhebt.

1) J. f. Math. 113 (1894), S. 89.

2) Am. J. Math. 17 (1895), S. 359.

Zum Ostwaldschen Axiom der Mechanik.¹⁾

Von E. FÖRSTER in Göttingen.

Die Bemühungen, das sogenannte „*Ostwaldsche Axiom*“ des größten Energieumsatzes als Grundprinzip an die Spitze der analytischen Mechanik zu stellen und aus demselben, ähnlich wie aus den Prinzipien von D'Alembert, Gauß u. s. w. die Bewegungsgesetze eines beliebigen Systems materieller Punkte abzuleiten, haben bekanntlich zu einem negativen Resultate geführt.²⁾ In der Tat überzeugt man sich leicht, daß es im allgemeinen *überhaupt keine* Bewegung gibt, welche den Anforderungen des Ostwaldschen Satzes Genüge leistet.

Es entsteht nun die Frage, ob es nicht möglich sei, diesem Mangel dadurch abzuhelpen, daß man den Satz in zweckentsprechender Weise abändert, ohne den charakteristischen Grundgedanken desselben zu verwischen. Das Folgende stellt einen Versuch einer solchen Abänderung dar, nach welcher der Ostwaldsche Satz nur als eine neue Formulierung des längst bekannten Gaußschen Prinzips des kleinsten Zwanges erscheint. Ein *neues Grundgesetz* der Mechanik ist damit freilich *nicht* gewonnen, was wohl auch von vornherein nicht zu erwarten war. Es soll vielmehr einzig und allein der richtige Kern des Ostwaldschen Satzes bloßgelegt werden, wobei auch die eigenartige Ausdrucksweise, die der Satz in dieser Fassung gestattet, vielleicht nicht ohne Interesse sein dürfte.

Um zu einer zweckmäßigen Abänderung des Ostwaldschen Theoremes zu gelangen, gehen wir von der folgenden Betrachtung aus: Das genannte Theorem verlangt, daß unter allen jenen *virtuellen* Bewegungen eines Systemes materieller Punkte, welche außer den Systemsbedingungen noch dem *Energiesatze*:

$$(1) \quad T + U = \text{Konstante}$$

genügen, für die *wirkliche* Bewegung der „Energieumsatz“ ein Maximum, oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft, der Zuwachs der lebendigen Kraft T ein Extremum sei. Ist also der Anfangszustand des Systems, d. h. sind die Werte der Koordinaten und Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte zur Zeit t , gegeben, und ist die potentielle Energie U

1) Ostwald, Lehrbuch d. allg. Chemie, II, S. 37, 1891.

2) Vgl. etwa: Zemplén, Über den Energieumsatz in der Mechanik, *Annalen d. Physik*, 10, 2, S. 419, 1903, woselbst auch die einschlägige Literatur.

als Funktion der Koordinaten bekannt, dann sollen unter allen jenen *virtuellen* Beschleunigungen x'', y'', z'' , welche mit dem Energiesatze (1) und den Systemsbedingungen vereinbar sind, gerade jene herausgefunden werden, für welche bei beliebig kleinen Werten von τ der Zuwachs der lebendigen Kraft:

$$\Delta T = T_{t+\tau} - T_t$$

ein Extremum ist.

Entwickeln wir ΔT nach Potenzen von τ , so ergibt sich:

$$\Delta T = \tau \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{1}{3!} \cdot \tau^3 \cdot \frac{d^3 T}{dt^3} + \dots$$

Das erste Glied, $\frac{dT}{dt} \cdot \tau$, ist nach (1) gleich $-\frac{\partial U}{dt} \cdot \tau$ oder:

$$\frac{dT}{dt} \cdot \tau = -\frac{dU}{dt} \cdot \tau = -\sum \left[\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z' \right] \cdot \tau,$$

wo die Summe über die Koordinaten sämtlicher Massenpunkte zu erstrecken ist. Unter dem Summenzeichen kommen aber nur die Koordinaten und Geschwindigkeiten vor, d. h. $\frac{dT}{dt}$ ist von den Beschleunigungen völlig unabhängig und somit für alle betrachteten virtuellen Bewegungen gleich. Soll also ΔT für beliebig kleine Werte von τ ein Extremum sein, so muß $\frac{d^2 T}{dt^2}$ ein solches sein. Diese Forderung ist aber, wie eine einfache Rechnung ergibt, überhaupt unerfüllbar, außer wenn das System anfangs in Ruhe war. *Im allgemeinen bestimmt demnach das Ostwaldsche Axiom überhaupt keine Bewegung.*

Ganz anders gestaltet sich aber die Sache, wenn wir statt ΔT oder $\frac{d^2 T}{dt^2}$ den folgenden Ausdruck betrachten:

$$\Theta = \frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{1}{2} \sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2);$$

denn ersetzen wir die Forderung eines Extremums für $\frac{d^2 T}{dt^2}$ durch die Forderung, daß Θ ein Maximum sein soll, so erhalten wir die bekannten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. Nach (1) ist nämlich

$$\begin{aligned} \Theta &= -\frac{d^2 U}{dt^2} - \frac{1}{2} \sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2); \\ -\Theta &= \sum \left[\frac{\partial U}{\partial x} x'' + \frac{\partial U}{\partial y} y'' + \frac{\partial U}{\partial z} z'' \right] + \sum \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} z'^2 + \dots \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2) \\ &= \sum \frac{1}{2m} \left[\left(mx'' + \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(my'' + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(mz'' + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] + \Phi, \end{aligned}$$

wo Φ ein Aggregat von Gliedern bedeutet, die nur von den Koordinaten und den Geschwindigkeiten, nicht aber von den Beschleunigungen abhängen. Soll Θ ein Maximum sein, dann muß, da Φ als Konstante zu behandeln ist,

$$Z = \sum \frac{1}{m} \left[\left(mx'' + \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(my'' + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(mz'' + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] = -2\Theta - 2\Phi$$

ein Minimum sein. Z ist nichts anderes als der analytische Ausdruck für den Gaußschen „Zwang“, und unsere Forderung des Maximums für Θ deckt sich demnach mit dem bekannten Gaußschen Satze des kleinsten Zwanges. Wie aus diesem fließen also auch aus der Bedingung

$$(2) \quad \Theta = \text{Max.}$$

in Verbindung mit (1) die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen.

Zieht man es vor, statt des Umweges über das Gaußsche Prinzip direkt aus (1) und (2) die Bewegungsgleichungen abzuleiten, so bietet dies selbstverständlich keinerlei Schwierigkeiten. Zunächst findet man wie vorhin

$$\Theta = - \sum \left[\frac{\partial U}{\partial x} x'' + \frac{\partial U}{\partial y} y'' + \frac{\partial U}{\partial z} z'' \right] - \frac{1}{2} \sum m (x''^2 + y''^2 + z''^2) - \dots$$

Aus (2) folgt, da die Koordinaten und Geschwindigkeiten gegeben sind, also nicht mit variiert werden dürfen:

$$(3) \quad \delta\Theta = 0 = - \sum \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} + mx'' \right) \delta x'' + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + my'' \right) \delta y'' + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + mz'' \right) \delta z'' \right]$$

Sind die Bedingungen des Systems in der Form von μ Gleichungen

$$\varphi_i(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \mu),$$

gegeben, so unterliegen die Variationen $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z'' \dots$ noch den μ Bedingungen

$$(4) \quad \sum \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \delta x'' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \delta y'' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \delta z'' \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \mu),$$

wozu noch als letzte Bedingung (1) hinzukommt. Differentiiert man (1) nach t , so erhält man

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 = \sum m (x'x'' + y'y'' + z'z'') + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z' \right).$$

Die Variation von (5) ergibt demnach für die $\delta x'' \dots$ die Bedingung

$$(6) \quad \sum m (x' \delta x'' + y' \delta y'' + z' \delta z'') = 0.$$

Aus (3), (4) und (6) folgt in der bekannten Weise, wenn λ_i und μ vorläufig unbestimmte Funktionen der $x, y, z; x', y', z'$ sind:

$$(7) \quad \begin{aligned} mx'' + \frac{\partial U}{\partial x} &= \mu \cdot m \cdot x' + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}; \\ my'' + \frac{\partial U}{\partial y} &= \mu \cdot m \cdot y' + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}; \\ mz'' + \frac{\partial U}{\partial z} &= \mu \cdot m \cdot z' + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}. \end{aligned}$$

Entweder sind sämtliche x', y', z' gleich Null, also das System anfangs in Ruhe; dann stimmen die Gleichungen (7) ersichtlich mit den bekannten Bewegungsgleichungen überein. Sind aber irgend welche der x', y', z' von Null verschieden, dann multiplizieren wir die Gleichungen (7) bezw. mit x', y', z' und addieren alle so entstehenden Gleichungen für alle Systempunkte. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum m(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z' \right) \\ = \mu \cdot \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \sum \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} z' \right]. \end{aligned}$$

Die linke Seite verschwindet wegen (5), die Doppelsumme auf der rechten Seite verschwindet ebenso wegen $\varphi_i(x_1 \dots x_n) = 0$, und es bleibt nur übrig:

$$\mu \cdot \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

Da nach Voraussetzung nicht alle x', y', z' verschwinden, muß also $\mu = 0$ sein, und die Gleichungen (7) fallen wieder mit den bekannten Bewegungsgleichungen zusammen.

Daß ferner tatsächlich ein Maximum vorhanden ist, ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung der zweiten Variation von Θ . Es ist:

$$\begin{aligned} \delta^2 \Theta = - \sum \left[\left(mx'' + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \delta^2 x'' + \left(my'' + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \delta^2 y'' + \left(mz'' + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \delta^2 z'' \right] \\ - \sum m(\delta x''^2 + \delta y''^2 + \delta z''^2); \end{aligned}$$

Die erste der beiden Summen rechts ist nach (7) gleich

$$- \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \sum \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \delta^2 x'' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \delta^2 y'' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \delta^2 z'' \right],$$

verschwindet also wegen (4). Die zweite Summe rechts ist wesentlich positiv, mithin $\delta^2 \Theta$ negativ und das behauptete Maximum tatsächlich vorhanden.

Die Bedingungen (1) und (2) liefern also zusammen die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. —

Sollen die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen *zweiter* Art in *allgemeinen* Koordinaten $q_1 \cdots q_n$ erhalten werden, dann braucht man nur ganz analog den Ausdruck

$$\Theta = \frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} T_\mu T_\nu$$

unter Berücksichtigung des Energiesatzes zum Maximum zu machen. Dabei bedeutet¹⁾:

A die Determinante der quadratischen Form $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$;

$A_{\mu\nu}$ die adjungierte Unterdeterminante zu $a_{\mu\nu}$;

T_μ die Differenz: $T_\mu = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu}$.

Θ hängt demnach einzig und allein von der lebendigen Kraft T ab; der Gaußsche Satz des kleinsten Zwanges erscheint in zwei Teile zerlegt, nämlich (1) und (2), wovon (2) nur die Änderung der *kinetischen* Energie berücksichtigt, während die *potentielle* Energie erst durch (1) eingeführt wird.

Eine ganz besonders treffende Ausdrucksweise ergibt sich für diese neue Formulierung des Gaußschen Prinzips, wenn man versucht, dieselbe in Worte zu kleiden. Für die Funktionen $\frac{d^2 T}{dt^2}$ und $\frac{1}{2} \sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2)$ scheinen sich dann die Bezeichnungen „Beschleunigung der lebendigen Kraft“ und „lebendige Kraft der Beschleunigung“ wie von selbst darzubieten, obwohl dieselben vom mechanischen Standpunkte kaum zu rechtfertigen sind und nur die *Analogie* der betrachteten Formeln mit jenen für die Beschleunigung und die lebendige Kraft andeuten sollen. Führen wir diese *symbolischen* Bezeichnungen ein, dann ergibt sich der folgende Satz, der sich dem Gedächtnisse leicht einprägt:

„Betrachten wir alle jene virtuellen Bewegungen eines Systemes, die mit den Anfangsbedingungen und den Bedingungsgleichungen des Systemes, sowie mit dem *Energiesatze* verträglich sind;

1) Siehe: A. Waßmuth, Über die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik. Wiedemanns Annalen 54, p. 164; 1895.

Dann ist unter allen diesen virtuellen Bewegungen für die wirkliche Bewegung die „Beschleunigung der lebendigen Kraft“, vermindert um die „lebendige Kraft der Beschleunigung“ ein Maximum.“

Göttingen, den 26. Februar 1903.

Anmerkung: Die im vorstehenden gegebene Fassung des Ostwaldschen Axioms findet sich, wie ich nachträglich bemerke, schon bei A. Voß, „Über ein energetisches Grundgesetz der Mechanik“ Sitzungsber. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. 1901.

Die „Lebendige Kraft der Beschleunigung“ tritt dort als „Beschleunigung der halben relativen kinetischen Energie“ auf; der Beweis des Satzes deckt sich genau mit dem im vorigen gegeben zweiten direkten Beweise, während die Zurückführung des Satzes auf das Gaußsche Prinzip, die mir hauptsächlich von Interesse zu sein scheint, dortselbst nicht durchgeführt ist.

Zur Frage der Bezeichnungsweise in der darstellenden Geometrie.

Von E. MÜLLER in Wien.

Unzweifelhaft kommt in den mathematischen Wissenszweigen das Streben nach einheitlichen Bezeichnungen immer mehr zum Durchbruch. Es ist daher zu begrüßen, daß Herr Mehmke gelegentlich der Besprechung des Lehrbuchs der darstellenden Geometrie von M. Bernhard (S. 144 des letzten Bandes dieser Zeitschrift) zur Frage der Bezeichnungen in der darstellenden Geometrie Stellung genommen und damit zu einer Diskussion über den Gegenstand Veranlassung gegeben hat. Vielleicht trägt eine vorurteilslose Besprechung der Frage zur Förderung der Einheitlichkeit bei, deren Nutzen wohl jeder zugeben wird, der Schriften verschiedener Verfasser über unseren Gegenstand gelesen hat. Um wie vieles leichter liest sich eine Abhandlung, mit deren Bezeichnungsweise man vertraut ist!

Daß Herr Mehmke seit Jahren Punkte mit kleinen, Geraden mit großen lateinischen Buchstaben auch in der darstellenden Geometrie bezeichnet, war mir erfreulich zu hören, da ich gleichfalls diese Bezeichnungsweise bevorzuge. Verdient sie aber einen Vorzug? Ich vermute, wir sind beide durch die Beschäftigung mit H. Graßmanns Schriften an diese Bezeichnung gewöhnt worden. Nach Gründen für sie suchend, bin auch ich darauf gekommen, daß man den Punkt, trotz anderer

wissenschaftlicher Auffassungen, gewöhnlich als Element der räumlichen Gebilde betrachtet, und es daher passend ist, die zufolge dieser Auffassung in den Figuren häufiger auftretenden Punkte mit den in der Schrift am häufigsten auftretenden kleinen Buchstaben, Geraden also mit den eine Ausnahmestellung einnehmenden großen Buchstaben, des lateinischen Alphabetes natürlich, zu bezeichnen. Unzweifelhaft sind auch die kleinen Buchstaben, selbst wenn man sie sorgfältig zeichnet, rascher herstellbar als die großen und nehmen weniger Raum ein. Wohl kann man, wie mir ein Kollege einwarf, die großen Buchstaben in beliebiger Kleinheit schreiben. Dann werden aber die kleinen Buchstaben, da man einen Größenunterschied zwischen den beiden Arten immer wahren muß, zu klein. Leider ist es durch die ausgezeichneten Werke von Fiedler, Wiener und Rohn-Papperitz, welche um die Einführung konsequenter Bezeichnungen sich große Verdienste erworben haben, noch üblicher geworden, Punkte mit großen und Geraden mit kleinen Buchstaben zu bezeichnen, während schon vorher Klingenfeld in seinem „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“ (Nürnberg 1851, 2. Aufl. 1871) und K. Pohlke in den verschiedenen Auflagen seiner Darstellenden Geometrie (Berlin 1860—1876) die umgekehrte Bezeichnung verwendet haben.¹⁾

Zur Bezeichnung von Ebenen eignen sich wohl am besten die kleinen und großen Buchstaben des griechischen Alphabets. Die Zeichen für Ebenen von denen für Punkte durch fetten Druck zu unterscheiden, wie es Fiedler und Wiener machen, erscheint mir unvorteilhaft, weil in der Schrift diese Unterscheidung schwierig ist, und weil man beim Sprechen die Zeichen wieder durch ein Beiwort unterscheiden muß, was schon bei „Klein— α “ und „Groß— A “ lästig wird. Ich verwende für Ebenen gewöhnlich kleine griechische Buchstaben, für ausgezeichnete Ebenen, wie Projektionsebenen, und für krumme Flächen große griechische Buchstaben. Die Spuren, oder auch Spurparallelen einer Ebene α sind dann mit A_1, A_2 zu bezeichnen. Rohn-Papperitz haben für Ebenen durchgehends große griechische Buchstaben gewählt, wahrscheinlich um für die Winkelbezeichnung die kleinen Buchstaben aufzusparen. Da aber die ausdrückliche Bezeichnung von Winkeln in der darstellenden Geometrie seltener nötig wird, kann man bei ihr ebenfalls kleine griechische Buchstaben verwenden, wenn man im Text das Winkel-

1) Während des Druckes habe ich bemerkt, daß schon in: F. Wolff, Die beschreibende Geometrie und ihre Anwendungen, Leitfaden für den Unterricht am Kgl. Gewerbe-Institut, Berlin 1835, Punkte immer mit kleinen lateinischen Buchstaben, sowie Grundriß, Aufriß, Seitenriß von p mit p', p'', p''' bezeichnet werden.
R. Mehmke.

zeichen $< \alpha$, $\hat{\alpha}$ oder das Wort „Winkel“ hinzufügt.¹⁾ In den Figuren wird der Buchstabe ohnedies neben einem Bogen stehen. Von Vorteil für das rasche Verständnis mancher Figuren ist eine einfache Bezeichnung des rechten Winkels. Ich verwende dafür einen Bogen, in den ich statt des Winkelzeichens einen Punkt setze.

Zur Bezeichnung von Längenzahlen (Koordinaten, Abständen etc.) benutze ich, um mit der für Punkte nicht in Widerspruch zu geraten, kleine Buchstaben des deutschen Alphabets.

Auf einer einheitlichen Bezeichnung beruht die Verwendbarkeit der abgekürzten Bezeichnungen für Verbindungs- und Schnittgebilde, wie sie Rohn-Papperitz in die darstellende Geometrie eingeführt haben. Schade, daß sich die Verfasser hierbei nicht inniger an die Graßmannschen Bezeichnungen anschlossen. Wird z. B. die Schnittlinie zweier Ebenen α und β mit $[\alpha\beta]$ bezeichnet, dann kann man zuweilen auch ihre Projektionen, ohne Einführung eines neuen Buchstaben $[\alpha\beta]'$, $[\alpha\beta]''$ nennen. Vorteilhaft erschien mir insbesondere die Anwendung des Graßmannschen Ergänzungszeichens $|$ in dem Sinne, daß $|A$ die unendlich ferne Gerade der Lotebenen zu A (die zur Richtung von A senkrechte Stellung) und $|\alpha$ den unendlich fernen Punkt der Lote zu α (die zur Stellung von α senkrechte Richtung) bezeichnen sollen.²⁾ Dann bedeutet z. B. $[p|\alpha]$ oder, wenn man will, $p|\alpha$ das aus p auf α gefällte Lot und $[p|A]$ die durch p gehende Lotebene von A . Liegt A im Unendlichen, dann soll $|A$ die zur Stellung A senkrechte Richtung, und liegt α im Unendlichen, $|\alpha$ die zur Richtung α senkrechte Stellung bezeichnen. Nach diesen Festsetzungen bedeutet dann $\|A$ die Richtung (den unendlich fernen Punkt) von A und $\|\alpha$ die Stellung (die unendlich ferne Gerade) von α , also z. B. $[B\|A]$ die durch B parallel zu A gelegte Ebene. Ferner kann $[p\alpha]$ ohne Zweideutigkeit als Zeichen für den Abstand des Punktes p von der Ebene α betrachtet werden.

Was die Bezeichnung der verschiedenen Risse eines Elementes anlangt, so scheint mir hierfür Einheitlichkeit von ebensogroßem Werte, ist aber vielleicht, wegen der Konstanz der Bezeichnung in jeder Schule, noch schwieriger zu erreichen. Man müßte aber die Angelegenheit nicht vom Standpunkte der Gewohnheit, sondern der Zweckmäßigkeit betrachten. Obgleich da und dort noch manche andere Bezeichnungsweisen gebräuchlich sind, scheint es sich mir in erster Linie

1) Die Bezeichnung des Winkels zweier Gebilde durch darüber gesetztes Winkelzeichen, also \hat{AB} statt $< AB$ erscheint mir bequemer.

2) C. Reuschle, Die Deck-Elemente, Stuttgart 1882 hat $|\alpha$ das *Zenith* von α und $|A$ die *Zenithlinie* von A genannt und auf die Verwendbarkeit dieser Begriffe in der darstellenden Geometrie hingewiesen.

um die Frage zu handeln: Sollen wir die Projektionen eines Punktes p durch angefügte obere oder untere Zeiger unterscheiden, also mit p' , p'' , p''' oder p_1, p_2, p_3 bezeichnen? Trotzdem ich mich ein Jahrzehnt lang in die letztere Bezeichnung eingewöhnt hatte, bin ich doch wieder auf die erstere, als die zweckmäßigere, zurückgekommen und zwar aus folgendem Grunde. Es ist sehr bequem und auch allgemein gebräuchlich, eine Anzahl gleichberechtigter Elemente mit demselben Buchstaben, jedoch verschiedenen unteren Zeigern (z. B. $p_1, p_2, \dots p_n$) zu bezeichnen. Darauf müßte man bei Verwendung der unteren Zeiger zu obigem Zwecke verzichten. Darum ist es wünschenswert, daß sich die Bezeichnung $p', p'', p''', p^{IV}, \dots$ für die verschiedenen Risse eines Punktes allgemein einbürgere.

Es wäre aber vorteilhaft, den Grundsatz, durch obere Zeiger Projektionen zu bezeichnen, noch weiter durchzuführen. Bei orthogonal- und schief-axonometrischen sowie perspektiven Darstellungen werden die Bildpunkte oft ebenso wie die Punkte des Originals bezeichnet. Für manche Erörterungen ist eine Unterscheidung nötig; ich würde dann

p^o für die orthogonale Projektion (axonometrisch)

p^s „ „ schiefe „

p^c „ „ centrale „

vorschlagen¹⁾, woraus dann die Bezeichnungen p^o, p^s, p^c für die betreffenden Grundrisse sich ergeben. Auch die durch Umlegung erhaltenen Punkte und Geraden sollten dann durch obere Zeiger, etwa p, p^*, p^* bezeichnet werden, hingegen könnte man $p,$ für den Schatten des Punktes p aufsparen.

Bestimmung des Schwerpunktes einer krummlinig begrenzten ebenen Fläche mit Hilfe des Polarplanimeters von Amsler.²⁾

Von G. L. TIRASPOLSKIJ in Tomsch (Sibirien).

Wenn von einer Fläche ABC der Schwerpunkt zu bestimmen ist, so legen wir sie zwischen die Koordinatenachsen OX und OY , welche in den Punkten A und B berühren mögen. Um den Abstand des Schwerpunktes von der Achse OY zu finden, zerlegen wir die Fläche

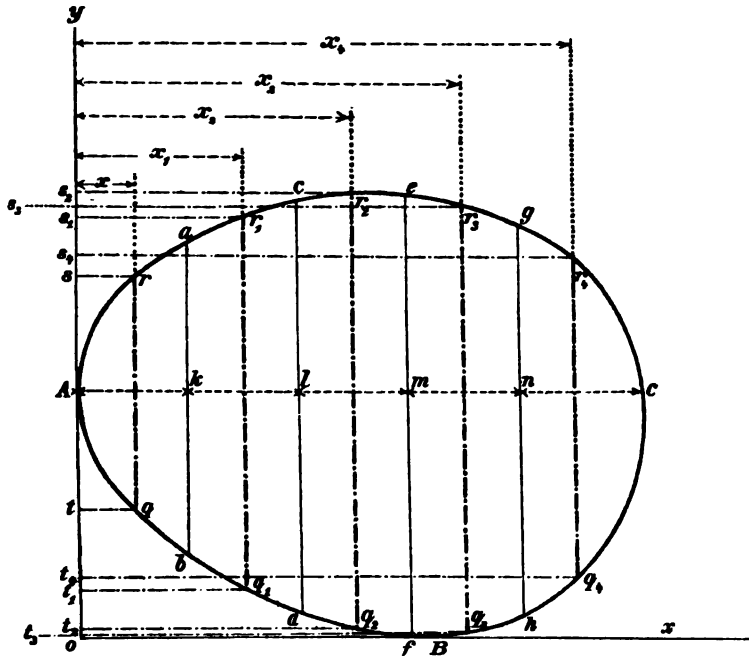
1) Rohn-Papperitz schreiben p_s und p_c .

2) Die Übersetzung dieses ursprünglich russisch geschriebenen Beitrages für die Zeitschrift ist von H. Mehncke.

ABC in Streifen durch eine Reihe von Parallelen ab, cd, \dots zu OY . Aus der Statik weiß man, daß der Abstand \bar{x} des Schwerpunkts der ganzen Fläche von der Achse OY wird:

$$\bar{x} = \frac{\sum p x}{\sum p}, \quad (\sum p = F),$$

wo p den Inhalt irgend einer der Flächen $Aab, acdb, cefd, \dots$, x den Abstand ihres Schwerpunkts von OY bezeichnet. Wenn wir die



Zerlegung so vornehmen, daß die Höhen dieser Streifen unter sich und der Einheit gleich werden, z. B. gleich 1 cm:

$$Ak = ke = em = mn = \dots = 1 \text{ cm},$$

so kann jede Fläche durch eine mittlere Linie bestimmt werden, nämlich

$$Aab = rq \cdot 1 \text{ cm},$$

$$acdb = r_1 q_1 \cdot 1 \text{ cm},$$

$$cefd = r_2 q_2 \cdot 1 \text{ cm}$$

u. s. w.

Hierbei kann man die Linien rq, r_1q_1, \dots näherungsweise erhalten, indem man über die Schwerpunkte der betreffenden Flächen fährt, also:

$$\begin{aligned} F \cdot \bar{x} &= \Sigma px = rq \cdot x + r_1q_1 \cdot x_1 + \dots \\ &= rq \cdot rs + r_1q_1 \cdot s_1r_1 + \dots, \end{aligned}$$

oder:

$$F \cdot \bar{x} = \text{Fläche } srqts + \text{Fläche } s_1r_1q_1t_1s_1 + \dots$$

Diese Flächen werden, wie die ganze Fläche F , mit dem Planimeter bestimmt. Den unbeweglichen Fuß des Planimeters stellt man außerhalb der Flächen auf und mit dem Fahrstift umfährt man, beim Punkt A beginnend, die Fläche $AsrqtsA$ und weiter ohne Aufhören und Ablesen die Fläche $As_1r_1q_1t_1s_1A$ u. s. w. Hierauf gibt die Ablesung am Planimeter den Wert $F \cdot \bar{x}$, woraus \bar{x} durch Division mit F erhalten wird. In Bezug auf die Achse OX ebenso verfahrend erhält man \bar{y} . Wenn die Höhe nc der letzten Fläche größer oder kleiner als 1 cm ist, so verkürzt oder verlängert man die mittlere Linie r_4q_4 im Verhältnis $nc:1$. In Wirklichkeit ist es nicht nötig, die Parallelen ab, cd, \dots auszuführen. Es genügt, die Reihe der Parallelen rq, r_1q_1, \dots so zu bestimmen, daß rq im Abstand $\frac{1}{2}$ cm von OY geführt ist und die übrigen in je 1 cm Abstand folgen, und dann mit dem Planimeter die Grenzen der Fläche $AsrqtsA$ u. s. w. entlang den Kanten eines Zeichenwinkels zu durchfahren, oder noch besser — genauer und schneller — mit Hilfe der Reißschiene, indem man den Fahrstift des Planimeters senkrecht mit der Reißschiene und wagrecht entlang der Reißschiene führt. Die Höhen Ak, kl, lm, \dots kann man auch von der Einheit verschieden nehmen, es ist nur nötig, daß sie untereinander gleich sind und daß die Ablesung am Planimeter im Verhältnis der Höhe zu 1 vergrößert wird. Wenn die untersuchte Fläche eine Symmetrieachse hat, nimmt man diese als eine Koordinatenachse und wendet das angedeutete Verfahren nur einmal an.

Eine Bemerkung zur Graphischen Statik.

Von N. J. HATZIDAKIS in Athen.

Hat man zwei Systeme von Kräften, von denen einige den beiden Systemen *gemeinsam* angehören, so verfährt man gewöhnlich zur Konstruktion des Kräfte- und des Seilpolygons auf folgende Weise (vgl. z. B. J. Petersen, *Lehrbuch der Statik fester Körper, deutsch von v. Fischer-Benson*, S. 145—146, § 122): Diejenigen Teile der zwei Kräftepolygone, welche den gemeinsamen Kräften entsprechen, sind zueinander parallel, können mithin durch eine bestimmte parallele Verschiebung zur Deckung miteinander gebracht werden. Dadurch erfährt aber auch der Pol O eine parallele Verschiebung. Es können also auf diese Weise die den gemeinsamen Kräften entsprechenden Teile der Seilpolygone als Seilpolygone betrachtet werden, die *demselben* Kräftepolygon, aber *verschiedenen* Polen O und O_1 (der neuen Lage von O nach der Verschiebung) entsprechen. Und für diese ist (a. a. O. S. 143—144, § 119) schon eine Konstruktionsregel angegeben. Ein Schüler von mir in der Militärschule, Herr Aris Chronis, hat mich nun neuerdings darauf aufmerksam gemacht, daß man obige Konstruktion noch mehr erleichtern kann, wenn man auf folgende Weise verfährt: Die parallelen Teile der Kräftepolygone können zusammenfallen. Praktisch wird dies dadurch erreicht, daß, nachdem man schon das dem einen beider Systeme von Kräften entsprechende Kräftepolygon konstruiert hat, die Konstruktion des anderen Kräftepolygons von den gemeinsamen Kräften ausgehend beginnt und zwar als diesen gemeinsamen Kräften entsprechenden Teil des zweiten Kräftepolygons den denselben entsprechenden Teil des ersten betrachtet, was, da der Anfang der Kräftepolygone überhaupt beliebig, offenbar gestattet ist. Dadurch wird nun erreicht, daß die Beziehung derjenigen Teile der Seilpolygone, die den gemeinsamen Kräften entsprechen, noch einfacher als früher wird: *sie sind nämlich jetzt offenbar parallel* (der Pol ist natürlich derselbe).

Kleinere Mitteilungen.

Ein Satz über die Zweikörperbewegung.

Folgender Satz scheint in der mathematischen Literatur nicht vorzukommen.¹⁾

Wirken auf zwei frei bewegliche, einander anziehende oder abstoßende Massenpunkte keine äußeren Kräfte, so schneiden die Tangenten, die man in diesen Punkten an ihre Bahnen ziehen kann, eine beliebige feste Ebene in zwei Punkten, deren Verbindungslinie fortwährend durch einen festen Punkt geht.

Er ist in geometrischem Sinne dualistisch zu dem von Poinso²⁾ herührenden Satze:

Die Verbindungsebenen jener Tangenten mit einem beliebigen festen Punkt schneiden sich fortwährend auf einer festen Ebene.

Mit Hilfe Grassmannscher Methoden führt man den Beweis wie folgt. Seien p und p' die beiden Punkte, m und m' ihre Massen, k und k' die auf sie wirkenden Kräfte, als Vektoren betrachtet, dann ist:

$$m \frac{d^2 p}{dt^2} = k, \quad m' \frac{d^2 p'}{dt^2} = k', \quad k + k' = 0.$$

Verbindet man die erste Gleichung mit p , die zweite mit p' durch äußere Multiplikation und addiert, so kommt

$$m \left[p \frac{d^2 p}{dt^2} \right] + m' \left[p' \frac{d^2 p'}{dt^2} \right] = [pk] + [p'k'] = 0$$

oder

$$m \frac{d}{dt} \left[p \frac{dp}{dt} \right] + m' \frac{d}{dt} \left[p' \frac{dp'}{dt} \right] = 0,$$

woraus durch Integration

$$m \left[p \frac{dp}{dt} \right] + m' \left[p' \frac{dp'}{dt} \right] = C.$$

Weil auf der linken Seite Linienteile („Stäbe“) stehen, so stellt die Integrationskonstante C eine Liniengröße („Schraube“) vor. Multipliziert man die letzte Gleichung einmal mit einer beliebigen Ebene α , dann mit einem beliebigen Punkt a , so ergibt sich

$$m \left[p \frac{dp}{dt} \cdot \alpha \right] + m' \left[p' \frac{dp'}{dt} \cdot \alpha \right] = [C\alpha],$$

$$m \left[p \frac{dp}{dt} \cdot a \right] + m' \left[p' \frac{dp'}{dt} \cdot a \right] = [Ca],$$

was der analytische Ausdruck für die beiden Sätze ist. Wie man sieht, ist der feste Punkt $[C\alpha]$ des ersten Satzes der Nullpunkt von α in dem durch die Schraube C bestimmten Nullsystem und die feste Ebene $[Ca]$ des zweiten Satzes die Nullebene von a in diesem Nullsystem. Letztere Ebene ist übrigens die „invariable“ Ebene von Laplace in Bezug auf den Punkt a .

Stuttgart.

R. MEHMKE.

1) Diesen Satz zu beweisen, habe ich schon 1883 als Prüfungsaufgabe gestellt.

2) Vgl. W. Schell, Theorie der Bewegung u. der Kräfte, 2. Aufl., II, S. 505.

Dezimale Ephemeriden.

In Band 46 dieser Zeitschrift, S. 383, haben wir über eine Petition an den französischen Unterrichtsminister, die darauf abzielte, die regelmäßige Veröffentlichung von Ephemeriden für die Dezimalteilung des Quadranten herbeizuführen, berichtet. Wir können heute mitteilen, daß die Herren J. de Rey-Pailhade, Ingénieur civil des Mines in Toulouse (18, rue Saint-Jacques), und A. Jouffray, Astronom an der Sternwarte in Mustapha-Supérieur in Algier (villa Prima, chemin des Alouettes) die Berechnung solcher Ephemeriden in die Hand genommen haben. In der uns vorliegenden Ankündigung führt M. de Rey-Pailhade etwa aus: Nach den Erfahrungen der Geodäten ist die Zehnteilung des rechten Winkels der Einteilung in Grade, Minuten und Sekunden weit überlegen¹⁾; die in der französischen Marine angestellten Versuche haben den Beweis geliefert, daß die Seeleute von der Einführung der neuen Winkelteilung großen Gewinn hätten²⁾; endlich weiß man, daß auch gewisse umfangreiche astronomische Rechnungen dadurch außerordentlich vereinfacht werden.³⁾ Trotz dieser anerkannten Vorteile hat die wissenschaftliche Literatur noch keine regelmäßige Veröffentlichung aufzuweisen, welcher die gegenseitige Stellung der Hauptgestirne in einer zehnteiligen Einheit ausgedrückt entnommen werden könnte. Diese Lücke wird also ausgefüllt werden.

Der Nutzen der neuen Veröffentlichung wird nach Ansicht von M. de Rey-Pailhade darin bestehen, daß die zahlreichen Besitzer dezimal geteilter Instrumente die Angaben der Ephemeriden seitheriger Einrichtung nicht umzurechnen brauchen und die Seeleute sich mit geringen Kosten die Vorteile des Dezimalsystems zu Nutze machen können, daß die Astronomen sich leichter entschließen werden, an neuen Instrumenten dezimal geteilte Kreise anbringen zu lassen und daß man bei allen einschlägigen Rechnungen eine Rechenmaschine wird anwenden können, ohne die bei der Sexagesimalteilung nötigen Verwandlungen vornehmen zu müssen.

Die beiden Herausgeber richten an Sternwarten, gelehrte Gesellschaften, Bibliotheken großer Städte und an Gelehrte, die dem Fortschritt huldigen, die Aufforderung, Bestellungen auf diese Ephemeriden bei einem von ihnen zu machen und etwaige, die Einrichtung betreffende Wünsche ihnen mitzuteilen. Der Subskriptionspreis, der erst nach Lieferung des Werkes eingezogen werden wird, soll höchstens 5 Frs. betragen.

1) Vgl. den Bericht über Winkelteilung, im Namen der „Tafelkommission“ der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet von R. Mehmke, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 8, (1900), S. 139—158, insbesondere S. 149 Anm. 18 und 19, S. 151 Anm. 22, S. 155 Anm. 32, S. 156 Anm. 36.

2) Vgl. E. Guyou, Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation, Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1902, Note C, 1—15.

3) Vgl. den oben genannten Bericht über Winkelteilung, Anm. 37 S. 157—158.

Anfrage.

In den Phil. Transactions vol. 10, for the year 1770, London 1771, findet sich p. 240—256 von Rev. J. Rowning ein „Universal constructor of equations“ beschrieben und abgebildet. Es ist dies einer der ältesten Mechanismen zur Auflösung von Gleichungen und eine hinsichtlich der geometrischen Grundlage (welche die v. Segnersche Konstruktion rationaler ganzer Funktionen bildet) wie der technischen Ausführung sehr beachtenswerte Leistung. (Ich habe die Abbildung verkleinert wiedergegeben in der Encyclopädie der mathem. Wissenschaften, Band I, S. 1067.) Auf p. 251 sagt der Erfinder, daß die „Maschine“ „by an excellant workman of this town“ ausgeführt worden sei und daß er sie der Society anbiete. Weiß jemand, ob dieser Apparat noch vorhanden ist und wo er sich befindet? In der Encyclopédie méthodique, Mathématiques, t. I, Paris 1784, steht p. 659—663 ein mit (V) unterzeichneter Artikel mit der Überschrift „Equations. Construction et usage d'une machine pour trouver les racines de quelque équation que ce puisse être (Algèbre. Machines)“. Wer ist der Verfasser? Bei näherer Prüfung zeigte sich mir, daß dieser Artikel größtenteils eine wörtliche Übersetzung der Abhandlung von Rowning ist, dessen Name nicht genannt wird. Die zu diesem Band der Encyclopédie gehörigen Tafeln sind in der Landesbibliothek zu Stuttgart nicht aufzufinden, ich erinnere mich aber, sie in der Hofbibliothek zu Darmstadt gesehen zu haben und glaube, daß die darin vorhandene Abbildung der fraglichen Maschine mit der von Rowning im wesentlichen übereinstimmt. Nun ist weiter in dem *Traité complet de mécanique appliquée aux arts* von J.-A. Borgnis, T. VIII, Paris 1820, p. 226—229, eine „machine pour construire les équations, par Clairaut“ beschrieben. Die sehr schön ausgeführte perspektivische Abbildung der Maschine, p. 23 Fig. 1, sieht aus wie eine etwa auf ein Drittel verkleinerte Wiedergabe der oben erwähnten Abbildung, die Rowning von seiner Maschine gibt. Aber abgesehen davon, daß Schatten und Schraffierung fehlen, sind nebensächliche Einzelheiten, z. B. Flügelschrauben, in der Form oft etwas geändert. Darf man daraus schließen, daß ein anderes Exemplar der Maschine als Vorlage gedient hat? Die Erläuterungsfiguren — Darstellungen der v. Segnerschen Konstruktion — stimmen auch mit denen bei Rowning überein, nur sind die Buchstaben manchmal geändert. Es wäre erwünscht, die Figuren bei Borgnis mit denen der Encyclopédie zu vergleichen. Im höchsten Grade rätselhaft ist noch, daß Borgnis die Maschine Clairaut zuschreibt. In den Schriften der Pariser Akademie habe ich keine auf den Gegenstand bezügliche Arbeit von Clairaut finden können. Wer kann hier Aufklärung geben?

Stuttgart.

R. MEHMKE.

Bücherschau.

Dr. Hermann Schubert. Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg. **Niedere Analysis.** Erster Teil. „Sammlung Schubert V.“ (V u. 181 S.) Leipzig, G. J. Göschensche Verlagshandlung 1902.

Der Verf. trennt diejenigen Teile der Elementarmathematik, die man gewöhnlich unter dem Namen „niedere Analysis“ zusammenfaßt, in zwei Gebiete, je nachdem die ganze Zahl den Ausgangspunkt bildet und die Hauptrolle spielt oder die irrationale Zahl in den Vordergrund tritt. Das erste dieser Gebiete findet in dem vorliegenden Bändchen der „Sammlung Schubert“ durch deren Herausgeber selbst eine vornehmlich auf das Selbststudium berechnete Darstellung. Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Lehre von den Kettenbrüchen und den diophantischen Gleichungen werden in einer für Mittelschulzwecke mehr als ausreichenden Ausführlichkeit behandelt; was das Buch als Studienbehelf besonders wertvoll macht, das sind die überaus zahlreichen aus großer Lehrerfahrung geschöpften Beispiele; zu einem Teile derselben sind auch die Lösungen mitgeteilt, wodurch dem Leser die Kontrolle seiner eigenen Arbeit ermöglicht wird.

Über den Stoff selbst ist wenig zu bemerken, da er sich innerhalb der üblichen Grenzen bewegt. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt der Verfasser außer direkten Wahrscheinlichkeitsbestimmungen a priori Teilaufgaben, die er force-majeur-Probleme nennt, dann Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Entstehungsmodalitäten beobachteter Ereignisse (Ursachenprobleme) und Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit von Zeugenaussagen (Glaubwürdigkeitsprobleme). Im dritten Abschnitt kommen auch einige Formen unbestimmter Gleichungen zweiten Grades zum Vortrage.

An die Spitze eines jeden Paragraphen sind die Formeln gestellt, die seinen Hauptinhalt bilden, eine Einrichtung, die Wiederholungszwecken förderlich sein kann.

Wien.

CZUBER.

Dr. Ad. Schwarz. **Zur Bilanzrechnung bei Pensions-Instituten.** (15 S.) Leipzig und Wien, F. Deuticke, 1901.

Das kleine Schriftchen behandelt eine bei der Bilanzierung von Pensionsinstituten auftretende spezielle Frage, wie nämlich die Gehaltssteigerung und die in Prozenten des jeweiligen Gehalts ausgedrückte jährliche Steigerung des Anspruchs (auf Invaliden- oder Witwenpension oder auf ein Sterbequartal) in Rechnung zu bringen sei insbesondere auch dann, wenn der letztgenannte Prozentsatz, wie dies mitunter der Fall ist, einmal im Laufe der Dienstzeit

eine Änderung erfährt. Der dabei verwendete mathematische Gedanke besteht darin, daß die Steigerungen des Anspruchs in den aufeinanderfolgenden Jahren vom Bilanzzeitpunkt gerechnet eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, vorausgesetzt, daß der Gehalt von Jahr zu Jahr in einer arithmetischen Reihe ersten Ordnung ansteigt und daß das Gehaltsprozent, welches den Anspruch ausdrückt, ebenfalls in arithmetischer Reihe wächst; die Differenz dieser letzteren Reihe erfährt, wie schon bemerkt, eine einmalige Abänderung. Die Formeln werden bis zur technischen Durchführung verfolgt.

Wien.

CZUBER.

Dr. Wilhelm Reuling, kaiserlicher Justizrat. **Die Grundlagen der Lebensversicherung.** (XII u. 67 S.) Berlin 1901, Ernst Siegfried Mittler und Sohn.

Die vorliegende Broschüre ist der Wiederabdruck einer vor 33 Jahren, im XV. Bande der Goldschmidtschen Zeitschrift für Handelsrecht, erschienenen Abhandlung, und ihre Neuauflage hat auch heute eine Berechtigung. In überaus glücklicher Weise löst darin der Verfasser die nicht leichte Aufgabe, auf kurzem Wege in das Wesen der Lebensversicherung einzuführen, ohne einen erheblichen mathematischen Apparat aufzuwenden. Das Bedürfnis nach solcher Darstellung ist unstreitig vorhanden, weil es Kreise gibt, die, ohne Versicherungsrechnungen berufsmäßig zu treiben, vermöge ihrer Stellung mit den grundlegenden Begriffen des Versicherungswesens sich vertraut machen sollen. Dazu bietet ihnen das kleine Büchlein ein vorzügliches Mittel, indem es den Grundgedanken der Lebensversicherung, ihre mathematischen Grundlagen, die Struktur der Prämien, die Entstehung der Prämienreserve, den Begriff des mit einer Versicherungsunternehmung verbundenen Risikos und den Unterschied zwischen Gegenseitigkeits- und Aktienunternehmungen klar entwickelt. In den Text selbst sind mathematische Formeln grundsätzlich nicht aufgenommen; dagegen sind in Fußnoten die einfachsten Ansätze so weit geführt, als es zur begrifflichen Erfassung notwendig ist.

Der Verfasser konnte sich, wie er berichtet, mit der üblichen Erklärung für die Bildung einer Lebenswahrscheinlichkeit aus den Zahlen der Absterbeordnung, bei welcher die Lebenden des niederen Alters als mögliche, die Überlebenden des höheren Alters als günstige Fälle gedeutet werden, nie befriedigen, und das mit Recht. Denn es handelt sich hier nicht um die Bildung einer Wahrscheinlichkeit a priori, sondern um den empirischen Wert einer hypothetischen Wahrscheinlichkeit. Der vom Verfasser gefundene Ausweg, die Frage so zu formulieren, daß es sich um die Wahrscheinlichkeit handle, eine bestimmte von den l Personen des niederen Alters gehörende engeren Gruppe der l_1 Personen an, welche das höhere Alter überleben, trifft nicht auf das Wesen der Sache.

Unbegründet ist es, heute über Mangel an Interesse für die Geschichte der Mathematik und an Schriften zu klagen, die ihr gewidmet sind (S. VIII). Unzutreffend bei den heutigen Verhältnissen ist die Angabe, die Kapitalversicherung auf den Todesfall sei die gebräuchlichste Versicherungsart.

Wien.

CZUBER.

Dr. **Karl Vettors**, Professor an der k. Gewerbeakademie zu Chemnitz:
„Lehrbuch der darstellenden Geometrie.“ Hannover, Verlag von
 Gebrüder Jänecke. 1902. 285 S. Preis geb. M. 5.60.

Dieses Lehrbuch der darstellenden Geometrie zeichnet sich durch die Reichhaltigkeit seines Inhaltes aus, indem trotz des geringen Umfanges von 285 Seiten im ersten Teile nicht nur die Projektion in einer Tafel, das Grund- und Aufriß-Verfahren, die Darstellung ebenflächiger Körper und einfacher krummen Linien und Flächen, sondern auch die Beleuchtung und die Schatten-Konstruktion ebenflächiger Körper und Rotationsflächen behandelt wird, woran sich im zweiten Teile noch eine kurze Erörterung der rechtwinkligen Axonometrie, der schiefen Projektion und der Linearperspektive schließt. Zahlreiche gut gewählte Aufgaben, im ganzen 321, sind den einzelnen Abschnitten beigegeben. Das Buch ist nach der Ansicht des Verfassers zwar nicht für Studierende der Mathematik, aber auch nicht für Bauhandwerker, vielmehr für den Gebrauch an höheren technischen Lehranstalten berechnet. Aber gerade mit Rücksicht auf diese Bestimmung vermißt man in dem Buche das Prinzipielle, Methodische, die Formulierung allgemeiner Sätze, die den Leser von dem gerade behandelten Falle unabhängig machen. So wird, um ein Beispiel zu erwähnen, der gewiß fundamentale Prozeß der Abwicklung in Bezug auf seine allgemeine Eigenschaften nirgends eingehend erörtert. Die Schraubenlinie finden wir S. 174 definiert als entstanden durch Aufwicklung einer auf dem abgewickelten Mantel eines Kreiszylinders gezeichneten Geraden; die Abwicklung eines Kreiszylinders aber wird erst im nächsten Abschnitt Seite 183 erledigt in Form der Aufgabe: Das Netz eines schief abgeschnittenen Kreiszylinders zu zeichnen. In mathematischer Hinsicht sind einige Ungenauigkeiten zu verbessern: so werden S. 102 die Bezeichnungen „Tetraeder, Oktaeder“ etc. für die *regulären* Polyeder verwendet; es gibt aber doch auch ein allgemeines Tetraeder u. s. f. Auf S. 150 findet man die Behauptung: „Bei einer krummen Linie liegen niemals drei auf einander folgende Punkte auf einer Geraden“ und weiter unten wird von „unendlichen Zweigen“ einer Kurve gesprochen, während unendlich ferne *Punkte* gemeint sind. Endlich mag noch bemerkt werden, daß der mit „Die freie Perspektive“ überschriebene Abschnitt (S. 272) diese Bezeichnung nicht mit Recht führt, da die Grundebene umgeklappt und der in ihr liegende Grundriß zur Konstruktion verwendet wird.

Die zahlreichen dem Texte eingefügten Figuren sind im allgemeinen gut disponiert und anschaulich. Hier und da wäre eine größere Genauigkeit am Platze: so enthält z. B. die Figur 106 a auf S. 107, die Parallelprojektion eines regulären Dodekaeders, doch zu grobe Ungenauigkeiten und beweist, daß man solche Darstellungen, wegen der vielen Kontrollen, die sich dem Auge darbieten, eben wirklich konstruieren muß. Trotz dieser bei einer neuen Auflage leicht zu beseitigenden Mängel wird namentlich ein in mathematischen Dingen sattelfester Leser in dem Buche mancherlei Anregung und Belehrung finden.

München, Mai 1903.

KARL DOEHLEMANN.

J. Schlotke, Direktor a. D. der Gewerbeschule in Hamburg: **Lehrbuch der darstellenden Geometrie**. I. Teil: Spezielle Darstellende Geometrie. Mit 199 Figuren. 5. Aufl. 167 S. Preis M. 3,60 kart. 3,80. II. Teil: Schatten- und Beleuchtungslehre. Mit 79 Figuren. 3. Aufl. 60 S. Preis M. 2,00 kart. 2,20. III. Teil: Perspektive. Mit 133 Figuren. 2. Aufl. 133 S. Preis M. 4,40 kart. 4,60. Dresden: Verlag von Gerhard Kühtmann, 1902.

Die drei ersten Teile des Schlotkeschen Leitfadens gehören wohl zu den besten elementaren Büchern über darstellende Geometrie. Sie zeichnen sich aus durch eine äußerst klare, durchsichtige und einfache Darstellung, durch vorteilhafte Disposition des Stoffes, durch eine zielbewußte, praktische Methode und durch anschauliche Figuren. Die Eigenschaften der Kegelschnitte, welche in dem Buche Verwendung finden, werden elementar abgeleitet.

Was den ersten Teil betrifft, so beginnt derselbe mit einer kurzen Darstellung der Parallelperspektive bzw. schiefen Projektion, welche die Mittel an die Hand gibt, die Figuren zur Erläuterung des Grund- und Aufriß-Verfahrens besser zu verstehen ev. auch selbst herzustellen. Durch Projektion in zwei Tafeln werden dann der Punkt, die Gerade, die Ebene sowie ebene Durchschnitte von Körpern erledigt. Daran schließt sich die Betrachtung der Kegelschnitte, welche aus dem Umdrehungscylinder und Umdrehungskegel als ebene Schnitte gewonnen werden. Hier mag bemerkt werden, daß die Figuren 55, 56, 78, 82 doch *richtig* in schiefer Projektion konstruiert werden sollten. Die Darstellung des Kegels und Cylinders ist ja ohnedies schon vorausgegangen, die der berührenden Kugeln bietet allerdings gewisse Schwierigkeiten. Der für die Figur charakteristische Schnitt würde sich in der zweiten Figur als Aufriß von selbst darbieten. Es folgt dann ein Kapitel über Durchdringungen mit vielen Übungsbeispielen, sowie die Betrachtung krummer Flächen. — Der zweite Teil behandelt im ersten Abschnitt die Konstruktion der Schlagschatten in den durch Parallelprojektionen dargestellten Abbildungen bei Annahme paralleler Lichtstrahlen und im zweiten Abschnitt kurz, aber ausreichend die Beleuchtungslehre.

Der III. Teil des vorliegenden Buches endlich, die Perspektive, enthält zunächst die perspektive Darstellung räumlicher Objekte unter Annahme einer horizontalen Ebene; dann folgt die freie Perspektive, die Abbildung des Kreises und einfacher Umdrehungskörper, sowie einiges über Schattenkonstruktionen, Spiegelbilder, Stereoskope, endlich die Reliefperspektive. Vielleicht würde es zur Verbreitung des Buches in Künstlerkreisen beitragen, wenn noch gewisse Aufgaben aus der Praxis des *Malers* (z. B. Personen in verschiedenen Tiefen eines Bildes, Figuren auf Treppen u. s. f.) Aufnahme fänden.

München, Mai 1903.

KARL DOEHLEMANN.

H. Sicard. **Traité de cinématique théorique**, avec des notes par A. Labrousse. Verlag von Gauthier-Villars, Paris 1902. VIII u. 185 S. Preis 4 fr. 50 c.

Nach einigen Vorbemerkungen über den Begriff des Vektors und das Moment eines Vektors in Bezug auf einen Punkt etc. (10 S.) behandelt der Verfasser im 1. und 2. Buche auf 34 S. die Bewegung eines einzelnen

Bücherschau.

Punktes (Geschwindigkeit und Beschleunigung, Anwendungen & Bewegung etc.). Das 3. Buch entwickelt in geometrischer Darstellung die einfachsten Sätze über die komplane Bewegung eines starren ebenen Systems, die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt und die allgemeine Bewegung eines starren räumlichen Systems, zuletzt noch den Satz von Coriolis über die Zusammensetzung der Beschleunigungen (24 S.). Das vierte beschäftigt sich mit demselben Gegenstande etwas eingehender in analytischer Behandlung (50 S.); in einem 5. Buche finden wir endlich die Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines starren Körpers (8 S.). Die Noten von Labrousse (51 S.) betreffen 1) die Formeln von Olinde Rodriques und ihre Anwendung auf eine spezielle Art der Bewegung, 2) die Bewegung eines starren ebenen resp. räumlichen Systems als speziellen Fall der linearen Transformation der Ebene und des Raumes in sich, 3) den linearen Strahlenkomplex und seine Bedeutung für die Kinematik, 4) einen Satz von Schönemann über die Bewegung eines starren räumlichen Systems, von welchem vier Punkte gezwungen sind auf festen Flächen zu bleiben, 5) einige Bemerkungen über Gelenkmechanismen, zum Teil ohne Beweise.

Bei dem vorliegenden Buche handelt es sich hiernach um eine gedrängte Übersicht über das gesamte Gebiet der theoretischen Kinematik, und insofern ist es zu einer ersten Orientierung recht wohl zu gebrauchen. Wenn der Verfasser aber meint¹⁾, das Buch enthalte „tout ce qu'il y a d'essentiel en cinématique“, so dürfen wir dem gegenüber doch nicht verschweigen, daß es die weit verzweigte Fortbildung, welche die geometrische Bewegungslehre in den letzten zwanzig Jahren namentlich in Deutschland gefunden hat, gänzlich außer Acht läßt. In dieser Hinsicht können uns besonders die Abschnitte über die ebene Bewegung, auch im Sinne einer ersten Einführung, nicht völlig befriedigen.

Erwähnt sei ferner die unverkennbare Anlehnung an das wesentlich tiefer eindringende Werk von Koenigs²⁾, über das wir früher ausführlich berichtet haben. — Die beigegebenen Figuren sind zum Teil auffallend flüchtig gezeichnet und in den Buchstaben mit verschiedenen Fehlern behaftet.

Braunschweig.

R. MÜLLER.

D. Tessari, la costruzione degli ingranaggi ad uso delle scuole degli ingegneri e dei meccanici (Biblioteca matematica vol. IX). Torino 1902. Fratelli Bocca editori. XV u. 225 S. nebst 8 Figurentafeln.

Das vorliegende Werk behandelt in streng wissenschaftlicher Form und auf kinematisch-geometrischer Grundlage die Konstruktion der Zahnräder in ihrem vollen Umfange. Die Einteilung des vorgetragenen Lehrstoffs ist naturgemäß in der Hauptsache die bisher gebräuchliche: Eine kurze Einleitung (4 S.) gibt die erforderlichen Definitionen und die Problemstellung im allgemeinen, und hieran schließen sich zunächst einige Kapitel über die Konstruktion der Räder für parallele Achsen und konstantes Verhältnis der Umdrehungsgeschwindigkeiten. (Grundlegende Konstruktionen, die cyclo-

1) vgl. die Widmungsworte zu Anfang.

2) leçons de cinématique, Paris 1897.

dische mit dem speziellen Falle der einerseits geradlinigen Verzahnung, Satzräder, Evolventen- und Triebstockverzahnung, Hookesche Räder, 93 S.) Der Verfasser wendet sich hierauf zur Betrachtung der Räder mit parallelen Achsen und veränderlichem Verhältnis der Umdrehungsgeschwindigkeiten. (Unrunde Räder, 54 S.) Er beschäftigt sich eingehend und teilweise unter Benutzung analytischer Hilfsmittel mit der mathematisch interessanten Aufgabe, die Gestalt (d. h. die Rollkurve) des zweiten Rades zu bestimmen, wenn die des ersten gegeben ist. Wird außerdem vorgeschrieben, wieviele Umdrehungen des ersten Rades einer Umdrehung des zweiten entsprechen sollen, so ist die Lage der zweiten Radachse nicht mehr willkürlich; sie ergibt sich mit Hilfe einer Fehlerkurve, und gleichzeitig liefert eine einfache Näherungskonstruktion die zugehörige Rollkurve. Eine von Burmester leider ohne Ableitung mitgeteilte Näherungsformel für den Abstand der beiden Radachsen wird von Tessari gleichfalls ohne Beweise übernommen. — Es folgt die Konstruktion der Räder mit sich schneidenden Achsen. (Konische Räder, 31 S.) Dabei wird u. a. das Verfahren von Tredgold zur angenäherten Bestimmung der Zahnformen an einem Beispiel in Grund- und Aufriß ausführlich erläutert. Den Schluß bildet die Theorie und Konstruktion der Räder mit windschiefen Achsen. (Hyperboloidische Räder, 41 S.) Hier fesselt uns insbesondere die geschickte Behandlung der recht komplizierten Aufgabe: Es ist die Oberfläche der Zähne des einen Rades gegeben, die entsprechende Oberfläche für das andere Rad zu ermitteln. Die Lösung gelingt nach den Regeln der darstellenden Geometrie in verhältnismäßig einfacher Weise, wenn als gegebene Zahnfläche eine bestimmte Ebene oder ein hyperbolisches Paraboloid gewählt wird.

Für den ersten und bei weitem größten Teil des Werkes — soweit es sich nämlich um cylindrische Räder handelt — liegt ein Vergleich mit den entsprechenden Abschnitten von Burmesters Kinematik außerordentlich nahe. Dabei zeigt sich, daß beide Werke in materieller Beziehung keine tiefgehenden Unterschiede aufweisen. Hinsichtlich der Form der Darstellung erscheint uns das Burmestersche Werk noch immer als ein unübertroffenes Muster knapper und dabei doch mathematisch scharfer Ausdrucksweise; die Darlegungen Tessaris sind zwar ebenfalls durchaus klar und wissenschaftlich korrekt, aber wesentlich breiter und reich an Wiederholungen, der Gang der Untersuchung bis ins Einzelne nach pädagogischen Gesichtspunkten sorgfältig gegliedert. Es steht zu erwarten, daß gerade diese Eigenschaften namentlich in technischen Leserkreisen warme Anerkennung finden werden. Auf jeden Fall bedeutet das Buch eine wertvolle Bereicherung unsrer modernen kinematischen Literatur.

Braunschweig.

R. MÜLLER.

Neue Bücher.

Arithmetik und Analysis.

1. CANTOR, M., Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. 2. Aufl. gr. 8°, X u. 155 S. Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. M. 1.80.
2. GROTEENDORST, N. C., Beginselen der waarschijnlijkheidsrekening en van de theorie der fouten. gr. 8°, 4 en 185 blz. m. 2 tab. Breda, De Koninklijke Militaire Academie. F. 3.20.
3. ROUCHE, E, et LÉVY, LUCIEN, Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. Tome II. Calcul intégral. gr. 8°. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 15.
4. SCHOUTEN, P., Die Prinzipien der Lebensversicherungs-Mathematik. Aus dem Holländischen von T. C. F. Reach, mit einem Vorwort von C. L. Landré. Jena. gr. 8°, VIII u. 159 S. M. 4.50.
5. THIELE, T. N., Theory of observations. Imp. 8 vo, 143 pp. London, Layton 12 s.

Astronomie und Geodäsie.

6. EPHEMERIDEN, astronomisch-nautische, f. d. J. 1905. Deutsche Ausg. Über Veranlassung der Marine-Sektion des k. u. k. Reichskriegsministeriums hrsg. von dem k. k. astronomisch-meteorolog. Observatorium in Triest. 18. Jahrg. gr. 8°, XX u. 26 S. Triest 1902, Schimff. M. 4.
7. JAHREBUCH, Berliner astronomisches, f. 1905 m. Angaben f. die Oppositionen der Planeten (1) — (470) f. 1903. Hrsg. v. dem königl. astronom. Rechen-Institut unter Leitung v. J. Bauschinger. (Der Sammlg. Berliner astronom. Jahrbücher 130. Bd.) gr. 8°, X, 537 u. 8 S. Berlin, Dümmler. M. 12.
8. JAHRESBERICHT, astronomischer. Hrsg. v. Walt. F. Wislicenus. 4. Bd. enthaltend die Literatur des J. 1902. gr. 8°, XXXIII u. 648 S. Berlin, Reimer. M. 19.
9. MILLER, WILH., Die Vermessungskunde. Ein Taschenbuch f. Schule u. Praxis. 2. Aufl. gr. 8°, IX u. 174 S. m. 117 Abb. Hannover, Gebr. Jänecke. Geb. in Leinw. M. 3.
10. MITTELUNGEN der königl. Universitäts-Sternwarte zu Breslau. 2. Bd. Hrsg. v. Jul. H. G. Franz. gr. 4°, IV u. 120 S. m. 6 Taf. Breslau, Maruschke & Berendt. kart. M. 10

S. auch Nr. 34 u. 44.

Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

11. ALLTISCH, KARL, Ein neues graphisches Verfahren zur Ermittlung der Querschnittsflächen der Kunstkörper im Eisenbahn- und Straßenbau. gr. 8°, 22 S. m. e. Zahlentab. u. 3 Taf. Zeichngn. Wien, Spielhagen & Schurig. M. 2.40.
12. MÜLLER, RHOLOD., Leitfaden f. die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig. 2. Aufl. gr. 8°, VIII u. 95 S. m. Abb. Braunschweig. Vieweg & Sohn. M. 2.50.

13. VONDERLINN, J., Lehrbuch des Projektionszeichnens. 4 Tl. 1. Hälfte: Ebene u. Raumkurven. Abwickelbare Flächen. Die Kugelfläche. Mit 389 Erklärn. u. 284 Fig. bearb. nach System Kleyer. gr. 8°, XI u. 252 S. Bremerhaven, v. Vangerow. M. 6; geb. M. 7.

Geschichte, Biographien.

14. KÖNIGSBERGER, LEO, Hermann v. Helmholtz. II. Band. Mit zwei Bildnissen in Heliogravure. gr. 8°, XVI u. 383 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 8; geb. in Leinw. M. 10; in Halbfranz. M. 12.
 15. KÖNIGSBERGER, LEO, Hermann von Helmholtz. III. Band. Mit 4 Bildnissen und einem Brieffacsimile. gr. 8°, X u. 142 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 4; geb. in Leinw. M. 5; in Halbfranz. M. 7.

Mechanik.

16. APPELL, P., et CHAPPUIS, J., Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de première (latin-sciences ou sciences-langues vivantes), conformément aux programmes du 31 mai 1902. In-18 Jésus. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 2.75.
 17. APPELL, PAUL, Traité de mécanique rationnelle. Tome III. Équilibre et mouvements des milieux continus. gr. in-8, 558 p. avec 70 fig. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 17.
 18. BOLTEMAN, LUDW., Über die Prinzipien der Mechanik. 2 akadem. Antrittsreden. gr. 8°, 48 S. Leipzig, Hirzel. M. 1.
 19. CHRISTEN, T., Das Gesetz der Translation des Wassers in regelmäßigen Kanälen, Flüssen u. Röhren. gr. 8°, VII u. 169 S. m. 1 Tab. u. 1 lith. Taf. Leipzig, Engelmann. M. 5.
 20. DUNLEY, R. J., Kinematics of machines: an elementary text-book. 8 vo, 8 + 379 pp. New-York, Wiley. Cloth \$ 4.
 21. ENCYCLOPÄDIE der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. IV. Bd.: Mechanik. Red. v. F. Klein. 2. Tl. 2. Heft. gr. 8°, S. 149—279 m. Fig. Leipzig, Teubner. M. 3.80.
 22. FILON, L. N. F., On an approximate solution for the building of a beam of rectangular crosssection under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading. 4 to. London, Dulau. 5 s.
 23. GRDICS, FR. WILH., Das System der Kinetik im Grundriß. gr. 8°, VIII u. 78 S. Wiesbaden, Bergmann. M. 1.60.
 24. HOLLEFREUND, KARL, Die Elemente der Mechanik vom Standpunkte des Hamiltonschen Prinzip. 1. Tl. Progr. gr. 4°, 27 S. m. 2 Taf. Berlin, Weidmann. M. 1.
 25. LONEY, S. L., Solutions of the examples in the elements of Hydrostatics. 12 mo, 146 pp. Cambridge University Press. 5 s.
 26. MANNO, RICHARD, Theorie der Bewegungsübertragung als Versuch einer neuen Grundlegung der Mechanik. gr. 8°, VI u. 102 S. m. 6 Abb. Leipzig, Engelmann. M. 2.40.
 27. MAURER, E. R., Technical Mechanics. Part I. 8 vo, 10 + 158 pp. New York, Wiley. Cloth. \$ 2.
 28. TRÜMMER, FRITZ, Fliehkraft u. Beharrungsregler. Versuch einer einfachen Darstellung der Regulierungsfrage im Tolleschen Diagramm. gr. 8°, 153 S. m. 21 Fig. u. 6 lith. Taf. Berlin, Springer. M. 4.

Physik und Chemie.

29. BECKER, AUG., Kristalloptik. Eine ausführl. elementare Darstellung aller wesentl. Erscheinungen, welche die Kristalle in der Optik darbieten, nebst einer historischen Entwicklung der Theorien des Lichts. gr. 8°, X u. 362 S. m. 106 Fig. Stuttgart, Enke. M. 8; geb. in Leinw. M. 9.

30. BERKE, OTTO, Untersuchungen über den Einfluß der Art u. der Wechsels der Belastung auf die elastischen u. bleibenden Formänderungen. gr. 8°, III u. 72 S. m. 5 Fig. u. 5 lith. Taf. Berlin, Springer. M. 2.
31. BLAKESLEY, THOMAS H., Geometrical Optics. An elementary treatise upon the theory, and its practical application to the more exact measurement of optical properties. Cr. 8 vo, 128 pp. with 33 diagrams. London, Whittaker. 2 s. 6 d.
32. CRAPPER, ELLIS H., Electric and magnetic circuits. Cr. 8 vo, 379 pp. London, Arnold. 10 s. 6 d.
33. DÉCOMBE, L., La compressibilité des gaz réels. (Scientia phys.-mathém. Nr. 21.) In-8° écu, 99 p. avec figures. Paris, Naud. Frs. 2.
34. DOPPLER, CHRISTIAN, Über das farbige Licht der Doppelsterne u. einiger anderer Gestirne des Himmels. Versuch einer das Bradleysche Aberrations-Theorem als integr. Teil in sich schließ. allgemeinen Theorie. Zur Feier seines 100. Geburtstages als 1. Veröffentlichung des nach ihm benannten physikal. Prinzips neu hrsg. v. F. J. Studnička. gr. 8°, 25 S. m. 1 Bildnis u. 1 Taf. Prag, Rivnáč. M. —.80.
35. ENCYKLOPÄDIE der mathematischen Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. V. Bd.: Physik. Red. v. A. Sommerfeld. 1. Tl. 1. Heft. gr. 8°, 160 S. m. Fig. Leipzig, Teubner. M. 4.80.
36. FORTSCHRITTE, die, der Physik. Namen-Register nebst e. Sach-Ergänzungsregister zu Bd. 44 (1888) bis 53 (1897). Unter Mitwirkung v. E. Schwalbe, bearb. v. G. Schwalbe. gr. 8°, XVIII u. 1043 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 60.
37. GRANTZ, L., Die Elektrizität u. ihre Anwendungen. 10. verm. Aufl. gr. 8°, XVI u. 636 S. m. 540 Abb. Stuttgart, Engelhorn. M. 7; geb. M. 8.
38. GRANTZ, L., Kurzer Abriss der Elektrizität. 3. verm. Aufl. gr. 8°, VIII u. 197 S. m. 161 Abb. Stuttgart, Engelhorn. geb. in Leinw. M. 3.
39. GREEN, GEORGE, Mathematical Papers. Edited by N. M. Ferrers. Fac-simile reprint. Paris, Herrmann. Frs. 20.
40. HELMHOLTZ, H. VON, Vorlesungen über theoretische Physik, Band I¹. Einleitung zu den Vorlesungen über theoretische Physik hrsg. v. Arthur König und Karl Runge. gr. 8°, V u. 50 S. m. 4 Fig. u. 1 Porträt. Leipzig, Barth. M. 3; geb. M. 4.50.
41. HELMHOLTZ, H. VON, Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. VI. Theorie der Wärme. Hrsg. v. Franz Richarz. gr. 8°, XII u. 419 S. m. 40 Fig. Leipzig, Barth. M. 16; geb. M. 17.50.
42. HITTORF, W., Über die Wanderungen der Ionen während der Elektrolyse. (1853—1859.) 1. Tl. Hrsg. v. W. Ostwald. (Ostwalds Klassiker Nr. 21.) 2. erweit. Aufl. gr. 8°, 115 S. m. 1 Taf. Leipzig, Engelmann. kart. M. 1.60.
43. HUYGENS, CHRISTIAAN, Abhandlung über das Licht. Worin die Ursachen der Vorgänge bei seiner Zurückwerfung u. Brechung u. besonders bei der eigentüml. Brechung des isländ. Spates dargelegt sind. (1678.) Hrsg. v. E. Lommel. In 2. Aufl. durchgesehen u. berichtigt v. A. J. v. Oettingen. (Ostwalds Klassiker Nr. 20). 8°, 115 S. m. 57 Fig. Leipzig, Engelmann. kart. M. 2.
44. JAHRBUCH der Astronomie u. Geophysik. Enthaltend die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Hrsg. v. Herm. J. Klein. 13. Jahrg. 1902. gr. 8°, VIII u. 366 S. m. 5 Taf. Leipzig, Mayer. M. 7.
45. KAYSER, H., Die Elektronentheorie. Rede. gr. 8°, 32 S. Bonn, Röhrscheid & Ebbecke. M. —.80.
46. OPTIK, HANS R. G., Über das erste Problem der Dioptrik. Progr. gr. 4°, 26 S. m. 5 Fig. Berlin, Weidmann. M. 1.

47. PERRIN, JEAN, *Traité de chimie physique. Les principes.* Paris, Gauthier-Villars. Frs. 10.
48. REEVE, S. A., *The thermodynamics of heat engines, including steam tables.* 12 mo. 11 + 316 pp. New York, Macmillan. Cloth. \$ 2.60.
49. REYNOLDS, OSBORNE, *Papers on mechanical and physical subjects. Vol. 3. The sub-mechanics of the Universe.* Roy. 8 vo, 272 pp. Cambridge University Press. 10 s. 6 d.
50. RODET, J., *Distribution de l'énergie par courants polyphasés. 2^e édition entièrement refondue. In-8° avec 213 fig.* Paris, Gauthier-Villars. Frs. 15.
51. SCHREBER, K., *Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichngn. im Text.* gr. 8°, IV u. 126 S. Leipzig, Teubner. M. 3.60.
52. STEWART, R. WALLACE, *The higher text-book of heat. The tutorial physics. Vol. 2. With numerous diagrams and examples.* Cr. 8 vo, pp. VII—396. London, Clive. 6 s. 6 d.
53. TILDEN, W. A., *The specific heats of metals and the relation of specific heat to atomic weight. Part 2. 4 to.* London, Dulau. 1 s.
54. VOIGT, W., *Thermodynamik. 1. Bd. Einleitung: Thermometrie, Kalorimetrie, Wärmeleitung. — 1. Tl.: Thermisch-mechanische Umsetzungen. (Sammlung Schubert XXXIX.)* gr. 8°, XV u. 360 S. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 10.
55. VOLLER, A., *Grundlagen und Methoden der elektrischen Wellentelegraphie (sogen. drahtlosen Telegraphie). Vortrag. Erweiterter Abdr.* gr. 8°, 52 S. m. 17 Fig. Hamburg, Voß. M. 1.80.
56. WEINSTEIN, B., *Thermodynamik und Kinetik der Körper. 2. Band. Absolute Temperatur. Die Flüssigkeiten. Die festen Körper. Thermodynamische Statik u. Kinetik. Die (nicht verdünnten) Lösungen.* gr. 8°, XVIII u. 586 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 16.
57. WINKELMANN, A., *Handbuch der Physik. 2. Aufl. 4. Bd. 1. Hälfte. Elektrizität und Magnetismus. I.* gr. 8°, VI u. 384 S. m. 142 Abb. Leipzig, Barth. M. 12.

Tafeln.

58. BRUNNS, C., *Neues logarithmisch-trigonometrisches Händbuch auf sieben Decimalen. 6. Ster.-Ausg.* gr. 8°, XXIV u. 610 S. (Auch engl., franz. u. italien. Ausg.) Leipzig, Engelmann. M. 4.20.
59. BULNHHEIM, MAX, *Hilfstafeln zur Ermittlung der Belastungszahlen f. die statischen Berechnungen von Hochbaukonstruktionen.* qu. Fol. 37 S. Dresden, Kühltmann. kart. M. 3.
60. EGGERT, O., *Hilfstafel zur Berechnung der Richtungskoeffizienten für Koordinatenausgleichungen. Entworfen von Fr. Kreisel. 1:10000. 36,5 × 36,5 cm. Nebst Text (3 S. m. 1 Fig., gr. 8°)* Berlin, Parey. M. 1.
61. FÖRSTER, W., u. LEHMANN, P., *Die veränderlichen Tafeln des astronomischen u. chronologischen Teils des preußischen Normalkalenders für 1904.* Berlin, statist. Bureau. M. 5.
62. MAC AULAY, ALEX., *Five figure logarithmic and other tables.* 18 mo. London, Macmillan. 2 s. 6 d.
63. PONS, L., *Tables tachéométriques donnant, aussi rapidement que la règle logarithmique, tous les calculs nécessaires à l'emploi du tachéomètre. 2^{ème} éd. In-8°.* Paris, Béranger. Fr. 10.
64. WRONCKI, TH., *Tables trigonométriques centésimales pour le tracé des courbes des voies de communication, augmentées de Tables tachéométriques et de nombreuses tables relatives à la pose des voies de fer. In-8° avec 33 fig.* Paris, Béranger. Fr. 12.50.

Verschiedenes.

65. BIBLIOGRAPHIE der deutschen naturwissenschaftlichen Literatur. Hrsg. im Auftrage des Reichsamtes des Innern vom deutschen Bureau der internationalen Bibliographie in Berlin. 3. Bd. 1903/04. 1. Abtlg. Nr. 1. Mathematik, Mechanik, Physik, Chemie, Astronomie, Meteorologie. gr. 8°, 48 S. Jena, Fischer. M. 9.
66. BÜRKLIN, O. TH., Formelsammlung u. Repetitorium der Mathematik. Sammlung Götschen Nr. 51.) 2. Aufl. 4. Abdr. 12°, 229 S. m. 18 Fig. Leipzig, Götschen. geb. in Leinw. M. —.80.
67. JOUFFRET, E., *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions et introductions à la géométrie à n dimensions.* gr. in-8, XXIX—213 p. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 7.50.
68. KLUSMANN, RUD., Systematisches Verzeichnis der Abhandlungen, welche in den Schulschriften sämtlicher an dem Programmatausche teilnehmenden Lehranstalten erschienen sind. Nebst 2 Registern. 4. Bd. 1896—1900. gr. 8°, VIII u. 347 S. Leipzig, Teubner. M. 8.
69. MATHEMATICAL Questions and Solutions from the Educational Times. Edit. by C. J. MARKS. New series. Vol. 3. 8 vo. London, Hodgson. 6 s. 6 d.
70. RICHARD, JULES, *Sur la philosophie des mathématiques.* In-18, 250 p. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.25.
71. VERHANDLUNGEN der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 74. Versammlung zu Karlsbad. 21.—27. IX. 1902. I. Die allgemeinen Sitzungen, die Gesamtsitzung beider Hauptgruppen u. die gemeinschaftlichen Sitzungen der naturwissenschaftl. und der medizinischen Hauptgruppe. gr. 8°, 264 S. m. 10 Abb. Leipzig, Vogel. M. 4.
72. WOOLWICH Mathematical papers. For admission into the Royal Military Academy. For the years 1893—1902. Edit. by E. J. Brooksmith. Cr. 8 vo. Macmillan. 6 s.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle einlaufenden Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ALBRECHT, TH., Resultate des internationalen Breitendienstes. Bd. I. (Zentralbureau der internationalen Erdmessung, Neue Folge der Veröffentlichungen Nr. 8.) 4°, I u. 173 S. m. 12 Tafeln. Berlin, Reimer.
- APPELL, P et CHAPPUIS, J., *Leçons de mécanique élémentaires*, s. N. B. („Neue Bücher“), Nr. 16.
- APPELL, P., *Traité de mécanique rationnelle.* III. s. N. B. 17.
- BARONI, MARIO, *Sulla ricerca di norme che determinino la stabilità delle costruzioni in calcestruzzo armato.* Relazione al X Congresso degli Ingegneri ed Architetti Italiani in Cagliari. Mila, Tipografia e litografia degli ingegneri.
- BOREL, EMILE, *Leçons sur les fonctions méromorphes professées au Collège de France.* Recueillies et rédigées par Ludovic Zoretti. In-8 avec fig. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 3.50.
- BUCHHEIM, A. H., *Elemente der Vektor-Analyse.* Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. Leipzig, Teubner.
- COYM, G., *Geometrie der Ebene.* Teil I: (Erster Jahreskursus). Anschauungskursus der Geometrie und Elementarkursus der Konstruktionslehre. Leipzig, Schneider. M. 1.
- DÉCOMBE, L., *La compressibilité des gaz réels*, s. N. B. 33.

- EGGERT, O., Hilfstafel, s. N. B. 60.
- FABRE, C., Aide-mémoire de photographie pour 1903, publié sous les auspices de la Société photographique de Toulouse. 28^{ième} année. Paris, Gauthier-Villars.
Fr. 1.75; cartonné Fr. 2.25.
- FREYCINET, C. DE, De l'expérience en géométrie. In-8, XX—175 p. Paris, Gauthier-Villars.
Fr. 4.
- GEDICUS, FR. W., Das System der Kinetik im Grundriß, s. N. B. 23.
- GIORGI, GIOVANNI, Unità razionali di elettromagnetismo. Riassunto di una comunicazione presentata al congresso dell' associazione elettrotecnica italiana il 13 ottobre 1901. (Estratto dell' „Ingegneria Moderna“.) Napoli 1901.
- La trazione elettrica sulle ferrovie. Nota. (Estratto dall' „Elettricista“.) Roma 1902.
- Il funzionamento del rocchetto di Ruhmkorff. Lettura fatta all' Assemblea generale di Torino dell' Associazione elettrotecnica italiana. (Estratto dagli Atti dell' Assoc. elettrot. ital.) Torino 1902.
- Il sistema assoluto M. Kg. S. (Estratto dall' „Elettricista“.) Roma 1903.
- GREEN, GEORGE, Mathematical papers, s. N. B. 39.
- GUMMICH, E., Präzisionsmessungen mit Hilfe der Wellenlänge des Lichts. (Vorträge u. Abhandlgn. hrsg. v. der Zeitschr. „Das Weltall“ Heft III.) Berlin 1892, Schwetschke & Sohn.
- HELMHOLTZ, H. VON, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. I¹, s. N. B. 40.
- Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI, s. N. B. 41.
- HUMBERT, C., Cours d'Analyse professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques. gr. in-8. Paris, Gauthier-Villars.
Fr. 16.
- HUNDHAUSEN, JOHANNES, Zur Atombewegung. Kritik und Neues. Leipzig, Barth.
M. 1.20.
- JOUFFRET, E., Géométrie à quatre dimensions, s. N. B. 67.
- KÖNIG, JULIUS, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. Leipzig, Teubner.
- KÖNIGSBERGER, LEO, Hermann von Helmholtz. II. Bd., s. N. B. 14.
- Dasselbe. III. Bd., s. N. B. 15.
- KOPPE-DIEKMANN'S Geometrie zum Gebrauch an höheren Unterrichtsanstalten. III. Tl. (2. Aufl.) Ausgabe für Reallehranstalten. Essen, Bädker. geb. M. 3.20.
- KRAUS, KONRAD, Grundriß der geometrischen Formenlehre für Lehrerinnen-Bildungsanstalten. gr. 8°, 208 S. m. 234 Holzschnitten. Wien, Pichlers Witwe & Sohn.
geb. K. 2.40.
- KRAZER, ADOLF, Lehrbuch der Thetafunktionen. (Teubners Sammlung, Bd. XII.) Leipzig, Teubner.
- LEMAN, A., Über Schattenphänomen bei Finsternissen. Vortrag. (Vorträge u. Abhandlgn. hrsg. von der Zeitschr. „Das Weltall“ Heft IV.) Berlin 1902, Schwetschke & Sohn.
- LEO, N., Hat das Menschenleben einen Zweck? Naturwissenschaftliche Betrachtung. Berlin, Löwenthal.
M. 1.50.
- MANNO, R., Theorie der Bewegungsübertragung, s. N. B. 26.
- NAGAOKA, H., SHINJŌ, S. u. OTANI, R., Absolute Messung der Schwerkraft in Kyōto, Kanazawa, Tōkyō und Mizusawa mit Reversionspendeln ausgeführt. (Reprinted from Journ. Sc. Coll. Imp. Univ. Tokyo, vol. XVI.) Tokyo 1902.
- NUŠL, FR. et FRIČ, JOSEF JAN, Etude sur l'appareil circumzénithal. (Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême. 1903.) Prague, Académie des Sciences de l'empereur François Joseph I.
- D'OCAGNE, MAURICE, Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomenclature. In-4°, 63 p. Paris, Gauthier-Villars.

- ONDRAČEK, JOSEF, Analytische Geometrie ebener Kurven in Büschel-Koordinaten. I. Heft. Ebene Kurven in Normalen-Koordinaten erster Art. Wien, Gerolds Sohn. M. 1. 20.
- PERIN, J., Traité de chimie physique, s. N. B. 47.
- PRITZ, H., Om tal til fortsaettelse af regneundervisningen. gr. 8°, 32 S. København, Lehmann & Stage. 50 Øre.
- REYNOLDS, OSBORNE, Papers on mechanical and physical subjects. Vol. III. s. N. B. 49.
- RICHARD, JULES, Sur la philosophie des mathématiques. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3. 25.
- SCHLOTKE, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Dresden 1902, Kühnmann.
 I. Teil. Spezielle darstellende Geometrie. 5. Aufl. M. 3. 60; geb. 3. 80.
 II. „ Schatten- u. Beleuchtungslehre. 3. Aufl. M. 2; geb. M. 2. 20.
 III. „ Perspektive. 2. Aufl. M. 4. 40; geb. 4. 60.
 — Lehrbuch der graphischen Statik. Zum Gebrauch für mittlere technische Lehranstalten, Bau-, Maschinen- u. Gewerbeschulen. 2. verbesserte u. vermehrte Aufl. Dresden 1902, Kühnmann. M. 4. 80; geb. M. 5.
- SCHWABER, ADOLF, Repetitorium der Elementarmathematik. Zum Gebrauch für die Schüler der humanistischen Gymnasien und Realschulen, sowie für Privatstudierende. München, Kellerer. M. 3.
- WAGNER, JULIUS, Über den Anfangsunterricht in der Chemie. Nach der am 28. Februar 1903 in der Aula zu Leipzig gehaltenen Antrittsvorlesung. Leipzig, Barth. M. 1. 20.
- WEINSTEIN, B., Thermodynamik u. Kinetik der Körper. 2. Bd., s. N. B. 56.
- WINKELMANN, A., Handbuch der Physik, s. N. B. 57.
- WÖLFING, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In 2 Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. Leipzig, Teubner.
- YARKOVSKI, JEAN, Hypothèse cinétique de la gravitation universelle en connexion avec la formation des éléments chimiques. Moscou 1888.

Abhandlungsregister 1902.

Von E. WÖLFFING in Stuttgart.

[Die Abhandlungen, welche mir und meinen Mitarbeitern nicht zugänglich waren, sind mit * bezeichnet.]

Abkürzungen.

- | | |
|--|---|
| A.A.F.S. Atti dell' Acc. dei Fisiocritici, Siena 4. serie 13. | A.J.C. The Astrophysical Journal, Chicago 13—15. |
| A.A.I.G. Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des écoles spéciales, Gand 24. | A.J.S. American Journal of Science, New Haven 4. series 13—14. |
| A.A.M. Abh. der K. Bayr. Ak. der Wiss., München 21. | A.J.U. Allgemeines Journal für Uhrmacherkunde, Halle 26. |
| A.A.N. Atti della R. Acc. delle Scienze fis. e mat., Napoli 4. | A.M.A.P. Atti e Memorie della R. Acc. di Scienze, Lettere ed Arti, Padova 16. |
| A.A.P.M. Atti dell' Acc. Peloritana Messina 15—16. | A.M.T. Archives du Musée Teyler, Harlem 2 série 8. |
| A.A.S. Aus dem Archiv der deutschen Seewarte, Hamburg 23. | A.N. Archives néerlandaises, Harlem 2 séries 7. |
| A.A.T. Atti della R. Acc. Torino 37. | A.N.K. Astron. Nachrichten, Kiel 158; 160. |
| A.C.P. Annales de Chimie et de Physique, Paris 27. | A.ofM. Annals of Mathematics, Cambridge Mass. 2. series 3. |
| A.D.M. Annali di Matematica pura ed applicata, Milano 3. serie 7. | A.P.L. Annalen der Physik, Leipzig 4. Serie 8—9. |
| A.F. Comptes Rendus de l'Association franç. pour l'avancement des sciences 29 (Congrès d'Ajaccio). | A.R.L. Astronomische Rundschau Lussinpiccolo 3. |
| A.F.G.P. Archiv für die gesamte Physiologie, Bonn 87—91. | A.S.B. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Louvain 26. |
| A.G.L. Abh. der K. Sächs. Ges. der Wiss., Leipzig 27. | A.S.G.N. Annales de la Société géologique du Nord, Lille 29. |
| A.Gr. Archiv der Math. u. Phys., Leipzig 3. Serie 3—4. | A.S.M.F. Annales de la Société météorologique de France 50. |
| A.H. Annalen der Hydrographie u. maritimen Meteorologie, Hamburg 30. | A.S.U.J. Annales Scientifiques de l'Université, Jassy 2. |
| A.H.P. Annalen der Hydrographie, Petersburg 22—23. | A.T.K. Artilleri-Tidskrift, Kjöbenhavn 1901. |
| A.I.G. Annali idrografici, Genova 2. | A.U.J. Acta et Commentationes Imp. Univ. Jurjev. 1901. |
| A.I.K.G. Akten des internat. Kongresses katholischer Gelehrter, München 5. | A.V.A.S. Bihang till K. Svenska Vetenskaps Akademiens Handlingar, Stockholm 27. |
| A.I.V. Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere et Arti, Venezia 3. serie 3. | B.A. Bulletin Astronomique, Paris 19. |
| A.J.B. The Astronomical Journal, Boston 21—32. | B.A.B. Bulletin de l'Ac. Roy. des Sciences, des lettres et des Beaux Arts, Bruxelles 1901—02. |

- B.A.B.C. Bulletin de l'Association Belge de Chimie, Bruxelles 15.
 B.A.Co. Oversigt der K. Vidensk. Selskabets Forhandlingar Kjöbenhavn. 1901.
 B.A.M. Beiträge zur Akustik und Musikwissenschaft, Leipzig 3.
 B.D. Bulletin des Sciences math., Paris 2. série 26.
 B.D.M. Bolletino di Matematica, Bologna 1.
 B.G.L. Berichte der K. Sächs. Ges. der Wiss., Leipzig 53—54.
 B.H.Z. Berg- und Hüttenmännische Zeitung 1901.
 B.I. Biometrika, Cambridge 1.
 B.I.C. Bulletin international, Krakau 1901—02.
 B.M.E. Bulletin des Sciences Math. et Phys. élémentaires, Paris 7.
 B.M.N. Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Budapest 17.
 B.R.A.G. Bulletin der Russ. Astronom. Gesellschaft, Petersburg 8.
 B.S.A.F. Bulletin de la Société Astronomique de France 14.
 B.S.B. Bulletin de la Société Scientifique, Bukarest 11.
 B.S.B.A. Bulletin de la Société belge d'Astronomie, Bruxelles 6.
 B.S.M.F. Bulletin de la Société Minéralogique de France, Paris 25.
 B.S.V. Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne 4. série 38.
 B.U.K. Nachrichten der Universität Kiew 1901.
 B.U.Ka. Nachrichten der Universität Kasan 1901.
 B.U.W. Bulletin of the University of Wisconsin, Madison 2.
 B.V.A.S. Öfversigt af K. Svenska Vetenskaps Akad. Förhandlingar, Stockholm 58.
 C. Časopis, Prag 31.
 C.A.A. Verslagen der K. Ak. van Wetenschappen Amsterdam 9—10.
 C.A.C. Berichte der Ak. Krakau 41.
 C.I.A. Documents des Congrès internationaux d'Actuaires, Bruxelles 3.
 C.I.E. Congrès international d'Electricité, Paris 1.
 C.N. The Chemical News 85.
 Co. Cosmos Paris 2. série 44.
 C.P.L. Communications from the Physical Laboratory at the University, Leiden 72—76; 79.
 C.R. Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris 134—135.
 C.S.S. Comptes Rendus du Congrès des Sociétés savantes, Paris 1901.
 D.M. Der Mechaniker, Berlin 10.
 D.P.Z. Deutsche Photographenzeitung, Weimar 25.
 D.V.M. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 11.
 D.V.N. Verhandlungen der Deutschen Naturforscherversammlung, Leipzig 73 (Hamburg).
 D.W.B. Das Weltall, Berlin 1.
 D.Z.R. De Zee, Rotterdam 23.
 E.M. L'enseignement mathématique, Paris 4.
 E.M.W. The English Mechanic and World of Science, London 72—73.
 E.N. Engineering News 45.
 E.P. Elektricitet, Petersburg 1901.
 F.C. Forstwissenschaftliches Centralblatt, Berlin 24.
 F.T. Mémoires de l'Ac. des Sciences, Toulouse 10. série 1.
 G.M.B. Gazeta matematica, Bukarest 8.
 G.Z. Geographische Zeitschrift, Leipzig 8.
 H.H. Hansa, Hamburg 38.
 I.A.M. Illustrierte aeronautische Mitteilungen, Straßburg 6.
 I.M. L'Intermédiaire des Mathématiciens 9.
 I.P.F. Il Pitagora, Palermo 8—9.
 J.A.V.M. Jahresbericht und Abhandlungen des naturwiss. Vereins, Magdeburg 1900—02.
 J.B.A.A. Journal of the British Astronomical Association, London 11.
 J.E.P. Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris 2. séries 7.
 J.F.I. Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 152—153.
 J.I.E.E. Journal of the Institution of Electrical Engineers, London 31.
 J.M. Journal de Math. pures et appl. Paris 5. séries 7—8.
 J.P. Journal de Physique, Paris 4. séries 1.
 J.P.C. The Journal of Physical Chemistry, Ithaca 6.
 J.P.G.Z. Jahresbericht der Physikalischen Gesellschaft, Zürich 10.
 J.R.M.S. Journal of the Roy. Microscopical Society, London 1901.
 J.R.P.C.G. Journal der russ. physico-chemischen Gesellschaft, Petersburg 34.
 J.S.G. Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur, Breslau 78.
 J.S.G.B. Jahrbuch der schiffsbautechnischen Gesellschaft, Berlin 2.
 J.T. Mitteilungen der mathematisch-physikalischen Gesellschaft, Tokio 8—9.

- J.U.S.A. Journal of the United States Artillery, Fort Munroe, 1901—02.
 J.V.C. Jahresbericht des naturwiss. Vereins, Crefeld 1900—1901.
 K.L. Kosmos, Lemberg 24.
 K.Z. Kriegstechnische Zeitschrift, Berlin 5.
 L.E. L'Elettricista, Roma 10.
 M. Mathesis, Gand 3. série 2.
 M.A. Math. Annalen, Leipzig 55—56.
 M.A.C.B. Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes, Barcelona 3. serie 4.
 M.A.G. Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, Wien 1902.
 M.A.G.S. Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens, Pola 29.
 M.A.L.R. Memorie della R. Acc. dei Lincei, Roma 17.
 M.A.Ly. Mém. de l'Ac. des Sciences, Lyon 3. séries 6.
 M.A.M.F. Mitteilungen aus dem Markscheiderwesen, Freiberg, Serie 4.
 M.A.P. Mémoires de l'Ac. des Sciences, Paris 1902.
 M.A.T. Memorie della R. Acc. di Torino 2. serie 51.
 M.B. Math. Naturw. Mitteil., Stuttgart 2. Serie 4.
 M.F.I. Mitteilungen über Forschungen auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Berlin 5—6.
 M.H. Monatshefte f. Math. u. Physik, Wien 13.
 M.L.A.O. Meddelanden fran Lunds Astronomiska Observatorium, Lund 2—3; 13—15; 18.
 M.M.F. American Math. Monthly, Springfield 9.
 M.N.A.S. Monthly Notices of the Astronomical Society, London 61—62.
 M.P.D. Mitteilungen der Pollichia, Dürkheim 17.
 M.P.G.Z. Mitteilungen der physikalischen Gesellschaft, Zürich 1901—1902.
 M.P.L. Matematikai és fizikai lapok, Budapest 10.
 M.P.M. Natuur en Geneeskundig Congres, Amsterdam 1901.
 M.P.O. Bote der Experimentalphysik und Elementarmathematik, Odessa 27—28.
 M.R.B. Marine-Rundschau, Berlin 12.
 M.S.B. Mémoires de la Société des Sciences Phys. et Nat., Bordeaux 6 série 1.
 M.S.Co. Det K. Danske Videnskabernes Selskabets Skrifter, Kjöbenhavn 6. Raekke 9—10.
 M.S.P.A.O. Miscellaneous Scientific Papers of the Alleghany Observatory 2.
 M.S.S.I. Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, Catania 28—31.
 M.T.E. Matematikai és természettudományi értesítő, Budapest 18—19.
 M.T.G.W. Mitteilungen des Technologischen Gewerbemuseums, Wien 2. Serie 12.
 M.U.S.B. Mitteilungen der Universitätssternwarte Breslau 1.
 M.V.A.P. Mitteilungen des Vereins von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik, Berlin 11.
 M.V.T. Mitteilungen des Verbands der österreich-ungarischen Versicherungstechniker, Wien 1902.
 M.W.R. Monthly Weather Review, Washington 29—30.
 M.Z. Meteorologische Zeitschrift, Wien 19.
 N. Nature 66.
 N.A. Nouvelles Annales de Math. 4. séries 2.
 N.A.U. Nova Acta Reg. Soc. Scientiarum, Upsala 3. Serie 20.
 N.C.P. Il Nuovo Cimento, Pisa 5. serie 2—4.
 N.G.G. Nachrichten von der K. Ges. der Wiss., Göttingen 1901.
 N.M.L. Nautical Magazine, London 70.
 N.M.N. Nyt Magazin for Naturvidenskaberne, Christiania 40.
 N.O. Natur und Offenbarung, Münster 47—48.
 N.R. Naturwissenschaftliche Rundschau, Braunschweig 17.
 N.S. Natur und Schule, Leipzig 1.
 O.V.Z. Österreichische Versicherungszeitung, Wien 29.
 P.A. Popular Astronomy, Northfield Miss. 9.
 P.A.O.B. Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums, Budapest 2.
 P.A.O.P. Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums, Potsdam 12.
 P.A.S.F. Publications of the Astrophysical Society for the Pacific, San Francisco 13.
 P.C.P.S. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 11.
 P.E.M.S. Proceeding of the Edinburgh Math. Society, Edinburgh 20.
 P.L.M.S. Proceedings of the London Math. Society 34.
 P.M. Philosophical Magazine 6. series 3—5.
 P.M.R. Periodico di Matematica, Livorno 2. serie 4.

- Pol.M. Il Politecnico, Milano 1900—1901.
 P.P.S. Proceedings of the American Philosophical Society, Philadelphia 41.
 P.P.S.E. Proceed. of the Physical Society, Edinburgh 1900—1901.
 P.P.S.G. Proceed. of the Philos. Soc., Glasgow 31—32.
 P.P.S.L. Proceed. of the Phys. Soc., London 18.
 P.R. The Physical Review, New York 14—15.
 P.R.I. Proceedings of the Royal Institutions of Great Britain, London 16.
 P.R.L. Physical Review, Lancaster 18.
 P.R.S.E. Proceed. of the Roy. Soc., London 69.
 P.S.B. Procès verbaux de la Soc. des Sciences, Bordeaux 1900—1901.
 P.S.K. Publikationen der Sternwarte Kiel 11.
 P.Z. Physikalische Zeitschrift, Göttingen 3—4.
 Q.J. Quarterly Journal of Math., London 33.
 Q.J.M.S. Quart. Journal of the Meteor. Soc., London 28.
 R.A. Revue d'Artillerie, Paris 1901.
 R.A.G. Rivista di artiglieria e genio, Roma 1900—1901.
 R.A.L.R. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Roma 5. serie 11 A, B.
 R.A.N. Rendiconti della R. Acc. di Scienze fis. et mat., Napoli 3. serie 8.
 R.B.A. Reports of the British Association for the advancement of Science 71 (Meeting at Glasgow).
 R.C.L. Revista de Ciencias, Lima 5.
 R.C.M.P. Rendiconti del Circolo Mat., Palermo 16.
 R.F.M. Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali, Pavia 3.
 R.G.M.M. Revista general de Marina, Madrid 49.
 R.G.O. Revue générale des Sciences, Paris 12—13.
 R.I.H. Revue internationale d'Horlogerie 1.
 R.I.L. Rendiconti del R. Istituto Lombardo delle Scienze e Lettere, Milano 2. serie 34—35.
 R.M.B. Revista marítima brasileira, Rio de Janeiro 37—38.
 R.M.M.P. Revue maritime, Paris 147.
 R.M.R. Rivista marittima, Roma 34.
 R.Q.S. Revue de questions scientifiques, Louvain 1901.
 R.S. Revue Scientifique 4. séries 15; 17.
 R.T. La Rivista Tecnica 1.
 R.T.C. Rivista di Topografica e Catasto 14.
 R.T.C.P.B. Recueil de Travaux Chimiques des Pays-Bas et de la Belgique 2. séries 20.
 S. Science, New York 2. series 13—16.
 S.A.M. Sitzungsber. der math.-phys. Kl. der K. Bayr. Ak. der Wiss., München 1902.
 S.A.W. Sitzungsber. der math.-nat. Kl. der K. K. Ak. der Wiss., Wien 110—111.
 S.G.M. Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften, Marburg 1901—1902.
 S.I.D. Sitzungsber. der naturwiss. Gesellschaft Isis, Dresden 1902.
 S.M. Bulletin de la Soc. Math. de France 29—30.
 S.M.Am. Bulletin of the American Math. Soc. 9.
 S.M.B. Sitzungsberichte der math. Gesellschaft, Berlin 1.
 S.M.Ka. Bulletin der physico-mathematischen Gesellschaft, Kasan 11.
 S.M.Kh. Mitteilungen der math. Gesellschaft, Charkow 2, Serie 7.
 S.M.L. Science Monthly, Lancaster 60.
 S.M.M. Sammelchrift der Math. Gesellschaft. Moskau 22—23.
 S.N.G.B. Sitzungsber. der niederrhein. Ges. f. Natur- und Heilkunde, Bonn 1901.
 S.P. Bulletin de la Soc. Philomathique, Paris 9. série 3.
 S.P.M.E. Sitzungsber. der phys. med. Gesellsch., Erlangen 33.
 S.P.V.K. Sitzungsber. des physiolog. Vereins, Kiel 1899—1900.
 T.A.E.S. Transactions of the Amer. Electrochemical Soc. 1.
 T.M.W. Terrestrial Magnetism, Washington. 7.
 T.N.Z.I. Trans. and Proc. of the New Zealand Institute, Wellington 34.
 T.P.B. Taschenbuch für Präzisionsmechaniker, Berlin 3.
 T.R.I.A. Trans. of the Roy. Irish Acad., Dublin 31—32.
 T.R.S.L. Philos. Trans. of the Roy. Soc., London 198 A.
 T.S.M.Am. Transact. of the Amer. Math. Soc., New York 3.
 T.W. Praise matematyčno-fizyczne, Warschau 13.
 U.C. The University Chronicle, Berkeley 3.
 U.M.N. Unterrichtsblätter für Math. u. Naturwiss., Berlin 8.
 V.I.G.C. Verhandlungen des internationalen Geographenkongresses, Berlin 7.

- V.N.Z. Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft. Zürich 47.
 W.A.B. Das Weltall, Berlin 2.
 W.M. Wiadomosci matematyczne, Warschau 6.
 Z.B.B. Zeitschr. f. Binnenschifffahrt, Berlin 8.
 Z.B.D. Zeitschr. des bayr. Dampfkesselrevisionsvereins, München 5.
 Z.B.W. Zeitschrift für Beleuchtungswesen 7.
 Z.G.V. Zeitschr. f. die gesamte Versicherungswissenschaft, Berlin 1901.
 Z.K.M. Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie, Berlin.
 Z.L.H. Zeitschr. f. Lüftung und Heizung, Berlin 7.
 Z.Ö.C.P. Zeitschr. f. öffentliche Chemie, Plauen 7.
 Z.P. Zeitschrift für phys. u. chem. Unterricht 15.
 Z.P.C. Zeitschr. f. physikalische Chemie, Leipzig 39—42.
 Z.P.P. Zeitschrift f. Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Leipzig 27.
 Z.S. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Leipzig 48.

A. Allgemeines und Philosophie.

Geschichte der angewandten Mathematik.

1. R. Mehmke. Wer hat den Läufer des Rechenschiebers zuerst erfunden? Z.S. 48. 184.

Absolutes Maßsystem.

2. H. Andriessen. Das absolute Maßsystem. U.M.N. 8. 50.

3. N. A. Heschus. Die gemeinsame Dimensionalität des elektrischen Potentials und der Oberflächenspannung. P.Z. 3. 561.

Logikkalkül.

4. P. S. Poretsky. Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques. S.M.Ka. 11. 17.

B. Analysis und Algebra.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

5. P. A. Nekrasov. Novyya osnovaniya učenija o verojatnostjach summ i srednich veličin. (Neue Grundlagen der Theorie der Summen und Mittelwerte.) S.M.M. 23. 41. 173.
 6. P. Mansion. Théorèmes de Jacques Bernoulli. A.I.K.G. 5. 427.
 7. *d'Arçais. Un problema di calcolo della probabilità. A.M.A.P. 16.
 8. *A. Badoureaux. Récréation mathématique. R.S. (4.) 17. 650.
 9. C. Moreau. Solution d'un problème de probabilité. A.Gr. (3) 4. 184.
 10. H. Delannoy. Problème de probabilité. I.M. 9. 97.
 11. *I. I. Bjelankin. Über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, die sich wiederholen (russ.). B.U.K. 1902 Nr. 2 (7).
 12. W. Gosiewski. O zadaniu petersburskiem (Über das Petersburger Problem). W.M. 6. 167.
 13. *Whitney. Evolution and the theory of probability. U.C. 3.
 Siehe auch 763.

Methode der kleinsten Quadrate.

14. K. Böhlin. Sur l'extension d'une formule d'Euler. B.V.A.S. 58. 779.
 15. *A. L. Andreini. Intorno a 2 teoremi relativi alla teorica dei minimi quadrati. R.T.C. 14. 152.
 16. E. Goedseels. Sur l'application de la méthode de Cauchy aux moindres carrés. A.S.B. 26. 148.

Fehlerrechnung.

17. *A. v. Obermayer. Ein Apparat zur Veranschaulichung des Fehlergesetzes. M.A.G. 80. 130.
 18. *L. Hermann. Kurvenanalyse und Fehlerrechnung. A.F.G.P. 89. 600.
 19. *E. Lindelöf. Zur Frage von der Bedeutung der Fehlerrechnung bei der harmonischen Analyse von Kurven. A.F.G.P. 87. 597.
 20. C. Trépied. Influence des erreurs instrumentales sur les coordonnées rectilignes des astres photographiés. C.R. 134. 1097.
 21. *Luedecke. Methode zum Messen der Abweichungen der Bohrlöcher von

ihrer ursprünglichen Richtung. B.H.Z. 1901. 276.

22. *K. Pearson*. On the mathematical theory of errors of judgement. T.R.S.L. 198. A. 235.

23. *V. Baggi*. Sul modo di eliminare l'errore dovuto alla disugualianza dei diametri dei collari nei livelli a cannocchiale mobile. A.A.T. 37. 545.

24. **V. Baggi*. Proposto di un nuovo tipo di livello a cannocchiale atto ad eliminare qualsiasi errore strumentale. R.T.C. 14. 161.

Siehe auch 90; 249; 703.

Politische Arithmetik.

25. *D. Hector*. Mathematical treatment of the problem of production; rent interest and wages. T.N.Z.I. 34. 514.

26. **A. Torrents y Monner*. Comparacion matematica entre los distintos modos de calcular los descuentos simple y compuesto. M.A.C.B. (3) 4. No. 10.

Siehe auch 22.

Rentenrechnung.

27. *C. Disler*. Die Auszahlungsweise in ihrem Einfluß auf die Rentenwerte. Ö.V.Z. 29. No. 45.

Siehe auch 25.

Statistik.

28. *E. Ökinghaus*. Die mathematische Statistik in allgemeinerer Entwicklung und Ausdehnung und die formale Bevölkerungstheorie. M.H. 13. 294.

29. *K. Pearson*. Mathematical contributions to the theory of evolution XI. P.R.S.L. 89. 330.

30. *M. A. Levens* and *M. A. Whiteley*. Data for the problem of evolution in man. Bi. 1.

31. *E. G. Brown*. On the phenomena of variation and their symbolic expression. T.N.Z.I. 34. 519.

32. **K. Pearson*. On the systematic fitting of curves to observations and measurements I. Bi. 1.

33. *E. Huber*. Die neueren englischen Sterblichkeitsmessungen. M.V.T. 1902. Heft 6.

34. *K. Pearson*. On the inheritance of the mental characters in man. P.R.S.L. 69. 153.

35. **K. Pearson*. On the correlation of intellectual ability with the size and shape of the head. P.R.S.L. 69. 333.

36. **W. Bateson*. Heredity differentiation and other conceptions of biology. P.R.S.L. 69. 193. — *K. Pearson* 450.

Siehe auch 13.

Versicherungsmathematik.

37. *B. Oster*. Über die Herleitung der Formeln für Lebensversicherungsprämien. A.G. (3) 4. 44.

38. *M. E. Hamsa*. Note sur la théorie mathématique de l'assurance contre le risque d'invalidité. C.I.A. 3. 154.

39. *T. Falkowicz*. Die Invalidität mit Ausschluß des Unfallrisikos zum Gebrauch für Arbeiterpensionskassen. M.V.T. 1902. Heft 7.

40. *G. Bohlmann*. Ein Satz von Wittstein über das durchschnittliche Risiko. M.V.T. 1902. Heft 7.

41. *K. Dickmann*. Die doppelte Gruppierung der Versicherungen der Prämienreserve. Z.G.V. 3. 56.

42. *E. Hoppe*. Gemischte Kapitalversicherung mit unbedingtem Anspruch auf Prämienrückgewähr. Ö.V.Z. 29. No. 25 ff.

43. *H. Onnen* et *J. H. Peek*. Méthode de détermination et de répartition des bénéfices réalisés dans l'assurance sur la vie. C.I.A. 3. 278.

44. *Sprague*. Berechnung des Abzugs vom Deckungskapital beim Rückkauf. Z.G.V. 2. Ergänzungsheft.

Splele.

45. *H. Delannoy*, *H. Brocard*. Question de dominos. I.M. 9. 62.

46. *F. Fitting*. Weiterer Beitrag zur verallgemeinerten Rösselsprungaufgabe. A.Gr. (3) 3. 136.

47. *Duporcq*. Problème du billard elliptique. I.M. 8. 29.

48. *C. Flye Ste Marie*. Le jeu de la Tchouka. I.M. 9. 207.

Siehe auch 12.

Numerisches Rechnen.

49. **F. Ferrol*. Ein Beitrag zum praktischen Rechnen. D.W.B. 1. 206.

50. *L. D. Ames*. Evolution of slowly convergent numbers. A.S.M. 3. 185.

51. *R. Grilli*. Metodo di Horner per eseguire la divisione di due polinomi. P.P.F. 8. 86.

52. *J. W. Butters*. On decimal coinage and approximation. P.E.M.S. 20. 50.

Analytische Näherungsmethoden.

Siehe 707.

Numerische Gleichungen.

53. *F. Giudice*. Esistenza, calcolo e differenze di radici d'equazioni numeriche. R.C.M.P. 16. 180.

54. *A. Pellet*. Calcul des racines d'une équation. I.M. 9. 156.

55. *F. J. van den Berg*. Over Newtons benaderingsleerwijze voor de oplossing van vergelijkingen. C.A.A. 9. 53.

56. *C. A. Mebius*. Auflösung der Gleichungen 3., 4. und 5. Grades durch besondere Funktionen. B.V.A.S. 58. 105.

Interpolation.

57. *C. Alasia*. Un capitolo al teorie interpolazioni (Ein Kapitel aus der Theorie der Interpolation). G.M.B. 8. 55.

58. *T. C. Hudson*. A new method of interpolation. M.N.A.S. 62. 17.

59. *R. T. A. Innes*. On interpolation. P.A. 9. 389.

60. *N. V. Bugaev*. O rjade podobnom rjadu Lagranža (Über eine Reihe ähnlich der Reihe von Lagrange). S.M.M. 22. 574.

61. *H. S. Davis*. Note on the interpolation of logarithms. A.J.B. 21. 143.

62. *J. Hartmann*. Über eine einfache Interpolationsformel für das prismatische Spektrum. P.A.O.P. 12. Anhang 1.

Mittelwerte.

63. *H. C. Plummer*. Note on the principle of the arithmetic mean. M.N.A.S. 62. 545.

Siehe auch 5; 209.

Harmonische Analyse.

64. *L. Grabowski*. Theorie des harmonischen Analysators. S.A.W. 110. 717.

Siehe auch 18; 19; 794.

C. Geometrie.**Nomographie.**

65. *M. d'Ocagne*. Sopra alcuni principi elementari di nomografia. P.M.R. (2) 4. 247.

66. **Ricci*. La nomografia. R.A.G. 1900 Dez. 1901 Jan.

67. *M. d'Ocagne*. Sur quelques travaux relatifs à la nomographie. B.D. (3) 26. 67.

68. **—*. Sur la représentation nomographique des formules à 3 variables. R.A. 1901 Sept.

69. **G. Boccardi*. Di alcuni diagrammi astronomici. M.S.S.J. 29. 175.

70. **Molfino*. Nomogrammi dell'azimut. A.J.G. 2.

Siehe auch 375.

Graphischer Kalkul.

71. **G. Arnoux*. Arithmétique graphique. A.F. 29. 31.

72. *K. T. Fahlen*. Über kubische Konstruktionen. A.Gr. (3) 3. 112.

73. *J. Sobotka*. Úvahy o grafickém integrování diferencialních rovnic hlavně lineárných prvního řádu. (Betrachtungen über die graphische Integration von Differentialgleichungen, insbesondere der linearen 1. Ordnung). C. 31. 265.

74. *N. E. Delaunay*. Графическое построение эллиптических и некоторых ультраэллиптических функций. (Graphische Konstruktion der elliptischen und einiger ultraeelliptischen Funktionen.) S.M.M. 23. 24.

75. **S. Stokes*. Keplers Problem. E.M.W. 72. 530. — S.G.B. 576.

76. **S. B. G.* Graphical method of finding the excentric anomaly. E.M.W. 72. 491.

Siehe auch 80; 117; 420; 562; 668; 701; 706.

Winkeltteilung.

77. *E. Wölffing*. Bibliographie der 3- und n -Teilung des Winkels III. M.B. 4. 75.

78. *H. Schöler*. Angenäherte n -Teilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal. A.Gr. (3) 4. 128.

79. *E. Lampe*. Bemerkungen über einige angenäherte n -Teilungen von Winkeln. A.Gr. (3) 4. 130.

80. *E. B. Escott, N. Quint, Goulard*. Constructions graphiques approchées des polygones réguliers de 7, de 9 et de 11 côtés. I.M. 9. 238.

Siehe auch 184.

Kurven.

81. *C. Juel*. Inledning i laeren om de grafske Kurver. M.S.Co. (6) 10. 1.
Siehe auch 654.

Verbindungskurven.

82. **A. Neuber*. New device for drawing railway curves. E.N. 45. 249.
83. **C. Daviso*. Le svolte stradali a due cerchi circolari. R.T.C. 14. 173.
84. **E. E. Woodman*. A problem in railway location: reserve curve connecting two given points. E.N. 45. 266. — *C. B. Breed* 397. — *R. A. Thompson* 398.

Geometrische Näherungsmethoden.

85. *B. Carrara*. I 3 problemi classici degli antichi, in relazione ai recenti risultati della scienza. R.F.M. 3. 296; 481; 696.
86. *J. E. Böttcher*. Anschauliche Kreisberechnung. U.M.N. 8. 113.
87. *T. Muir*. Formula for the perimeter of an ellipse. N. 66. 174.

Inhalte.

88. **F. T. Lewis* etc. Rapid earth work calculating; prismoidal correction formulae. E.N. 45. 30; 31; 170; 190. 286.

Mechanische Quadratur.

89. **E. Strömberg*. Über mechanische Integration und deren Verwendung für numerische Rechnungen auf dem Gebiete des Dreikörperproblems. M.L.A.O. 13.

Rechenapparate.

90. **H. Sossna*. Ergebnisse einer Zuverlässigkeitsuntersuchung mit der Rechenmaschine Brunsviga. M.A.M.F. (2) 4. 43.
91. *T. H. Blakesley*. On a method of mechanically obtaining ϕ from the hyperbolic trigonometric functions of ϕ . P.M. 4. 238.
92. *N. Delaunay*. Sur les calculateurs cinématiques des fonctions elliptiques. B.D. (2) 26. 177.

Rechenschieber.

93. **H. Thiele*. Über die Verwendung des Rechenschiebers im Laboratorium. Z.Ö.C.P. 7. 467.
Siehe auch 1.

Geometrischer Kalkül.

94. *F. L. Hitchcock*. On vector differentials. P.M. 3. 576.

Quaternionen.

95. *F. Daniels*. Sur le calcul des quaternions. E.M. 4. 111.
96. **A. L. Dixon*. On the geometrical interpretation of a quaternion. Q.J. 33. 271.
97. **C. J. Joly*. The interpretation of a quaternion as a point symbol. T.R.I.A. 32. 1.
98. **A. S. Hathaway*. Quaternion space. T.S.M.Am. 3. 46.
99. **C. J. Joly*. On quaternion arrays. T.R.I.A. 32. 17.
100. *Combebiac*. Calcul des triquaternions. J.E.P. (2) 7. 101.

Zeichenwerkzeuge.

101. *A. Adler*. Zur Theorie der Zeicheninstrumente. S.M.B. 1. 26.
102. *J. Kürschak*. Das Streckenabtragen. M.A. 55. 597.
103. *C. Pagliano*. Sull' uso del compasso di apertura fissa nella risoluzione dei problemi della geometria elementare e sulla sostituzione di un disco al predetto compasso. B.D.M. 1. 201.
104. *J. N. Miller*. On an instrument for trisecting any angle. P.E.M.S. 20. 7.
105. *W. R. Ransom*. A mechanical construction of confocal conics. A. of M. 3. 164.
Siehe auch 92.

Darstellende Geometrie.

106. *A. Adler*. Zur sphärischen Abbildung der Flächen und ihrer Anwendung in der darstellenden Geometrie. D.V.M. 11. 271.
107. *A. Hume*. Meridian and transverse sections of helicoids of uniform pitch. M.M.F. 9. 123.

Projektion.

108. *G. Hauck*. Über uneigentliche Projektionen. S.M.B. 1. 34.
109. *G. Hauck*. Über die Beziehungen zwischen 3 Parallelprojektionen eines räumlichen Systems. D.V.M. 11. 265. D.V.N. 73. 24.
110. *S. L. Penfield*. On the use of the stereographic projection for geographical maps and sailingcharts. A.J.S. (4) 13. 245; 347.

111. *H. Schmidt*. Die stereoskopische Projektion. D.P.Z. 25. 844.

Siehe auch 780.

Perspektive.

112. *A. v. Öttingen*. Eine Forderung der malerischen Perspektive vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet. B.G.L. 53. 443.

Photogrammetrie.

113. **B. Hasselberg*. Sur une équation personnelle dans la mesure des clichés spectroscopiques. M.S.S.I. 31.

114. *P. Henry*. Influence de la grandeur photographique des étoiles sur l'échelle de réduction d'un cliché. C.R. 134. 1483.

Siehe auch 20.

Kristallographie.

115. **H. Dufet*. Notices crystallographiques. B.S.M.F. 25. 38.

116. *J. G. Goodchild*. Simpler methods in crystallography. P.P.S.E. 1900—1901. 408.

117. *S. L. Penfield*. Solution of problems in crystallography by means of graphical methods. A.J.S. 14. 249.

118. **A. Schmidt*. Über die Klassifikation der Krystalle (ung.). M.T.E. 18.

119. **V. Goldschmidt*. Über Winkelprojektionen. Z.K.M. 86. 388.

120. **J. Beckenkamp*. Die vicinalen Flächen und das Rationalitätsgesetz. Z.K.M. 86. 111.

Modelle.

121. *V. Snyder*. Models of the Weierstrass Sigma function and the elliptical integral of the second kind. M.M.F. 8. 121.

122. *F. Schilling*. Neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie und ihre Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen. D.V.M. 11. 268; D.V.N. 73. 23.

D. Mechanik.

Prinzipien der Mechanik.

123. *Combebiac*. Les idées de Hertz sur la mécanique. E.M. 4. 247.

124. **H. A. Lorents*. Eenige beschouwingen over de grondstellingen der mechanica. C.A.A. 10. 876.

125. *R. Heger*. Energetik im Unterricht. U.M.N. 8. 58.

126. **P. Duhem*. Sur quelques extensions récentes de la statique et de la dynamique. R.Q.S. 1901 Juillet.

127. *T. Schwartze*. Dynamische Betrachtungen über mechanische Fundamentalebegriffe. U.M.N. 8. 87.

128. **J. Geyser*. Zum Begriff der Bewegung. N.O. 48. 52.

129. **C. Fenzl*. Messender Versuch über den Zusammenhang von Bewegungsgröße u. Druck. Z.P. 15. 141.

130. *C. H. Hinton*. The recognition of the fourth dimension. B.S.W. 14. 179.

131. **O. Reynolds*. On the sub-mechanics of the Universe. P.R.S.L. 69. 425.

132. *C. A. Laisant*. Analogies entre les courbes funiculaires et les trajectoires d'un point mobile. N.A. (4) 2. 243.

Siehe auch 600.

Kinematik.

133. *R. v. Lilienthal*. Die Geometrie der Bewegung in ihrer Anwendung auf die Differentialgeometrie. D.V.N. 73. 6.

134. *K. T. Vahlen*. Über Bewegungen und komplexe Zahlen. M.A. 55. 585.

135. **J. Cardinaal*. Over de beweging van veranderlijke stelsels. C.A.A. 10. 560; 687.

136. *G. O. James*. Note on the projection of the absolute acceleration in relative motion. S.M.Am. 9. 143.

137. *F. Kraft*. Équivalence du mouvement d'une ligne droite invariable σ au déplacement d'une position donnée σ_1 à une autre position donnée σ_2 . E.M. 4. 347.

138. *F. Kraft*. Équivalence des rotations autour d'axes parallèles et des translations d'un système invariable. E.M. 4. 175.

139. *G. Léry*. Sur les mouvements pour lesquels il existe plusieurs centres d'aires. N.A. (4) 2. 97.

140. *G. Fubini*. Sugli spazi a quattro dimensioni che amettono un gruppo continuo di movimenti. R.A.L.R. 11 B. 53.

141. *V. Rouquet. Note sur la surface réglée engendrée par une droite faisant partie d'un système invariable mobile. F.T. (10) 1. 9.

142. R. F. Muirhead. Note on the theory of rolling of one rigid surface on another. P.E.M.S. 20. 8.

143. G. Koenigs. Sur l'assemblage de deux corps. C.R. 135. 343.

Siehe auch 122.

Schraubenrechnung.

144. A. Grünwald. Sir Robert S. Ball's lineare Schraubengebiete. Z.S. 48. 49.

145. *R. S. Ball. On further developments of the theory of screws. T.R.I.A. 31. 473.

Mechanismen.

146. J. Réville. Note sur un système articulé. N.A. (4) 2. 127.

147. *G. Picciati. Le funzione di Weierstrass nella cinematica del quadrilatero articolato. A.I.V. (8) 3. 301.

148. C. Burali Forti. Ingranaggi piani. A.A.T. 37. 391.

149. E. Delassus. Sur les engrenages à contact ponctuel. S.M. 30. 43.

Siehe auch 92; 122.

Statik.

150. C. Lagrange. Sur la prétendue indétermination des réactions dans les équations de l'équilibre des corps indéformables B.A.B. 1901. 428. 535.

151. *D. Seiliger. Über einen Fundamentalsatz der Statik eines ähnlich veränderlichen Systems (russ.). B.U.Ka. 1901. 75.

152. *G. Lehr. Composition des forces parallèles. B.M.E. 7. 33.

153. A. Dittrich. Jak treba zvoliti vazby a sily, aby soustava jimi daná dala se realizovati. (Wie muß man die Verbindungen und Kräfte wählen, damit ein gegebenes System derselben sich verwirklichen läßt). C. 31. 283; 406.

154. L. Gumbel. Der transversal belastete Stab mit unverrückbaren oder nach bestimmtem Gesetze und Richtung der Achse nachgiebigen Auflagern. D.V.N. 73. 86.

Siehe auch 271—273.

Graphische Statik.

155. K. Skutsch. Graphische Zerlegung einer Kraft in 6 Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien. S.M.B. 1. 59.

156. M. Piretti. Contributo alla trattazione grafica dell'arco continuo su appoggi elastici. M.A.T. 51. 307.

Schwerpunkte.

157. M. d'Ocagne. Sur les barycentres, cycliques dans les courbes algébriques. S.M. 30. 83.

158. E. Wastels. Sur le centre de gravité des figures sphériques. M. (3) 2. 217.

Momente.

159. *Jorini. Singolarità nei valori dei momenti resistenti. Pol.M. 1901. Aug. Sept.

160. S. Jolles. Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes. A.Gr. (3) 4. 100.

161. *G. K. Suslow. Über die Reaktionen (russ.). B.U.K. 1901. No. 11 b.

Kettenlinien.

162. *Aliquò-Massey. Sull'equilibrio delle linee telegrafiche aree considerate come curve funicolari. R.A.G. 1901. Oct. Nov.

Siehe auch 132.

Dynamik des Punktes.

163. R. Mehmke. Anschauliche Beschreibung einiger Bewegungen. M.B. (2) 4. 65.

164. E. Daniele. Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano. R.A.L.R. 11 A 362; 427.

165. E. Daniele. Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie. R.A.L.R. 11 B 4.

166. C. Maltésos. Sur la chute des corps dans le vide et sur certaines fonctions transcendantes. N.A. (4) 2. 197.

Siehe auch 132.

Zentralbewegung.

167. V. Jamet. Sur la théorie des forces centrales. N.A. (4) 2. 348.

168. C. H. C. Grinwis. De kinetische energie der centrale beweging. C.A.A. 9. 211.

169. *P. J. Suchar.* Sur une loi de force centrale déterminée par la considération de l'hodographe. N.A. (4) 2. 123.

Pendel.

170. *D. Efremov.* Novyj vyvod formuly majatnika (Neue Herleitung der Pendelformel). M.P.O. 28. 106.

171. *A. Denizot.* O pewnem zagadnieniu Eulera o wahadle (Über eine gewisse Aufgabe Eulers über das Pendel). T.W. 13. 1.

172. *Greenhill.* Le pendule simple sans approximations. N.A. (4) 2. 241.

173. *M. Sparre.* Sur le mouvement du pendule conique dans le cas des petites oscillations. A.S.B. 26. 183.

174. *G. Neumayr.* Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels auf absolutem Wege. A.A.M. 21. 479.

Siehe auch 187.

Dynamik des Körpers.

175. *L. Lecornu.* Sur les petits mouvements d'un corps pesant. S.M. 30. 71.

176. *G. Combebiac.* Sur la force vive utilisable. S.M. 29. 314.

177. **P. V. Voronec.* Bewegungsgleichungen eines schweren Körpers, der auf einer horizontalen Ebene ohne zu gleiten rollt (russ.). B.U.K. 1901. No. 11b.

178. **T. Kármán.* Die Bewegung eines schweren Stabes, der sich mit einem runden Ende an eine horizontale Ebene stützt (ung.). M.P.L. 10. 34; 69; 131.

179. *B. de Francesco.* Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. M.A. 55. 573.

Siehe auch 295.

Dynamik des Systems.

180. **D. Seiliger.* Studien der Dynamik eines Systems (russ.). B.U.Ka. 1901. 51; 88.

181. **A. Malipiero.* Sulla trasformazione delle equazioni. A.I.V. (8) 3. 469.

182. *P. V. Voronec.* Ob uravnenijach dyzlenija dlja negolonomnych sistem (Über die Bewegungsgleichungen nicht-holonomer Systeme). S.M.M. 22. 659.

183. *(I. K. Suslov.* Ob odnom iznenu-nii načala D'alamberta (Über eine Modifikation des d'Alembertschen Prinzips). M.M.M. 22. 687.

184. *P. Burgatti.* Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano. R.A.L.R. 11 A 309.

185. *P. Duhem.* Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. J.M. (5) 8. 5.

186. **G. Picciati.* Sui moti stazionari di sistemi olonomi soggetti a forze conservative in casi particolari. A.A.V. 4, 405.

187. **F. W. Riffert.* Die der Kraftausnutzung günstigste Neigung der Antriebshebelflächen von Pendelhemmungen. A.J.U. 26. 135.

188. *W. Ebert.* Gesichtspunkte zur Verwendung der Jacobischen Methode zur Behandlung dynamischer Differentialgleichungen. D.V.N. 73. 20.

189. **Orazza.* Contributo alla teoria dei freni ad attrito. Pol.M. 1900. Dez.

190. *M. Ringelmann.* Sur une méthode de comparaison des moteurs de différentes puissances. C.R. 134. 1293.

191. *M. Radakovic.* Über die Bewegung eines Motors unter Berücksichtigung der Elastizität seines Fundamentes. Z.S. 48. 28.

192. *A. Petot.* Sur les conditions de la stabilité des automobiles dans les courbes. C.R. 134. 765.

193. *F. Jung.* Zur geometrischen Behandlung des Massenausgleichs bei vierkurbeligen Schiffsmaschinen. Z.S. 48. 108.

Siehe auch 204; 553.

Drehung.

194. **C. Barus.* The general equations of rotation of a rigid body S. (2) 13. 914.

195. *A. Mayer.* Symmetrische Lösung der Aufgabe, die Rotation eines starren Körpers, dessen Winkelgeschwindigkeiten bereits gefunden wurden, vollständig zu bestimmen. B.G.L. 54. 53.

196. *G. Kolossoff.* Über eine Eigenschaft der Differentialgleichungen der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt im Falle von Frau S. Kowalewski. M.A. 56. 265.

197. **K. Laves.* On the rotatory motion of a body of a variable form. A.J.B. 22. 61.

198. *A. Demoulin.* Formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues. M. (3) 2. 185.

199. *E. Jahnke.* Über Drehungen im n-dimensionalen Raume. D.V.N. 73. 5.

Kreisel.

200. *A. G. Greenhill. The mathematical theory of the top. S. (2) 15. 712.
 201. R. Marcolongo. Teoria del giroscopio simmetrico pesante. A.D.M. (3) 7. 99.
 202. H. E. J. G. du Bois. Gepolarisierde asymmetrische tollen. C.A.A. 10. 415; 504.

Siehe auch 250; 623.

Reibung.

203. A. Mayer. Zur Theorie der gleitenden Reibung. B.G.L. 53. 235.
 204. J. J. Taudin Chabot. Über die Antifriktionslagerung und über ein Dynamometer für kleine Kräfte. P.Z. 3. 513.

Siehe auch 189; 205; 219; 237.

Stoß.

205. A. Mayer. Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung. B.G.L. 54. 208. 327.
 206. *K. Szily jun. Der Stoß rauher Körper (ung.) M.T.E. 19. 286.

Potentialtheorie.

207. P. Paci. Generalizzazione di un teorema di Gauss. R.C.M.P. 16. 192.
 208. H. Petrini. Continuité et discontinuité des dérivés du potentiel. B.V.A.S. 58. 633.
 209. E. R. Neumann. Zur Integration der Potentialgleichung vermittelt C. Neumanns Methode des arithmetischen Mittels. M.A. 56. 49.
 210. O. M. Ljapunov. Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet. S.M.Kh. (2) 7. 229.
 211. R. Marcolongo. Sulla funzione di Green di grado n per la sfera. R.C.M.P. 16. 230.

Siehe auch 283; 536; 554.

Attraktion.

212. Salet. L'attraction dans l'Univers stellaire. B.A. 19. 225.

Siehe auch 534; 618.

Gravitation.

213. *D. Goldhammer. Eine Wiedererweckung der Hypothese von Le Sage zur Erklärung der allgemeinen Gravitation. B.U.Ka. 1901. 1.

214. *V. Cremieu. A new point of view about gravitation. R.B.A. 71. 561.

215. P. Lebedew. Die physikalische Ursache der Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetze. P.Z. 4. 15.

Siehe auch 271; 752; 753.

Hydrostatik.

216. A. Féraud. Sur la stabilité de de l'équilibre relatif d'une masse fluide. B.A. 19. 143.

217. *H. Haedicke. Der Angriffspunkt des Auftriebs. J.S.G.B. 3. 283.

Hydrodynamik.

218. L. Natanson. Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux. B.I.C. 1902. 19.

219. L. Natanson. Über die Fortpflanzung einer kleinen Bewegung in einer Flüssigkeit mit innerer Reibung. Z.P.C. 40. 581.

220. *E. Fontaneu. Du mouvement stationnaire des liquides. A.F. 29. 176.

221. E. Laura. Sul moto parallelo ad un piano di un fluido in cui vi sono n vortici elementari. A.A.T. 37. 469.

222. G. H. Darwin. The pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. P.R.S.L. 69. 147; T.R.S.L. 198 A. 301.

223. H. Poincaré. Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation. P.R.L.S. 69. 148; T.R.S.L. 198 A. 333.

224. P. Duhem. Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. J.M. (5) 7. 331.

225. P. Duhem. La viscosité au voisinage de l'état critique. C.R. 134. 1272.

226. P. Duhem. Sur les fluides compressibles visqueux. C.R. 134. 1088.

227. de Bussy. Résistance due aux vagues satellites. C.B. 134. 813; 882.

228. F. Klein. Mechanische Wirkungen schwingender Körper. S.P.V.K. 1899 bis 1900. 44.

229. *C. Zakrzewski. Sur les oscillations d'un disque plongé dans un liquide visqueux. B.I.C. 1902. 235.

230. W. Stekloff. Remarque sur un problème de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sur le problème de M. de Brun. C.R. 135. 526.

231. *A. Fliegner*. Der Druck in der Mündungsebene beim Ausströmen elastischer Flüssigkeiten. V.N.Z. 47. 21.

232. **H. T. Barnes and E. G. Coker*. On a determination by a thermal method of the variation of the critical velocity of water with temperature. R.B.A. 71. 579.

233. **Bazin*. Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux. M.A.P. 1902.

234. **O. Büsser*. Die Widerstandsformel für Binnenschiffe. Z.B.B.E. 365; 391.

235. *D. de Francesco*. Alcune formule della meccanica dei fluidi in uno spazio a 3 dimensioni di curvatura costante. R.A.N. (3) 8. 131.

Siehe auch 364; 367; 734.

Wirbel.

236. *Jouget*. Le théorème des tourbillons en thermodynamique. J.M. (5) 7. 235

237. *K. Zorawski*. O własnościach pewnej calki wielokrotnej, będącej nogólnieniem dwóch twierdzeń z teorii wirów (Über die Eigenschaften eines gewissen mehrfachen Integrals, welche zwei Lehrsätze in der Theorie der Wirbel verallgemeinern). T.W. 13. 107.

Siehe auch 221.

Aerodynamik.

238. **C. E. Guillaume*. Note on the Unity of pressure. R.B.A. 71. 71.

239. — Die Bewegung der Luft in einem zu lüftenden Raume. Z.L.H. 7.

240. **F. Ritter*. Hervorragungen und Winddruck. I.A.M. 6. 88.

241. **E. C. Séverin*. Application du principe d'Archimède aux gaz. A.S.U.J. 2. 45.

242. *V. Blaess*. Über Ausströmungsversuche mit gesättigtem Wasserdampf. P.Z. 4. 82.

Äußere Ballistik.

243. *F. Siacci*. Alcune nuove forme di resistenza che riducano il problema balistico alle quadrature. R.A.G. 1901. Mai—Aug., Okt.—Nov.

244. **Siacci*. Sulla velocità minima. R.A.G. 1901. März; April; Okt.

245. — La velocità minima ed alcuni articoli di signor colonello N. Sabudski. R.A.G. 1901. Oktober.

246. *J. Kosak*. Berechnung der Objektschießtafeln aus den allgemeinen Schießtafeln. M.A.G. 1902. 453.

247. *F. Kosak*. Berechnung der allgemeinen Schießtafeln und deren Benutzung zur Lösung von Aufgaben aus der Schießlehre. M.A.G. 1902. 651; 893.

248. *Krause*. Die Witterungsverhältnisse und ihr Einfluß auf die Flugbahn des 8 mm Geschosses. K.Z. 5. 433.

249. *B. Schöffler*. Das Gesetz der zufälligen Abweichungen. M.A.G. 1902. 97; 366.

250. *F. E. Harris*. Experiments in illustration of the top-motion of rotating oblong projectiles. J.U.S.A. 1901 Mai bis Juni; Sept.—Dez.

251. — Upon the form of the head of oblong projectiles which encounters the minimum resistance to motion from the air. J.U.S.A. 1901. Sept.—Dez.

252. *J. M. Williams*. A discussion of the errors of cylindre-ogival projectiles. J.U.S.A. 1901 Sept.—Dez.; 1902 Jan.—April.

Siehe auch 576. 578.

Innere Ballistik.

253. *E. Vallier*. Sur le loi de la pression dans les branches à feu. C.R. 135. 314.

254. *C. Crans und K. R. Koch*. Untersuchung über die Vibration des Gewehrlaufes. II. A.A.M. 21. 557.

255. *—. Berechnung von Anfangsgeschwindigkeiten auf Grund der an der Mündung gemessenen Geschossgeschwindigkeit. A.T.K. 1901. Heft 2—3.

256. *R. Kühn*. Rohrrücklaufgeschütze, deren Aufbau und Beanspruchung. M.A.G. 1902. 551.

257. *Rieckeher*. Anwendung der elektrischen Momentphotographie auf die Untersuchung von Schußwaffen. K.Z. 5. 417.

258. **Spaccamela*. Formola più appropriate per stabilire la carica di una mina nella demolizione di rocce e mura. R.A.G. 1901 Sept.

E. Mathematische Physik.

Prinzipien der mathematischen Physik.

259. *S. Zaremba. Beitrag zur Theorie einer Gleichung der mathematischen Physik. B.I.C. 1901. 477.

260. *A. Müller. L'hypothèse de la continuité. R.S. (4) 15. 335.

261. J. Farkas. Allgemeine Prinzipien für die Mechanik des Äthers (ung.). M.T.E. 19. 99.

262. *B. Hopkinson. On the necessity for postulating an Ether. R.B.A. 71. 534.

263. M. Planck. Über die Verteilung der Energie zwischen Äther und Materie. A.P.L. 9. 629.

264. E. R. v. Oppolzer. Erdbewegung und Äther. A.P.L. 8. 898. St.W. 111. 244.

265. H. Reissner. Mechanische Analogie zur Elastizität. S.M.B. 1. 40.

266. *N. N. Šiller. Über die von Ermakov vorgeschlagene Modifikation der Newtonschen Gesetze (russ.). B.U.K. 1902. No. 2c. 83.

267. *C. T. Whistler. Dopplers principle. J.B.A.A. 11. 281.

268. *W. Michelson. On Dopplers principle. A.J.C. 13. 192.

269. *A. Müller. Die philosoph. Grundlagen der modernen Lichtlehre. N.O. 47. 532; 597; 658.

270. *K. Ångström. The mechanical equivalent of the unit of light. A.J.C. 15. 223.

271. *V. Wellmann. On the numerical relation between light and gravitation. A.J.C. 15. 282.

272. *H. A. Lorentz. De draaig van het polarisatievlak in lichamen die zich bewegen. C.A.A. 10. 793.

273. *Lord Kelvin. Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light. P.R.I. 16. 363.

274. C. Neumann. Über die Maxwell-Hertz'sche Theorie. A.G.L. 27. 213.

275. K. Maché. Über die Verdampfungsweise und die Größe der Flüssigkeits-Molekel. S.A.W. 111. 382.

Siehe auch 130; 346; 532; 600.

Molekularphysik.

276. *H. Stanley. An infra-gaseous state of matter. C.N. 85. 217.

277. R. Marcolongo. La deformazione del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti. R.A.L.R. 11 A 318.

278. *Leduc et Sacerdote. Sur la cohésion des liquides. J.P. (4) 1. 364.

279. O. Tumlitz. Eine Ergänzung der van der Waalsschen Theorie des Kohäsionsdruckes. S.A.W. 111. 524.

280. *J. E. Mills. Molekularrefraction. J.P.C. 6. 209.

Siehe auch 265; 320; 346.

Elastizität.

281. G. Combebiac. Sur les équations générales de l'élasticité. S.M. 30. 108.

282. *C. Somigliana. Sul principio delle immagini di Lord Kelvin e le equazioni dell'elasticità. N.C.P. (5) 3. 288.

283. C. Somigliana. Sul potenziale elastico. A.D.M. (3) 7. 129.

284. *J. H. Michell. The inversion of plane stress. P.L.M.S. 34. 134.

285. P. Appell. Sur les expressions des tensions en fraction des déformations dans un milieu élastique homogène et isotrope. N.A. (4) 2. 193.

286. M. Gebbia. Le deformazione tipiche dei corpi solidi elastici. A.D.M. (3) 7. 141.

287. H. Hess. Elasticität und innere Reibung des Eisens. A.P.L. 8. 405.

288. *Dunlop. The non-elastic deformation of copper wire under various stresses. P.P.S.G. 32.

289. *C. Chree. Applications of elastic solids to metrology. P.P.S.L. 18. 1.

290. *de Martins. La linea elastica e la sua applicazione al trave continua su più sostegni. R.A.G. 1901 April; Mai.

291. F. Hasenöhr. Über das Gleichgewicht eines elastischen Kreiscylinders. S.A.W. 110. 1026.

292. N. G. Filon. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. T.R.S.L. 198. A 147.

293. T. Boggio. Sull'equilibrio delle piastre elastiche piane. R.I.L. (2) 34. 793.

294. H. Reissner. Anwendung der Statik und Dynamik monocyclischer Systeme auf die Elastizitätstheorie. A.P.L. 9. 44.

295. L. Lecornu. Sur les volants élastiques. J.E.P. (2) 7. 9.

296. A. Wandersleb. Über die anomale Änderung des longitudinalen Elastizitätsmoduls enger Gläser mit der Temperatur

und über den Einfluß gewisser Schwingungen auf den Elasticitätsmodul nach vorausgegangener Erwärmung. A.P.L. 8. 367.

297. *W. Sutherland*. Der Elasticitätsmodul von Metallen bei niedrigen Temperaturen. A.P.L. 8. 474.

298. **E. G. Coker*. On the effect of low temperature on the recovery of overstrained iron and steel. T.R. 15. 107.

299. *F. Villareal*. Deformación de las vigas que trabajan á la flexión. R.C.L. 5. 31.

300. *J. Muir*. On the tempering of iron hardened by overstrain. T.R.S.L. 198 A. 1.

301. **Almagià*. Applicazione della teoria della elasticità colla costruzione degli alberi a manovelle. Pol M. 1901. Juni.

302. *E. Orazza*. Contributo alla teoria delle molle pneumatiche. A.A.T. 37. 421.

Siehe auch 156; 191; 318; 404; 624; 647.

Festigkeitslehre.

303. **E. Ascione*. Nuova contribuzione sulla resistenza alla flessione. A.A.P.M. 16.

304. *W. Cassie*. On the measurement of Youngs modulus. P.M. 4. 402.

305. *M. Grübler*. Zur Festigkeit spröder Körper. P.Z. 4. 78.

306. *O. Meyer*. Welchen Einfluß übt die Form u. Dimension der Probestäbe auf die Ergebnisse der Zugversuche. M.T.G.W. (2) 12. 91.

307. **A. Martens*. Zugversuche mit eingekerbten Probekörpern. M.F.I. 1901. 35.

308. *H. Heimann*. Die Festigkeit ebener Platten bei normaler konstanter Belastung. Z.S. 48. 126.

309. *Considère*. Étude théorique et expérimental de la résistance à la compression du beton fretté. C.R. 135. 365; 415.

310. *A. Gros*. Le problème des surfaces chargées debout. Solution dans le cas du cylindre de révolution. C.R. 134. 1041.

311. **C. Bach*. Unfälle an Dampfgefäßen. Z.B.D. 5. 1.

312. **W. Feldmann*. Die Räderberechnung der Leitspindeldrehbänke. T.P.B. 2. 125.

313. **J. Frith and E. H. Lamb*. The breaking of shafts in direct-coupled units due to oscillations set up at critical speeds. J.I.E.E. 31. 646.

Siehe auch 256.

Kristallstruktur.

314. *E. v. Fedorew*. Theorie der Krystallstruktur II. Z.K.M. 36. 209.

315. **H. Zirngiebl*. Beitrag zur Kenntnis der Beziehungen zwischen Krystall und Molekül. Z.A.M. 36. 117.

316. *Lord Kelvin*. Molecular dynamics of a crystal. P.M. 4. 139.

317. *F. Wallerant*. Sur la forme primitive des corps cristallins. C.R. 134. 921.

318. *J. Grönwall*. Über die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen in 1-achsig krystallinischen Medien. S.A.W. 111. 411.

319. *W. Voigt*. On the behaviour of pleochroitic crystals along directions in the neighbourhood of an optic axis. P.M. 4. 90.

320. **C. Viola*. Beziehung zwischen Kohäsion, Kapillarität und Wachstum der Krystalle. Z.K.M. 36. 558.

321. *W. Voigt*. Beiträge zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Krystalle. A.P.L. 9. 367.

322. **G. Wulff*. Untersuchungen im Gebiet der optischen Eigenschaften isomorpher Krystalle. Z.K.M. 36. 1.

323. **A. Cornu*. Détermination des 3 paramètres optiques principaux, d'un cristal, en grandeur et en direction, par le réfractomètre. B.S.M.F. 25. 7.

324. **F. Tonkovic*. Sulla variazione angolare dei cristalli per effetto della temperatura. A.A.P.M. 16.

325. **P. R. Heyl*. Crystallisation under electrostatic stress. P.R. 14. 83.

Siehe auch 407; 548.

Schwingungen.

326. *H. S. Carslaw*. Note on the use of Fourier's series in the probleme of the transverse vibrations of strings. P.E.M.T. 20. 23.

327. **H. C. Richards*. On the harmonic curves known as Lissajous figures. J.F.I. 153. 269.

328. —. Über asymmetrische Schwingungen in einer Lage stabilen Gleichgewichts. A.P.L. 8. 348.

329. *G. Floquet*. Sur le mouvement des membrans. C.S.S. 1901.

330. **E. Lüdén*. Über elektrische Schwingungen. M.P.G.Z. 1901. 23.

331. *K. R. Johnson*. Elektrisk svängningar af mycket hög frekvens. A.V.A.S. 27. No. 3.

332. K. Wildermuth. Über die Absorption elektrischer Schwingungen in Flüssigkeiten. A.P.L. 8. 212.
Siehe auch 228; 254; 296; 313; 537; 642.

Wellenlehre.

333. *F. Richarz. Reflexion von Longitudinalstößen an einem festen und an einem freien Ende. S.G.M. 1902. 172.
334. J. A. Pollock and O. U. Vonwiller. Some experiments on electric waves in short wire systems. P.M. 3. 586.
335. A. Becker. Interferenzröhren für elektrische Wellen. A.P.L. 8. 22.
336. F. Braun. Über die Erregung stehender elektrischer Drahtwellen durch Entladung von Condensatoren. A.P.L. 8. 199.
Siehe auch 364; 549; 551; 566; 755.

Strahlen.

337. *L. Benoit. Lois de transparence de la matière pour les rayons X. S.P. (9) 3. 92.
338. J. J. E. Durack. Lenard Rays. P.M. 4. 29.
339. N. Hehl. Über die Gebilde an der Kathode. S.P.M.E. 33. 170.
340. N. Hehl. Über die Dimensionen der Gebilde an der Kathode. P.Z. 3. 547.
341. J. Stark. Über Kathodenstrahlenreflexion bei schiefer Incidenz. P.Z. 3. 368.
342. W. Seitz. Vergleichung einiger Methoden zur Bestimmung der Größe E bei Kathodenstrahlen. A.P.L. 8. 233.
343. W. Kaufmann. Über die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen. D.V.N. 73. 45.
344. W. Wien. Untersuchung über die elektrische Entladung in Gasen. A.P.L. 8. 244.
345. E. Rutherford and A. G. Grier. Deviable rays of radioactive rays. P.M. 4. 315.
Siehe auch 602; 648.

Capillarität.

346. P. Belojarczew. Opređenje naimenšej tolikiny židkoj plastniki, kak sposob opredelenija diametra molekul. Berechnung der kleinsten Dicke einer Flüssigkeitsschicht, als Methode zur Berechnung des Durchmessers der Moleküle. M.P.O. 27. 169; 217.
347. G. Bakker. Theorie der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes. Z.P.C. 42. 68.

348. *D. Pékar. Die Oberflächenspannung der Lösungen (ung.). M.T.E. 19.

349. L. Grunmach. Neue experimentelle Bestimmungen der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten durch Messung der Wellenlänge der auf ihnen erzeugten Kapillarwellen. P.Z. 4. 26.

350. L. Grunmach. Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung von flüssiger Luft. D.V.N. 73. 51.

351. W. H. Whatmough. Eine neue Methode zur Bestimmung von Oberflächenspannungen von Flüssigkeiten. Z.P.C. 39. 129.

352. J. Amann. Le dépression de la constante capillaire des urines pathologiques. B.S.V. (4) 38. 131.

353. S. Lemström. Om vätskors förhållande i kapillar-rör under inflytande af en elektrisk luftström. A.V.A.S. 27. No. 2.
Siehe auch 320; 364.

Elektrokapillarität.

354. *J. J. van Laar. Over de asymmetrie der electro-capillair-curve. C.A.A. 10. 753.

355. J. J. van Laar. Über die Asymmetrie der Elektrokapillarkurve. Z.P.C. 41. 385.

356. *Q. Sella. Deformazione della superficie piana di un liquido in presenza di un corpo elettrizzato. L.E. 10. No. 1.
Siehe auch 353.

Absorption.

357. E. Hagen und H. Rubens. Absorption ultravioletter, sichtbarer und ultraroter Strahlen in dünnen Metallscheiben. A.P.L. 8. 432.

358. R. Ångström. Einige Bemerkungen zur Absorption der Erdstrahlung durch die atmosphärische Kohlensäure. B.V.A.S. 58. 381.

359. K. Ångström. Über die Abhängigkeit der Absorption der Gase besonders der Kohlensäure von der Dichte. B.V.A.S. 58. 371.
Siehe auch 412; 413; 874.

Diffusion.

360. K. Stanzel. Über Diffusion in sich selbst. S.A.W. 110. 1038.

361. L. Natanson. Sur les lois de la diffusion. B.I.C. 1901. 835.

362. A. Winkelmann. Über die Diffusion von Wasserstoff durch Platin. A.P.L. 8. 388.

863. **T. Godlevski*. Sur la pression osmotique de quelques dissolutions calculée d'après les forces électromotrices des piles de concentration. B.I.C. 1902. 146.

Viscosität.

864. **F. R. Watson*. Viscosity of liquids determined by measurement of capillary waves. P.R. 15. 20.

Siehe auch 218; 225; 226; 229; 367.

Akustik.

865. *A. Guillemin*. Sur les accords ouverts. C.R. 135. 98.

866. *A. Guillemin*. Classement des accords binaires. C.R. 135. 396.

867. *S. R. Cook*. On flutings in a sound wave and the forces due to a flux of a viscous fluid around spheres. P.M. (6) 3. 471.

868. *J. Tuma*. Eine Methode zur Vergleichung von Schallstärken. S.A.W. 111. 402.

869. *A. Guillemin*. Echelle universelle des mouvements périodiques graduée en savarts et millisavarts. C.R. 134. 980; *J.P. (4) 1. 504.

870. *M. Wien*. Über die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für Töne verschiedener Höhe. P.Z. 4. 69.

871. *M. Wien*. Über die Verwendung der Resonanz bei der drahtlosen Telegraphie. A.P.L. 8. 686.

Siehe auch 579.

Geometrische Optik.

872. *R. Straubel*. Über einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen. P.Z. 4. 114.

873. *P. Plettenberg*. Geometrisch-optische Täuschungen. J.A.V.M. 1900 bis 1902. 147.

874. *W. H. Roever*. Brilliant points and loci of brilliant points. A of M. 3. 113.

875. *R. Mehmke*. Ein frühes Beispiel einer Anamorphose. Z.S. 48. 135.¹⁾

876. **H. C. Plummer*. On the images formed by a parabolic mirror. M.N.A.S. 62. 352.

877. *H. Opitz*. Über die Frage nach den Brennlinien eines sehr dünnen astigmatischen Strahlenbündels und ihre Bedeutung für das Bildpunktproblem. S.M.B. 1. 53.

878. *C. Viola*. Le deviazioni minime

della luce mediante prismi birefrangenti. R. A. L. R. 11 B. 24.

879. *R. Straubel*. Über die Abbildung einer Ebene durch ein Prisma. A.P.L. 8. 63.

880. *W. Volkmann*. Über ein Geradesichtprisma und ein neues Flüssigkeitsprisma. A.P.L. 8. 455.

881. *J. D. Everett*. On focal lines and anchor ring wave-fronts. P.M. 3. 483; P.P.S.L. 18. 43.

882. *G. Espanet*. Catacaustique d'un cylindre circulaire droit pour des rayons parallèles, obliques à l'horizon et situés dans un même plan. I.M. 9. 192.

883. **W. Roché*. Über die Brechung des Lichts, das durch eine Reihe von Mitteln geht, die durch zentrierte Kugelflächen begrenzt sind (russ.). B.U.K. 1902. No. 2 c 101.

884. *L. Matthiessen*. Über die unendlichen Mannigfaltigkeiten der Örter der dioptrischen Kardinalpunkte von Linsen und Linsensystemen bei schiefer Incidenz. Z.S. 48. 39.

885. *F. J. van den Berg*. Over de berekening van gecentreerde lenzenstelsels. C.A.A. 9. 125.

886. **O. Orlandini*. Osservazioni sopra l'effetto prismatico delle lenti discentrate. A.A.F.S. (4) 13.

887. **A. Kerber*. Formeln zur Berechnung von Aplanaten. D.M. 10. 97.

888. **L. Matthiessen*. Über aplanatische Brechung und Spiegelung in Oberflächen 2. Ordnung und die Hornhautrefraction. A.F.G.P. 91. 295.

889. *L. Matthiessen*. Über die Bedingungsgleichungen der aplanatischen Brechung von Strahlenbündeln in beliebigen krummen Oberflächen. A.P.L. 9. 691.

890. *E. Edser*. The diffraction of light from a dense to a rarer medium, when the angle of incidence exceeds its critical value. P.M. 4. 346.

891. *C. Forch*. Das Brechungsvermögen von Lösungen in Schwefelkohlenstoff. A.P.L. 8. 675.

892. *J. J. Thandin Chabot*. Reflexion und Refraktion mittels einer natürlich gekrümmten Fläche. P.Z. 3. 331.

893. *J. Boussinesq*. Réflexion et réfraction par un corps transparent animé d'une translation rapide: équations du mouvement et conséquences générales. C.R. 135. 220; 269; 309.

894. *J. D. Everett*. Contributions to the theory of the resolving power of objectives. P.M. 4. 166.

1) Diese Arbeit gehört nicht hierher, sondern sollte unter: Nomographie stehen.

395. *J. Precht*. Brennweitenbestimmung bei photographischen Systemen. P.Z. 3. 515.

396. —. A stereoscopic method of photographic surveying. N. 66. 189.

Siehe auch 745; 877; 887; 889; 890.

Physikalische Optik.

397. **A. Müller*. Die philosophischen Grundlagen der modernen Lichtlehre. N.O. 47. 532; 597; 658.

398. *A. Korn* u. *K. Stoeckl*. Studien zur Theorie der Lichterscheinungen. A.P.L. 8. 312.

399. *J. Boussinesq*. Extension du principe de Fermat, sur l'économie du temps, au mouvement relatif de la lumière dans un corps transparent hétérogène animé d'une translation rapide. C.R. 135. 465.

400. **D. B. Brace*. The group velocity and wave-velocity of light. S. (2) 16. 81.

401. **T. J. I'A. Broomwich*. Note on the wave surface of a dynamical medium. P.L.M.S. 34. 307.

402. *J. Boussinesq*. Démonstration générale de la construction des rayons lumineux par les surfaces d'onde courbes. C.R. 136. 559.

403. *L. Natanson*. Über die temporäre Doppelbrechung des Lichtes in bewegten reibenden Flüssigkeiten. Z.P.C. 39. 355.

404. *L. N. G. Filon*. On the variation with the wave-length of the double refraction in strained glass. P.C.P.S. 11. 478.

405. *C. Viola*. Le deviazioni minime della luce mediante prismi birefrangenti. R.A.L.R. 11 B. 24.

406. **C. Raveau*. Sur l'observation de la réfraction conique intérieure et extérieure. J.P. (4) 1. 387.

407. **C. Viola*. Die Bestimmung der optischen Konstanten eines Krystalls aus einem einzigen beliebigen Schnitte. Z.K.M. 66. 245.

408. *F. Kurthaus*. Über Reflexionsvermögen von Flammen. P.Z. 3. 333.

409. *C. Neumann*. Über Metallreflexion und totale Reflexion. B.G.L. 54. 92.

410. *E. van Aubel*. Sur les indices de réfraction des mélanges liquides. C.R. 134. 985.

411. *J. L. Sirks*. De l'influence de la diffraction par un réseau à mailles rectangulaires placé devant l'objectif d'une lunette sur la clarté de l'image principale d'une étoile. C.A.A. 9. 307.

412. **G. E. Halle*. Selective absorption as a function of wave-length. A.J.C. 15. 227.

413. *R. W. Wood*. The absorption, dispersion and surface colour of selenium. P.M. 3. 607.

414. *J. Walker*. On Mac Cullagh and Stokes's elliptic analyser and other applications of a geometrical representation of the state of polarisation of a stream of light. P.M. 3. 541.

415. *J. Larmor*. On the influence of convection on optic rotatory polarisation. P.M. 4. 367.

416. *P. Rossi*. Dalla dispersione anomala. R.F.M. 3. 273; 383.

417. *W. H. Julius*. Erwiderung auf Bedenken, welche gegen die Anwendung der anormalen Dispersion zur Erklärung der Chromosphäre geäußert worden sind. A.N.K. 160. 139.

418. *C. Winther*. Die Rotationsdispersion der spontan aktiven Körper. Z.P.C. 41. 161.

419. *J. Boussinesq*. Sur la dispersion anormale en corrélation avec le pouvoir absorbant des corps pour les radiations d'une période déterminée. C.R. 134. 1389.

420. **E. R. Drew*. Interference in thin films — a graphical treatment. P.R. 15. 226.

421. *C. Hillebrand*. Die Anwendung der Beugungserscheinungen auf astronomische Messungen. S.A.W. 110. 989.

422. *H. Deslandres*. Sur les spectres de bandes de l'azote. C.R. 134. 747.

423. **L. E. O. de Visser*. Essai d'une théorie sur la phosphorescence de longue durée. R.T.C.P.B. (2) 20. 435.

424. *J. Macé de Lépinay* et *H. Buisson*. Sur une nouvelle méthode de mesure optique des épaisseurs. C.R. 135. 233.

425. **W. M. Hicks*. The Michelson Morley effect. R.B.A. 71. 562.

426. *J. Macé de Lépinay*. Sur une nouvelle méthode pour la mesure optique des épaisseurs. C.R. 134. 898.

Siehe auch 62; 113; 269—273; 319; 322; 323; 738; 875; 876; 878—881.

Photometrie.

427. **J. Violle*. Photométrie. C.I.E. 1. 23.

Elektrooptik.

428. *P. Lenard*. Über die lichtelektrische Wirkung. A.P.L. 8. 149.

429. *E. v. Schweidler*. Untersuchungen über den photoelektrischen Strom in Kaliumzellen. P.Z. 4. 136.

430. *R. A. Fessenden. Velocity of light in an electrostatic field. S. (2) 16. 474.

431. P. V. Bevan. Reflexion and transmission of light by a charged metal surface. P.C.P.S. 11. 438.

432. J. S. Townsend. The conductivity produced in gases by the aid of ultra-violet light. P.M. 3. 557.

Siehe auch 580.

Magnetooptik.

433. W. Voigt. Über einige neuere Beobachtungen von magneto-optischen Wirkungen. A.P.L. 8. 872.

434. A. Faerber. Über das Zeemanphänomen. A.P.L. 9. 886.

435. *G. W. Walker. On asymmetry of the Zeeman effect. P.P.S.L. 18. 78.

436. E. Riecke. Zeemaneffekt und Elektronenladung. P.Z. 3. 406.

437. *P. Moretto. Studio sul fenomeno Hall nei liquidi. N.C.P. (5) 3. 80.

438. W. Voigt. Sul fenomeno Majorana. R.A.L.R. 11. A. 505.

439. Q. Majorana. Sulle rotazioni bimagnetiche del piano di polarizzazione della luce. R.A.L.R. 11 B. 90.

440. A. Schmauß. Magnetische Drehung der Polarisationssebene innerhalb eines Absorptionstreifens. A.P.L. 8. 842.

441. *L. H. Siertsema. Die Dispersion der magnetischen Drehung der Polarisationssebene in Wasser im sichtbaren Spektrum. C.P.L. 73.

442. *L. Siertsema. The dispersion of magnetic rotation of the plane of polarisation in negatively rotating salt-solutions. C.P.L. 76.

443. *O. M. Corbino. Nuove ricerche sulla polarizzazione rotatorie magnetica nell'interno di una riga d'assorbimento. N.C.P. (5) 3. 121.

Wärmelehre.

444. A. S. Macdonald. On some equations pertaining to the propagation of heat in an infinite medium. P.P.S. 41. 181.

445. F. Cassini. Sur un problème de propagation de la chaleur. R.A.R. 1902. 387.

446. H. S. Carslaw. A problem in conduction of heat. P.M. 4. 162.

447. *H. S. Carslaw. The application of Fourier's series to mathematical physics. R.B.A. 71. 337.

448. *L. Natanson. Sur la conductibilité calorifique d'un gaz en mouvement. B.I.C. 1902. 187.

449. *F. Richarz. Über Brechung der Wärmestromlinien und ihre Demonstration. N.R. 17. 478.

450. *H. Schoentjes. Détermination du coefficient de transmission de la chaleur à travers les verres à vitre et à travers les doubles parois en verre. A.A.I.G. 24.

451. J. Dewar. Thermal expansions at low temperatures. N. 66. 88.

452. A. E. Tutton. The thermal expansion of porcelain. P.M. 3. 631.

453. Féry. La mesure des températures élevées et la loi de Stefan. C.R. 134. 977.

454. *C. Schuyten. Nouvelle vérification de la loi de Lambert sur la vitesse de la conductibilité calorifique de l'eau. B.A.B.C. 15. 373.

455. M. Thiesen. Über die spezifische Wärme des Wasserdampfs. A.P.L. 9. 60.

456. P. W. Robertson. The latent heats of fusion of the elements and compounds. T.N.Z.I. 39. 501.

457. *C. Chistoni. Sulla legge del raffreddamento di Newton e sulla determinazione della temperatura del sole attribuita al Newton. N.C.P. (5) 3. 139.

458. S. Arrhenius. Über die Wärmeabsorption durch Kohlensäure. B.V.A.S. 58. 25.

459. J. W. Peck. The steady temperatures of a thin rod. P.M. 4. 226.

460. *F. H. Haase. Über den Wärmedurchgang durch Heizflächen. Z.L.H. 7.

Siehe auch 232; 273; 296—298; 300; 324; 731; 732; 756; 788; 882.

Thermodynamik.

461. G. Jäger. Die Energie der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeitsmolekeln. S.A.W. 110. 1141.

462. P. Koturnicki. Genaue Ausdrücke der Energie und Entropie für ein Gemisch aus 2 Zuständen (russ.). J.R.P.C.G. 34. 29.

463. *E. Mathias. Sur le partage du plan en quadrilatères curvilignes équivalents. F.T. (10). 1. 292.

464. de Forcrand. Sur la relation $\frac{L+S}{T} = \frac{Q}{T} = K$. C.R. 134. 768.

465. *R. Meixner. Über die Bedeutung des 1. u. 2. Hauptsatzes der Wärmetheorie für die Leistungsfähigkeit von Feuerungs- und Wärmekraftanlagen. Z.R.W. 7. 391; 403.

466. *A. Einstein*. Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichts und des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik. A.P.L. 9. 417.
467. *W. Voigt*. Bemerkung zu der von H. Denizot gegebenen Ableitung des 2. Hauptsatzes. P.L. 8. 472. — *H. Denizot* 927.
468. *N. Quint*. Isothermen für Mischungen von Chlorwasserstoff und Äthan. Z.P.C. 39. 14.
469. **P. A. Kohnstamm*. Over de gedaante der empirische isotherm van een binair mengsel. C.A.A. 10. 432.
470. *A. Batschinski*. Über eine Erweiterung des Begriffs der kritischen Größen. Z.P.C. 40. 629.
471. *C. J. Parks*. On the heat evolved or absorbed when a liquid is brought in contact with a finely divided solid. P.M. 4. 240.
472. *M. Wilderman*. On the velocity of reaction before complete equilibrium and the point of transition are reached. P.M. 4. 270; 468.
473. *Jouguet*. Sur la rupture et le déplacement de l'équilibre. C.R. 134. 1418.
474. **A. Wischeslawzew*. Über die kalorimetrische Bestimmung der Schmelzkurve. J.R.P.C.G. 84. 41.
475. *G. Jaumann*. Über die Wärme-Produktion in zähen Flüssigkeiten. A.P.L. 8. 752. S.A.W. 111. 215.
476. *C. Fuschl*. Über den Wärmezustand der Gase. S.A.W. 111. 187.
477. *Lord Rayleigh*. On the law of the pressure of gases between 75 and 150 millimeters of mercury. T.R.S.L. 198 A. 417.
478. *Lord Rayleigh*. Über das Gasdruckgesetz zwischen 75 und 150 mm Quecksilber. Z.P.C. 41. 71.
479. *J. O. Kuenen* and *W. G. Robson*. Observations on mixtures with maximum or minimum vapour pressure. P.M. 4. 116.
480. *F. A. H. Schreinemakers*. Dampfdrucke im System: Wasser, Aceton und Phenol II—III. Z.P.C. 40. 440; 41. 331.
481. *J. D. Everett*. On the comparison of vapour-temperatures at equal pressures. P.M. 4. 335.
482. **W. Kurbatow*. Über den Zusammenhang zwischen Siedewärme und Dampfdichte (russ.). J.R.P.C.G. 84. 250.
483. *M. Planck*. Zur Thermodynamik und Dissociationstheorie binärer Elektrolyte. Z.P.C. 41. 212.
484. **L. Canalda*. La termodinamica en la astronomia. M.A.C.B. (3) 4. No. 15.
485. *S. Meyer*. Über die durch den Verlauf der Zweiphasenkurve bedingte maximale Arbeit. S.A.W. 111. 305.
486. *J. Zawadzki*. Studya doświadczalne nad prężnością i składem pary podwójnych mieszanin cieczy (Experimentalstudien über die Spannung und Zusammensetzung der Dämpfe binärer Mischungen von Flüssigkeiten). T.W. 13. 11.
487. *R. Wegscheider*. Über simultane Gleichgewichte und die Beziehungen zwischen Thermodynamik und Reaktionskinetik homogener Systeme. Z.P.C. 39. 257.
488. *J. H. van 't Hoff*, *F. B. Kenrick* und *H. M. Dawson*. Über die Bildung von Tachydrit. Z.P.C. 39. 27.
489. *van 't Hoff* u. *A. o' Forelly*. Untersuchungen über die Bildung der oceanischen Salzablagerungen. S.A.B. 1902. 370; 805; 1008.
490. **E. F. Roeber*. A thermodynamical note on the theory of the Edison accumulator. T.A.E.S. 1. 195.
491. *L. Lecornu*. Sur les moteurs à injection. C.R. 134. 1566.
- Siehe auch 231; 236; 275; 587; 770; 785—787; 856—864.

Lösungen.

492. *J. B. Goebel*. Zahlenbeispiel zur neueren Theorie der Lösungen. Z.P.C. 42. 59.
493. *H. Jahn*. Entwurf einer erweiterten Theorie der verdünnten Lösungen. Z.P.C. 41. 257.
494. *J. Traube*. Théorie des phénomènes critiques et contribution à l'étude des solutions. B.A.B. 1902. 319.
495. **W. D. Bancroft*. Limitations of the mass law. J.P.C. 6. 190.
496. *V. Rothmund* u. *N. T. M. Wilsmore*. Die Gegenseitigkeit der Löslichkeitsbeeinflussung. Z.P.C. 40. 611.
497. *N. Schiller*. Das Gesetz der Partialdichtigkeitsänderung eines Lösungsmittels mit der Konzentration der Lösung. A.P.L. 8. 588.
498. *A. Smits*. Über den Verlauf des Faktors γ bei mäßig verdünnten wässrigen Lösungen als Funktion der Konzentration. Z.P.C. 39. 385.
499. *T. Ericson-Aurén* u. *W. Palmaer*. Über die Auflösung von Metallen. I. Z.P.C. 39. 1.

500. *O. Pekár.* Über die molekulare Oberflächenenergie der Lösungen. Z.P.C. 39. 433.

501. *H. O. Holsboer.* Die theoretische Lösungswärme von $\text{Cd SO}_4 \cdot \frac{8}{3} \text{H}_2\text{O}$. Z.P.C. 39. 691.

502. *J. Traube.* Theorie der kritischen Erscheinungen und der Verdampfung. A.P.L. 8. 267.

503. **J. I. Michailenko.* Untersuchungen über die Dampfspannungen der Lösungen (russ.). B.U.K. 1901. No. 4b.

504. *H. Wolf.* Beitrag zur Kenntnis der Leitfähigkeiten gemischter Lösungen von Elektrolyten. Z.P.C. 40. 222.

505. *P. Eversheim.* Bestimmung der Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten von Lösungsmitteln und deren Lösungen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur bis über den kritischen Punkt. A.P.L. 8. 539.

506. *C. Barus.* On spontaneous nucleation and on nuclei produced by shaking solutions. P.M. 4. 262.

Siehe auch 348; 828; 835.

Zustandsgleichung.

507. **W. H. Keesom.* Bijdragen tot de kennis van het ψ -vlak van Van der Waals. C.A.A. 10. 331; 782.

508. **W. H. Keesom.* Contribution to the knowledge of van der Waal's ψ -surface. C.P.L. 75; 79.

509. **H. Kamerlingh Onnes.* Über die Reihenentwicklung der Zustandsgleichung der Gase u. Flüssigkeiten. C.P.L. 74.

510. **P. Saurel.* On the fundamental equation of the multiple point. J.P.C. 6. 261.

511. *A. Batschinski.* Über das Gesetz der geraden Mittellinie. Z.P.C. 41. 741.

512. *G. Tammann.* Das Zustandsdiagramm des Phenols. A.P.L. 9. 249.

513. **J. D. van der Waals.* Ternairstelsels. C.A.A. 10. 544; 665; 862.

514. *F. A. H. Schreinemakers.* Tensions de vapeur de mélanges ternaires. A.N. 7. 99.

515. *F. Caubet.* Liquéfaction des mélanges gazeux. M.S.B. (6) 1. 1.

516. *K. Meyer.* Om overeenstemmende tilstande hos stofferne. M.S.Co. (6) 9. 155.

517. *J. J. van Laar.* Über einen Aufsatze des Herrn Schükarew. (Z.P.C. 38. 542.) Z.P.C. 39. 342.

Siehe auch 279.

Kinetische Gastheorie.

518. *F. M. Exner.* Über den Gleichgewichtszustand eines schweren Gases. M.Z. 19. 278.

519. *G. Jäger.* Das Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln. S.A.W. 111. 255.

520. *J. H. Jeans.* On the conditions necessary for equipartition of energy. P.M. 4. 585.

521. **P. Fireman.* The expansion of a gas into a vacuum and the kinetic theory of gases. J.P.C. 6. 463.

522. **R. W. Wood.* The cooling of gases by expansion and the kinetic theory. S. (2) 16. 592.

523. *E. Müller.* Die Abhängigkeit des Wärmeleitungskoeffizienten der Luft von der Temperatur. S.P.M.E. 33. 8.

Siehe auch 476—478; 737.

Strahlung.

524. *M. Planck.* Über die von einem elliptisch schwingenden Ion emittierte und absorbierte Energie. A.P.L. 9. 619.

525. *O. Lummer.* Die Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre Verwendung. A.Gr. (3) 3. 261.

526. *E. Kohl.* Über die Herleitbarkeit einiger Strahlungsgesetze aus einem W. Wien'schen Satze. A.P.L. 575.

527. **E. F. Nichols and G. F. Hull.* A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation. P.R.L. 13. 307.

528. *J. T. Bottomley.* Radiation of heat and light from a heated solid body. R.B.A. 71. 562.

529. *E. Pringsheim.* Über Temperaturbestimmung mit Hilfe der Strahlungsgesetze. D.V.N. 73. 81.

530. **J. W. Peck.* The Fourier problem of the steady temperatures of a thin rod. R.B.A. 71. 555.

531. *C. E. Guillaume.* Les lois du rayonnement et la température du soleil. B.S.A.F. 15. 37.

532. **H. A. Lorentz.* De intensiteit der straling in verband met de beweging der aarde. C.A.A. 10. 804.

533. **R. Mewes.* Die Licht- und Wärmestrahlungsgesetze und deren Bedeutung für das Beleuchtungs- und Heizungswesen. Z.B.W. 7. 410; 421; 433.

Siehe auch 453; 725.

Elektrostatik.

534. *S. J. Barnett. On the Cavendish experimen and the law of inverse squares in electrostatics. P.R. 15. 175.

535. *G. Vicentini. Rotazioni elettrostatiche. N.C.P. (5) 3. 296.

536. C. A. Skinner. On conditions controlling the drop of potential at the electrodes in vacuum-tube discharge. P.M. 4. 490.

537. *G. Morera. Interno alle oscillazioni elettriche. N.C.P. 3. 382.

538. A. Battelli e L. Magri. Sulle scariche oscillatorie. M.A.T. 51. 335.

539. A. Battelli u. L. Magri. Über oscillatorische Entladungen I. P.Z. 3. 539.

540. P. Drude. Oscillatorische Kondensatorentladung. A.P.L. 9. 611.

541. L. Mandelstam. Bestimmung der Schwingungsdauer der oscillatorischen Kondensatorentladung. A.P.L. 8. 123.

542. *V. Crémieu. Méthode de réglage automatique du potentiel d'un condensateur. J.P. (4) 1. 583.

543. A. Garbasso. Über die Entladungen eines Kondensators durch 2 parallelgeschaltete Drähte. P.Z. 3. 384.

544. A. Garbasso. Über die Entladungen eines Kondensators durch n parallelgeschaltete Drähte. A.P.L. 8. 890.

Siehe auch 3; 325; 344; 430; 893.

Dielektrizität.

545. *I. I. Kosonogow. Über die Theorie der Dielektrika (russ.). B.M.K. 1901. No. 7, 10b.

546. *S. Lussana e P. Cornazzi. Influenza di un dielettrico solido interposto fra le palline di uno spinterometro sulla lunghezza della scintilla. N.C.P. (5) 3. 132.

547. *H. Schlundt. On the dielectric constants of pure solvents. B.U.W. 2. 355.

548. W. Schmidt. Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Krystallen mit elektrischen Wellen. A.P.L. 9. 919.

549. P. Drude. Zur Messung der Dielektrizitätskonstante elektrischer Drahtwellen. A.P.L. 8. 336.

Siehe auch 505.

Elektrodynamik.

550. *A. Garbasso. Sopra una questione dielettrodinamica. N.C.P. (5) 3. 372.

551. —. Das Ohmsche Gesetz vom Gesichtspunkt der Theorie der Wellenbewegung des Äthers aus. R.I.J. 1901. Heft 4.

552. E. Grimsehl. Über den Volta-schen Fundamentalversuch. P.Z. 4. 43.

553. *W. S. Day. An experiment relating to the application of Lagrange's equations of motion to electric currents. P.R. 15. 154.

554. P. Boley. Sur les différences de potentiel au contact. C.R. 135. 454.

555. *Marcolongo. Sul potenziale elettrodinamico di Helmholtz. A.A.P. M. 15.

556. A. H. Bucherer. Über das Kraftfeld einer sich gleichförmig bewegenden Ladung. A.P.L. 8. 326.

557. *Hurmuzescu. Force électromotrice due à la déformation mécanique des électrodes. A.S.U.J. 2. 63.

558. E. van der Ven. Sur le transport des liquides par le courant électrique. A.M.T. (2) 8. 93.

559. A. Lampa. Über Stromunterbrechung. S.A.W. 110. 891.

560. E. Klupathy. Zur Theorie des Wehnelt-Unterbrechers. A.P.L. 9. 147.

561. D. A. Goldhammer. Über die Transformation eines pulsierenden Stroms in einen Wechselstrom. P.Z. 4. 108.

562. J. Teichmüller. Über die Grenzen der graphischen Behandlung der Wechselstromprobleme. P.Z. 3. 442.

563. G. Grassi. Sulla variazione della tensione secondaria nei trasformatori a corrente alternata. R.A.N. (3) 8. 53.

564. Brillouin. Influence réciproque de 2 oscillateurs voisins. A.C.F. 27. 17.

565. P. Drude. Zur Konstruktion von Teslastransformatoren. A.P.L. 9. 293; 590.

566. W. B. Morton. On the forme of the lines of electric force and of energy flux in the neighbourhood of wires leading electric waves. P.M. 4. 302.

567. C. Christiansen. Unipolare elektrische Ströme in Elektrolyten. A.P.L. 8. 787.

568. *C. Christiansen. Unipolare elektrische stromme i en electrolyt. B.A.Co. 1901. 205.

569. R. Haus. Über Induktionen in rotierenden Leitern. Z.S. 48. 1.

570. *W. Lebedinski. Moderne Ansichten über die Ruhmkorffsche Spirale (russ.). E.P. 1901. 265.

571. V. Karpen. Principe relatif à la distribution des lignes d'induction magnétique. B.S.B. 11. 48.

572. E. Hoppe. Unipolare Induktion. A.P.L. 8. 663.

573. T. Levi-Civita. La teoria elettrodinamica di Hertz di fronte ai fenomeni di induzione. R.A.L.R. 11 B. 75.

574. *A. Franchetti. Capacità di polarizzazione e dissipazione di energia di alcuni voltametri sottoposti a correnti alternate. N.C.P. (5) 2. 312; R. 5. 1.

575. M. Wien. Über die Polarisationskapazität des Palladiums. A.P.L. 8. 372.

576. H. Dießelhorst. Über ballistische Galvanometer mit beweglicher Spule. A.P.L. 9. 458.

577. A. Wehnelt. Über die freie Elektrizität im dunklen Kathodenraume. P.Z. 3. 501.

578. H. Dießelhorst. Ballistische Methode der Messung von Elektrizitätsmengen. A.P.L. 9. 712.

579. P. Janet. Quelques remarques sur la théorie de l'arc chantant de Duddell. C.R. 134. 821.

580. W. Kaufmann. Über die Analogie zwischen dem elektrischen Verhalten Nernstscher Glühkörper und demjenigen leitender Gase. N.G.G. 1901. 62.

581. G. Preuner. Über die Dissoziationskonstante des Wassers und die elektrometrische Kraft der Knallgaskette. Z.P.C. 42. 50.

582. *K. Schaum. Über die Formeln für Oxydationselektroden n. Oxydationsketten. S.G.M. 1902.

583. E. Bose. Über eine neue Art von Gravitationselementen. J.S.G. 78. 4.

584. O. Sackur. Nachtrag zu einer früheren Abhandlung. (Z.P.C. 38. 129.) Z.P.C. 39. 364.

585. *H. Poincaré. A propos des expériences de M. Crémieu. R.G.O. 12. 994.

Siehe auch 330—332; 334—336; 363; 490; 548; 789—790; 852; 883.

Thermoelektrizität.

586. *E. Pinczower. Über thermoelektrische Hysteresis und Thermoelektrizität von Kupfer- und Zinklegierungen. M.P.G.Z. 1901. 24.

587. A. Einstein. Über die thermodynamische Theorie der Potentialdifferenz zwischen Metallen und vollständig dissoziierten Lösungen ihrer Salze und über eine elektrische Methode zur Erforschung der Molekularkräfte. A.P.L. 8. 798.

588. F. A. Schulze. Über das Verhalten einiger Legierungen zum Gesetz von Wiedemann und Franz. A.P.L. 9. 555.

589. J. J. Thomson. On some of the consequences of the emission of negatively electrified corpuscles by hot bodies. P.M. 4. 253.

590. W. Williams. On the temperature variation of the electrical resistance of pure metals. P.M. 3. 515.

591. C. Féry. Sur la température de l'arc électrique. C.R. 134. 1201.

592. J. Stark. Einfluss der Temperatur auf die Ionisierung durch Ionenstoß. A.P.L. 8. 829.

593. Berthelot. Recherches sur les forces électromotrices. C.R. 134. 893.

594. L. Lecornu. Sur les moteurs à combustion. C.R. 134. 1347.

Siehe auch 483. 884.

Elektronentheorie.

595. R. Abegg u. W. Gaus. Beitrag zur Theorie der direkten Bestimmungsmethode von Ionenbeweglichkeiten. Z.P.C. 40. 737.

596. B. D. Steele. The measurement of ionic velocities in aqueous solution and the existence of complex ions. T.R.S.L. 198 A. 105.

597. B. D. Steele. Die Messung von Ionengeschwindigkeiten in wässrigen Lösungen und die Existenz komplexer Ionen. Z.P.C. 40. 689.

598. *C. D. Child. The velocity of ions from hot platinum wires. P.R. 14. 221.

599. *C. D. Child. The velocity of ions drawn from the electric arc. P.R. 14. 65.

600. M. Abraham. Prinzipien der Dynamik des Electrons. P.Z. 4. 57.

601. P. de Heen. L'iodynamisme. B.A.B. 1902. 20. 107.

602. W. Kaufmann. Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Bequerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. N.G.G. 1901. 143.

603. *W. Crookes. Radioactivity and the electron theory. E.R. 40. 496.

604. B. Sabat. Über das Leitvermögen der Gemische von Elektrolyten. Z.P.C. 41. 224.

605. W. Kaufmann. Die elektromagnetische Masse des Elektrons. P.Z. 4. 54.

606. W. Voigt. Elektronenhypothese und Theorie des Magnetismus. N.G.G. 1901. 169.

Siehe auch 436; 524; 592; 627; 637; 648; 650.

Magnetismus.

607. *Ascoli. Sulla stabilità del magnetismo temporaneo e permanente. N.C.P. (5) 3. 5.

608. *A. Dina*. Confronto sperimentale fra l'isteresi alternativa, statica e rotante. R.I.L. (2) 34. 988.
609. *G. F. C. Searle* und *T. G. Bedford*. The measurement of magnetic hysteresis. T.R.S.L. 198 A. 33.
610. *S. Sano*. Über Magnetostriction von Kristallen ohne Hysteresis. P.Z. 3. 401.
611. **S. Sano*. Note on Kirchhoffs theory of magnetostriction. J.T. 8. 229.
612. **A. P. Wills*. On magnetostriction. P.R. 15. 1.
613. *H. Nagaoka*. On the magnetostriction of steel, nickel, cobalt and nickelsteels. P.M. 4. 45.
614. *W. Voigt*. Dispersione rotatoria magnetica nell'interno delle righe di assorbimento. R.A.L.R. 11 A. 459.
615. **R. Schild*. Untersuchungen über die räumliche Verteilung der magnetischen Kraft in ringförmigen Lufträumen. M.P.G.Z. 1901. 27.
616. **J. Pawling*. Notes on magnetic curves. J.F.I. 153. 269.
617. **C. Maurain*. Magnetisme; couches de passage et actions à petite distance. R.G.O. 12. 1059.
618. **G. E. Pouchet*. Attractive force and magnetic induction. P.R. 15. 233.
619. *J. Zenneck*. Über induktiven magnetischen Widerstand. A.P.L. 9. 497.
620. *C. Benedicks*. Untersuchungen über den Polabstand magnetisierter Cylinder. A.V.A.S. 27. No. 5.
621. *C. Benedicks*. Sur les facteurs démagnétisants des cylindres. A.V.A.S. 27. N. 4.
622. **C. Tangl*. Über die mechanischen Wirkungen der Magnetisierung (ung.). M.T.E. 18.
623. **H. E. J. G. du Bois*. Magneto-kinetische Kreisel zur Nachahmung von para- und diamagnetischen Erscheinungen. M.P.M. 1901. 59.
624. **C. Tangl*. Die Wirkung der Magnetisierung auf den Elastizitätskoeffizienten (ung.). M.T.E. 18.
625. *S. Sano*. Notiz über Magnetisierung kubischer Krystalle. P.Z. 4. 8.
626. *W. Voigt*. Über Pyro- und Piezomagnetismus der Krystalle. A.P.L. 9. 94.
627. *W. Voigt*. Elektronenhypothese und Theorie des Magnetismus. A.P.L. 9. 125.
628. **A. Righi*. Ancora sulla questione del campo magnetico generato dalla convezione elettrica. N.C.P. (5) 3. 71.
629. *P. Schulze*. Über das Unifilar-magnetometer. A.P.L. 8. 714.
630. *H. Meldau*. Die Kompensation des Schiffskompasses. P.Z. 3. 554.
631. *H. Meldau*. Die Ablenkung des Kompasses an Bord der Eisenschiffe. P.Z. 3. 391.
- Siehe auch 606; 885; 886; 892.

Thermomagnetismus.

632. **W. Ignatowski*. Über die Erwärmung magnetischer Stäbe durch Foucaultsche Ströme. J.R.P.C.G. 34. 49.
633. *J. Lissar*. Über die Beziehung zwischen dem Temperatur- und Induktionskoeffizienten eines Magnetstabes und seinem magnetischen Momente. M.Z. 19. 220.

Elektromagnetismus.

634. **Roesen*. Die neuere Maxwell-Hertzsche Anschauung über Magnetismus und Elektrizität. J.V.C. 1900 bis 1901. 44.
635. *E. Cohn*. Über die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper. N.G.G. 1901. 74.
636. **G. Giorgi*. Sul sistema di unità di misure elettromagnetiche. N.C.P. (5) 4. 11.
637. **B. Davis*. Some preliminary experiments on the motion of ions in a varying magnetic field. S. 15. 853.
638. *J. Patterson*. On the change of electrical resistance of metals when placed in a magnetic field. P.M. 3. 643.
639. *J. B. Whitehead*. The magnetic effect of electric displacement. A.J.S. 14. 109.
640. *W. M. Varleigh*. On the magnetism induced in iron by rapidly oscillating current field. P.M. 3. 500.
641. **W. W. Nikolaev*. Réaction électromagnétique. J.R.P.C.G. 34. 25.
642. *R. H. Weber*. Elektromagnetische Schwingungen in Metallröhren. A.P.L. 8. 721.
643. *P. de Heen*. Interprétation théorique des différents procédés d'électrisation et sur un nouveau mode d'induction électro-magnétique. B.A.B. 1902. 867.
644. **A. Masini*. Di una disposizione opportuna per aumentare l'effetto delle onde elettromagnetiche sopra un circuito. N.C.P. (5) 3. 455.
645. *W. E. Williams*. On the magnetic change of length and electrical resistance on nickel. P.N. 4. 425.
646. **T. Levi-Civita*. Influenza di un schermo conduttore sul campo elettro-

magnetico di un corrente alternativa parallela allo schermo. N.C.P. (5) 8. 442.

647. **Severini*. L'elasticità de l'etere nei fenomeni elettromagnetici. Pol M. 1901 Juni; Aug.; Sept.

648. *W. Kaufmann*. La déviation magnétique et électrique des rayons Becquerel et la masse électromagnétique des électrons. C.R. 185. 574.

649. *M. Planck*. Zur elektromagnet. Theorie der Dispersion in isotropen Nichtleitern. S.A.B. 1902. 470.

650. *E. van Everdingen jun.* Quelques remarques sur l'application de la théorie des électrons à l'augmentation

de la résistance électrique dans un champ magnétique et au phénomène de Hall. C.P.L. 72.

651. *Z. E. Crook*. Demagnetizing effects of electromagnetically compensated alternating currents. A.J.S. 14. 133.

652. *N. Vasilescu - Karpen*. Sur la réaction magnétique de l'induit des dynamos. C.R. 134. 827.

653. *W. Peddie*. A construction for the force, at any point, due to electric point charges or ideal magnets, with an extension to continuous distributions. P.E.M.S. 20. 73.

Siehe auch 318; 571; 602; 605; 628.

F. Geodäsie.

Metrologie.

Siehe 289; 872; 873.

Niedere Geodäsie.

654. **W. Heyder*. Das Abstecken von Kreisbogenkurven ohne Längenmessung. F.C. 24. 266.

655. **E. Fabbri*. Sull' area di un poligonale convessa con l'applicazione alla permuta dei terreni. R.T.C. 14. 113; 129.

656. **G. Abbate-Daga*. Collegamento di un poligonale con un punto trigonometrico inaccessibile. R.T.C. 14. 1.

657. **G. Bonaccorsi*. Area di un poligono rilevato per camminamento e per intersezione. R.T.C. 14. 108; 121.

658. **F. Schrader*. Le tachéographie. V.I.G.C. 7. 110.

Siehe auch 887.

Höhere Geodäsie.

659. **F. R. Helmert*. Neuere Fortschritte in der Erkenntnis der math. Erdgestalt. V.I.G.C. 7. 5.

660. **Messerschmidt*. Die Gestalt der Erde in der modernen Geodäsie. J.P.G.Z. 10. 33.

661. **C. W. Wirtz*. Die Kimmteufe auf der ellipsoidischen Erdfigur. M.R.B. 12. 837.

662. **G. B. Maffiotti*. I sistemi di proiezione nei rilevamenti catas-

tali moderni. R.T.C. 14. 9; 29; 54; 65.

663. **O. Zanotti-Bianco*. Dimostrazione elementare del teorema di Clairaut. R.T.C. 14. 17; 38; 58.

664. **W. C. Bunnell*. Controlling a topographical survey. E.N. 45. 116.

Markscheidekunst.

Siehe 21.

Topographie.

665. *S. Günther*. Über gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe. S.A.M. 1902. 17.

Siehe auch 664; 888.

Kartenprojektion.

666. **K. Peucker*. Drei Thesen zum Ausbau der theoretischen Kartographie. G.Z. 8. 65; 145; 204.

667. **K. Peucker*. Zur kartographischen Darstellung der dritten Dimension. G.Z. 1901. 22.

668. *L. Klerič*. Konstruktion der Parallelkreisbilder im Netze der Mercatorprojektion. A.H. 30. 343.

669. *C. E. Stromeyer*. Surface equivalent projections. V.I.G.C. 7. 99.

Siehe auch 110.

G. Astronomie.

Theoretische Astronomie.

670. *M. Bronska.* Wyrażenia współczynników w rozwinęciach na szeregi anomalii mimośrodowej, anomalii prawdziwej i promienia wodzącego drogi ciała niebieskiego (Ausdrücke der Koeffizienten in den Entwicklungen der wahren und der exzentrischen Anomalie und des Radius-Vektor der Bahn eines Himmelskörpers.) W.M. 6. 266.

671. **P. Harzer.* Über die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach 3 Beobachtungen P.S.K. 11. 128.

672. **A. Ivanov.* O schodinnosti rjadov etc. (Über die Konvergenz der Reihen, welche zur Berechnung der Koordinaten der elliptischen Bewegung dienen.) B.R.A.G. 8. 95.

673. **A. Ivanov.* Geometričeskoe značenie ekliptikalnych i ekvatorialnych postojannyh etc. (Über die geometrische Bedeutung der ekliptikalen und äquatorialen Konstanten, welche zur Berechnung der Ephemeride irgend eines Himmelskörpers dienen.) B.R.A.S. 8. 98.

674. *M. C. Taylor.* The computation of an ephemeris of a planet or a comet. P.A. 9. 311.

675. **C. V. L. Charlier.* On periodic orbits. M.L.A.O. 18.

676. **H. C. Plummer.* On periodic orbits in the neighbourhood of centres of libration. M.N.A.S. 62. 6.

677. *E. O. Lovett.* Note on Gylden's equations of the problem of 2 bodies with masses varying with the time. A.N.K. 158. 337.

678. **R. v. Kövesligethy.* Über die Achsendrehung der Fixsterne. B.M.N. 17. 166.

679. *Ö. Bergstrand.* Sur la parallaxe d'une étoile dans le voisinage de 61 Cygne. B.V.A.S. 58. 429.

680. **G. W. Hill.* On the use of the spherico-cone in astronomy. A.J.B. 22. 53.

Siehe auch 69; 75; 76; 114; 421.

Sonnenbewegung.

681. **J. G. Potter.* A new determination of the solar motion. A.J.B. 21. 134.

682. **W. W. Campbell.* A preliminary determination of the motion of the solar system. A.J.C. 13. 80; P.A.S.F. 13. 51.

683. **L. Boss.* Tentative researches upon precession and solar motion. A.J.B. 21. 161.

684. **W. Sandemann.* The path of the sun. K.L. 24. 62.

Erdbewegung.

685. **C. Flammarion.* Les 12 mouvements de la Terre. B.S.A.F. 15. 262.

686. *D. Hector.* The equatorial component of the earth's motion in space. T.N.Z.I. 34. 513.

687. *F. Folie.* Sur les variations journalières de la latitude et du méridien dans le système de l'axe instantané. B.A.B. 1902. 201.

688. **T. Albrecht.* Die Veränderlichkeit der geographischen Breiten. V.I.G.C. 7. 18.

689. **S. C. Chandler.* Definitive formulas for computing variations of latitude. A.J.B. 21. 119.

690. *A. V. Baecklund.* Ett bidrag till teorien för polens rörelse. A.V.A.S. 27. No. 1.

691. *J. Péroche.* Le balancement polaire. A.S.G.N. 29. 215.

692. **R. S. Woodward.* The effects of secular cooling and meteoric dust on the length of the terrestrial day. A.J.B. 21. 169; S. 14. 402.

Siehe auch 264; 532; 752; 759; 760; 770; 773; 795.

Mondbewegung.

693. *H. Andoyer.* Sur l'accélération séculaire de la longitude moyenne de la lune. C.R. 135. 432.

Siehe auch 771.

Planetenbewegung.

694. **F. R. Moulton.* A general method of determining the elements of orbits of all excentricities from 3 observations. A.J.B. 22. 43; S. 14. 399.

695. **J. Rimker.* Ein empirisches Gesetz über die Achsendrehung der Planeten. A.R.L. 3. 324.

696. **W. K. Pickering.* Explanation of the inclination of the planetary axes. A.J.B. 22. 56.

697. **A. Souleyre.* Les inégalités de Mercure et la périodicité des taches solaires. B.S.A.F. 15. 402.

698. *Deichmüller*. Erste Bestimmung der Rotationszeit des Planeten Eros. S.N.G.B. 1901. A. 37.

699. *H. Poincaré*. Les solutions périodiques des planètes du type d'Hécube. B.A. 19. 177.

700. *H. Poincaré*. Sur les planètes du type d'Hécube. B.A. 19. 289.

Siehe auch 715.

Kometenbewegung.

701. **J. Misuhara*. Determination of the elements of parabolic orbit of a comet by graphical process. J.T. 8. 215.

Meteoritenbewegung.

702. *O. Callandreau*. Sur quelques particularités de la théorie des étoiles filantes. C.R. 135. 557.

703. **B. Cookson*. On the accuracy of eye-observations of meteors and the determination of their radiant point. M.N.A.S. 61. 132; 618. — *H. C. Plummer* 368.

704. *G. Grundmann*. Über die Bahn des am 15. Juli 1900 vornehmlich in Schlesien beobachteten hellen Meteors. J.S.G. 78. 87.

Doppelsternbewegung.

705. **H. N. Russell*. An improved method of calculating the orbit of a spectroscopic binary. A.J.C. 15. 252.

706. *V. Alberti*. Su la determinazione grafica dell' orbita reale nella teoria delle stelle doppie. R.A.N. (3) 8. 108.

Finsternisse.

707. **G. Grablovitz*. Calcolo approssimativo della congiunzione apparente per la occultazioni lunari. M.S.S.I. 29. 194.

708. **H. C. Plummer*. On a method of reducing occultations of stars by the moon. M.N.A.S. 61. 145.

709. **M. Pevcov*. Predvčíslenie pokrytí etc. (Abgekürzte Methode einer Vorausberechnung der Fixsternbedeckungen vom Monde und der Sonnenfinsternisse für gegebene Örter). B.R.A.G. 8. 106.

Störungen.

710. **T. Levi-Civita*. Sulla forma dello sviluppo della funzione perturbatrice. A.I.V. 8. 654.

711. *Simonin*. Sur les équations canoniques et la fonction perturbatrice. B.A. 19. 129.

712. **J. Morrison*. General perturbations and the perturbative function. P.A. 9. 130; 249; 436.

713. *O. Callandreau*. Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice. J.E.P. (2) 7. 29.

714. **P. V. Neugebauer*. Ein Beitrag zur Theorie der speziellen Störungen. M.U.S.B. 1. 71.

715. *C. B. S. Cavallin*. Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets. B.V.A.S. 58. 685.

716. **C. V. L. Charlier*. Zur Theorie der säkularen Störungen. M.L.A.O. 15.

717. **G. Norén und S. Raab*. Hilfstafeln zur Berechnung der säkularen Störungen der kleinen Planeten. M.L.A.O. 2.

718. **A. Idman*. Bemerkungen zu einem Satz von Leverrier die sekularen Störungen der kleinen Planeten betreffend. M.L.A.O. 14.

719. **O. Callandreau*. Propriétés d'une certaine anomalie pouvant remplacer les anomalies déjà connues dans le calcul des perturbations des petites planètes. C.R. 134. 1478; 135. 8.

Vielkörperproblem.

720. **A. Hall*. The problem of 3 bodies. A.J.B. 21. 113.

Siehe auch 89; 188.

Kosmologie.

721. **A. Gareis*. Beiträge zur Cosmogenie. M.A.G.S. 29. 877.

722. *P. Barbarin*. Sur le paramètre de l'Univers. P.S.B. 1900—1901. 71.

723. **Lord Kelvin*. On the clustering of gravitational matter in any part of the Universe. R.B.A. 71. 563.

724. **B. S. Woodward*. The energy of condensation of stellar bodies. S. 15. 262.

725. **R. v. Kövesligethy*. Az égi testek fejlődése és a Föld kora. (Entwicklung der Himmelskörper und Alter der Erde). M.T.E. 19. 178.

726. **P. Rudski*. O wieku ziemi (Über das Alter der Erde). C.A.C. 41. 96.

727. **du Ligondès*. Sur les planètes télescopiques. B.S.A.F. 15. 358.

728. *L. Picart*. Sur une hypothèse, concernant l'origine des satellites. C.R. 134. 1409.

729. **T. C. Chamberlin*. On a possible function of disruptive approach in the formation of meteorites, comets and nebulae. *A.J.C.* 14. 17.

Siehe auch 131; 212.

Astrophysik.

730. **S. A. Saunder*. The stereographic projection of the celestial sphere. *J.B.A.A.* 11. 209.

731. *M. P. Rudski*. O prawie rozkladu temperatury wewnątrz ciała gazowego niebieskiego. (Über das Gesetz der Verteilung der Temperatur im Innern eines gasförmigen Himmelskörpers.) *T.W.* 13. 341.

732. *P. Rudski*. Note sur la loi de la température dans un corps céleste gazeux. *B.A.* 19. 184.

733. *C. Barus*. The flower-like distortion of the coronas due to graded cloudy condensation. *A. J. S.* (4) 13. 309.

734. *F. Biske*. Próba zastosowania badań hydrodynamicznych do protuberancji słonecznych. (Versuch einer Anwendung der hydrodynamischen Theorie auf die Sonnenprotuberanzen). *W.M.* 6. 147.

735. *A. Wolfer*. Die Wolfschen Tafeln der Sonnenfleckenhäufigkeit. *M.Z.* 19. 193.

736. **A. S. Young*. On the density of the solar nebulae. *A.J.C.* 13. 338.

737. *G. H. Bryan*. The kinetic theory of planetary atmospheres. *N.* 66. 54.

738. **S. Kalischer*. Über den Lichtdruck und dessen Einfluß auf die Gestalt der Kometenschweife. *W.B.* 2. 165; 192.

739. *J. Halm*. Über den Gleichgewichtszustand der Sternatmosphären. *A.N.K.* 160. 85.

Siehe auch 417; 457; 484; 531; 692; 729; 752.

Sphärische Astronomie.

740. **E. Holmes*. A chapter for astronomical beginners. *J.B.A.A.* 11. 153.

741. **J. Fulst*. Zur Bestimmung des Azimuts. *H.H.* 38. 304.

742. **Radler de Aquino*. Nova maneira de calcular rapidamente o „angulo horario“ d'um astro. *R.M.B.* 38. 653.

743. *A. Wedemeyer*. Bemerkungen über die Berechnung der Höhe eines Gestirns. *A.H.* 30. 399.

744. *H. Kimura*. Formula and tables for determining the time with a portable transit instrument. *J.T.* 8. 209; 9. 7.

Aberration.

745. *A. Gullstrand*. Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen. *N.A.U.* (3) 20.

746. **J. Plassmann*. Aberration und Parallaxe. *M.V.A.P.* 11. 119.

747. *F. Folie*. Sur la détermination de la constante de l'aberration au moyen des observations de Struve. *B.A.B.* 1901. 455.

Chronologie.

748. *A. Lafon*. Calcul des fêtes de Paques pendant 7 siècles. *M.A.Ly.* (3) 6. 47.

Gnomonik.

749. **N. Lattey*. How to make a sundial II. *E.M.W.* 73. 215.

750. **C. Weidenfeld*. Sonnenuhren und ihre Mängel. *M.V.A.P.* 12. 13; 24.

H. Geophysik.

Geophysik.

751. **A. Nippoldt jr.* A theorem on Fourier series and its application in geophysics. *T.M.W.* 7. 51.

752. **G. K. Burgess*. The value of the gravitation constant. *P.R.* 14. 257.

753. *F. R. Helmert*. Über die Reduktion der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerebeschleunigung auf ein gemeinsames Niveau. *S.A.B.* 1902. 843.

754. *M. Contarini*. Sul problema generale della sismografia. *R.A.L.R.* 11 A. 380; 433; 472; 519. 11 B. 132.

755. *H. Rousseau, H. Brocard*. Influence du vent sur la production des vagues. *J.M.* 9. 196. — *E. Malo* 199.

756. *J. Schubert*. Der Wärmeaustausch im festen Erdboden, in Gewässern und in der Atmosphäre. *D.V.N.* 73. 213.

757. *H. H. Clayton*. The effect of secular cooling and meteoric dust on the length of the day. *S.M.L.* 60. 190.

758. *E. Nordmann*. La cause de la période annuelle des aurores boréales. C. R. 184. 761.

759. **C. V. L. Charlier*. Contributions to the astronomical theory of an ice age. M.L.A.O. (2) 8.

760. *C. V. L. Charlier*. Über die astronomische Erklärung einer Eiszeit. D.V.N. 73. 10.

Siehe auch 174; 692; 725; 726; 892; 893.

Mathematische Meteorologie.

761. **L. de Marchi*. Note di meteorologia matematica. R.I.L. (2) 35. 254.

762. **M. Dechevrens*. Calcul des séries de Fourier ou de Bessel appliquées à la météorologie. M.A.L.R. 17.

763. **W. H. Dines*. The element of chance applied to various meteorological problems. Q.J.M.S. 28. 53.

764. **J. Milne*. Meteorologic phenomena in relation to changes in the vertical. Q.J.M.S. 28. 9.

765. *N. Ekholm*. Über die Höhe der homogenen Atmosphäre und die Masse der Atmosphäre. M.Z. 19. 251.

766. *V. Bjerknes*. Cirkulation relativ zu der Erde. B.V.A.S. 58. 789; M.Z. 19. 97.

767. **R. A. Edwin*. On the mechanical principle of atmospheric circulation. Q.J.M.S. 28. 83.

768. **H. H. Clayton*. The daily barometric wave. S. 15. 232.

769. *O. L. Fassig*. The westward movement of the daily barometric wave. M.W.R. 29. 495.

770. *L. G. Tippenhauer*. Dynamische Effekte der doppelten Erdbewegung auf die Atmosphäre. A.A.S. 23. No. 4.

771. **A. Poincaré*. Combinaison des effets barométriques de la révolution synodique et de la rotation terrestre sur l'ensemble du globe. A.S.M.F. 50. 96.

772. *H. Clayton*. Le cyclone d'éclipse, le cyclone et l'anticyclone diurne des régions tempérées. A.S.M.F. 50. 60.

773. **V. W. Ekman*. Om jordrotationens inverkan på vindströmmar i hafvet. N.M.N. 40.

774. **F. H. Bigelow*. Studies on the statics and kinematics of the atmosphere in the United States. M.W.R. 30. 13; 80; 163; 250; 303.

775. **R. Börnstein*. Die atmosphärische Strahlenbrechung des Lichtes und des Schalles. N.S. 1. 63.

776. **L. Terkan*. A refractis es az extinctis elemēte. (Theorie der Refraktion und Extinktion.) P.A.O.B. 2.

777. **V. E. Boccara*. Sulle variazioni diurne della rifrazione atmosferica. M.S.S.J. 30. 162.

778. **G. Saija*. Sulle variazioni della rifrazione atmosferica. M.S.S.J. 28. — *V. E. Boccara* 30.

779. **A. Riccò*. Deformazione del disco solare all'orizzonte per causa della rifrazione atmosferica. M.S.S.J. 30. 96.

780. **J. Baillaud*. Sur les variations de la réfraction astronomique. J.P. (4) 1. 319.

781. **A. Arendt*. Über die scheinbare Abflachung des Himmelsgewölbes und die Vergrößerung der Gestirne am Horizont. W.A.B. 2. 125.

782. *A. Zanon*. Sul fenomeno della luna orizzontale. R.F.M. 3. 761.

783. *E. Oddone*. Sul coefficiente medio di trasparenza dell'aria per grandi visuali terrestri. R.I.L. (2) 34. 511.

784. *G. J. Bailey*. The duration of the twilight within the tropics. S. 15. 286.

785. **Robertson*. On the equilibrium of a column of air and the atmospheric temperature. P.P.S.G. 31.

786. **A. Weilenmann*. Die Wärme in der Luftsäule und ihre Beziehung zu den Gewittern. M.P.G.Z. 1902. No. 2.

787. *J. W. Sandström*. Über die Beziehungen zwischen Temperatur und Luftbewegung in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen. B.V.A.S. 58. 759. M.Z. 19. 161. — *V. Bjerknes* B.V.A.S. 58. 775.

788. **H. M. Watts*. The mechanism and causation of hot waves. J.P. (4) 1. 285.

789. *V. Conrad*. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität VIII-IX. S.A.W. 111. 333.

790. —. Die Ebertschen Untersuchungen über atmosphärische Elektrizität. M.R.T.G. 1902. Heft 3.

791. *E. v. Oppolzer*. Zur Theorie der Scintillation der Fixsterne. S.A.W. 110. 1239.

792. *H. Gravelius*. Methodische Bemerkungen zur Diskussion von Periodizitäten in der Klimatologie. S.J.D. 1902. 24.

Siehe auch 248; 527; 730; 756; 891.

Ebbe und Flut.

793. **E. Plunstead*. The new theory of tide. N.M.L. 70. 183.

794. **Spindler*. Priliv i otliv etc. (Bearbeitung der Flutbeobachtungen)

mit Hilfe der harmonischen Analyse). A.H.P. 22 und 23.

795. *F. Folie*. Variation de latitude due aux marées. B.A.B. 1901. 520.

Nautik.

796. *E. Knipping*. Zur Lösung nautisch-astronomischer Aufgaben, wenn keine große Genauigkeit verlangt wird. A.H. 30. 257.

797. **H. Michiels*. Détermination de l'heure au moyen d'un gnomon à suspension. B.S.B.A. 6. 318.

798. *—*. Determinacion del estado absoluto de un cronometro per medio de pares de estrellas de igual altura. R.G.M.M. 49. 477.

799. **D. Mars*. Eenige beschouwingen over plaats en tijdsbepaling. D.Z.R. 23. 238; 314; 399; 513.

800. **Marcuse*. Die neuere Entwicklung der geographischen Ortsbestimmungen zu Lande und auf See. M.R.B. 12. 1307.

801. **H. Heyenga*. Neue direkte Methode der Ortsbestimmung. H.H. 38. 378.

802. **C. Decante*. Détermination de position du navire quand l'horizon n'est pas visible. R.M.M.P. 147. 491.

803. **A. Stupar*. Einige Bemerkungen über die astronomische Ortsbestimmung. M.A.S.S. 29. 483.

804. **H. Heyenga*. Neue Methode der Ortsbestimmung. H.H. 38. 378.

805. **E. Gelcich*. Di un metodo per la determinazione del „punto nave“ indipendente da eventuali errori strumentali e di depressione. R.M.R. 34 d. 241.

806. *Radler de Aquino*. A solução geral do problema do ponto servado no mar ou o methodo de Marcq St. Hilaire. R.M.B. 38. 1048.

807. **Radler de Aquino*. Methodo de Marcq Saint Hilaire. R.M.B. 37. 280.

808. *P. Hagemann*. Die Marcq St. Hilaire'sche Methode kombiniert mit der aus der Meridianhöhe entnommenen Breite. A.H. 30. 547.

809. **G.* Über die Bestimmung des Schiffsorts mit Hilfe von drei Standlinien. M.R.B. 12. 739.

810. **G. Bolwin*. Standlinien als Längen- und Breitenrechnung. H.H. 38. 555; 568.

811. **H. C. Comstock*. Establishing a meridian line. P.A. 9. 246.

812. **P. van der Zee*. Meridiaanshoogte en grootste hoogte. D.Z.R. 23. 87.

813. **P. W. Sachse*. Sterrenobservatie en hoogte lijnen. D.Z.R. 23. 106.

814. **A. E. Arkenbout-Schokker*. Het gebruik van hoogte lijnen. D.Z.R. 23. 234.

815. **L. Roosenberg*. Over den invloed van gelijke fouten in de hoogten op het bestek door hoogtelijnen. R.Z.R. 23. 146.

816. **O. Fulst*. Zur Bestimmung des Azimuts. H.H. 38. 304.

817. **E. Molino*. Sulla misura delle distanze in mare. R.M.R. 34 a. 120.

818. *A. Wedemeyer*. Reduktion der Mondsdistanzen. A.H. 30. 533.

819. *C. Börgen*. Über die Anwendung der Thomsonschen Summertafeln zur Ermittlung der Gestirnshöhe bei Anwendung der Methode von Marcq St. Hilaire. A.H. 30. 336. — *Götzheim* 397.

820. **P. W. Sachse*. Het resultaat van de gewijzigde Sumner en Villarceau methode door berekening en door constructie. D.Z.R. 23. 171.

821. **H. B. Goodwin*. The mercators chart as a exmeridian-table. N.M.L. 70. 431; 600. — *E. D. Law* 498. — *H. E. Pury Cust* 801.

822. **E. Gelcich*. Die Koppeltafel. H.H. 38. 76.

823. *H. B. Goodwin*. Napiers analogies and the double chronometer. N.M.L. 70. 89.

Siehe auch 70; 234; 894.

I. Naturwissenschaft.

Mathematische Chemie.

824. **W. H. Alexieff*. Grundlage der symbolischen Theorie der Invarianten. (russ.) A.U.-J. 1901. No. 2.

825. *H. Euler*. Zur Theorie der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit. Z.P.C. 40. 498. — *R. Wegscheider* 41. 62.

826. **P. Saurel*. On the triple point. J.P.C. 6. 399.

827. *P. Hellström*. Om grundämnenas uppkomst. B.V.A.S. 58. 351.

828. *G. Bodländer u. R. Fittig*. Das Verhalten von Molekularverbindungen bei der Auflösung II. Z.P.C. 39. 597.

829. *J. H. Vincent.* On a general numerical connexion between the atomic weights. P.M. 4. 108.

830. *Lord Kelvin.* On the weights of atoms. P.M. 4. 177; 281.

831. *E. Warburg.* Über die Bildung des Ozons bei der Spitzenentladung in Sauerstoff. A.P.L. 9. 781.

832. *L. Bruner.* Chemische Dynamik der Bromsubstitution. Z.P.C. 41. 513.

833. *W. Müller.* Über die Zersetzungsgeschwindigkeit der Brombernsteinsäure in wässriger Lösung. Z.P.C. 41. 483.

834. *W. Federlin.* Die Reaktion zwischen Kaliumpersulfat, Jodwasserstoff und phosphoriger Säure. Z.P.C. 41. 565.

835. *P. Walden i M. Centnerschwer.* Ciekly dwutlenek siarki jako rozpuszczalnik. (Über die Lösungen in flüssigem Schwefelsäureanhydrid.) W.M. 6. 213.

836. *A. Mittasch.* Über die chemische Dynamik des Nickelkohlenoxyds. Z.P.C. 40. 1.

837. *K. Arndt.* Zersetzungsgeschwindigkeit des Ammoniumnitrits. Z.P.C. 39. 64.

838. *B. D. Zacharias.* Über den Zustand und die Eigenschaften der Kolloide. Z.P.C. 39. 468.

839. *V. Henri.* Über das Gesetz der Wirkung des Invertins. Z.P.C. 39. 194.

840. *R. Wegscheider.* Über die Verseifung von Karbon- und Sulfonsäuresestern. Z.P.C. 41. 52.

841. **C. E. Fawsitt.* Zersetzung des Harnstoffs. Z.P.C. 41. 601.

842. **P. Saurel.* On a theorem of Tammann. J.P.C. 6. 410.

843. *C. H. Ketner.* Gleichgewichte im System: Natriumcarbonat, Äthylalkohol und Wasser. Z.P.C. 39. 641.

Siehe auch 486; 487; 581.

Phasenlehre.

844. **J. E. Trevor.* A derivation of the phase rule. J.P.C. 6. 85.

845. *W. D. Bancroft.* Analytical chemistry and the phase rule classification. J.P.C. 6. 106.

846. *A. Meerburg.* Beitrag zur Kenntnis der Gleichgewichte im System dreier Komponenten, wobei zwei flüssige Schichten auftreten können? Z.P.C. 40. 641.

847. *F. Caubet.* Die Verflüssigung von Gasgemischen. Z.P.C. 40. 267. — *J. P. Kuenen* 41. 43.

Siehe auch 347; 485.

Elektrolyse.

848. *W. Nernst u. E. K. Riesenfeld.* Über elektrolytische Erscheinungen an der Grenzfläche zweier Lösungsmittel. N.G.G. 1901. 54; A.P.L. 8. 600.

Photochemie.

849. *E. Goldberg.* Beitrag zur Kinetik photochemischer Reaktionen. Z.P.C. 41. 1.

Thermochemie.

850. *de Forcrand.* Sur la composition des hydrates de gaz. C.R. 134. 835.

Elektrochemie.

851. **L. Kahlenberg.* Current electrochemical theories. T.A.E.S. 1. 119.

852. **Lori.* Le ipotesi moderne sopra il meccanismo dei fenomeni elettrochimici. L.E. 10. No. 5.

853. *F. Haber.* Eine Bemerkung über die Amalgampotentiale und über die Einatomigkeit in Quecksilber gelöster Metalle. Z.P.C. 41. 399.

Mathematische Physiologie.

854. *A. Broca et D. Sulzer.* La sensation lumineuse en fonction du temps. C.R. 134. 831.

K. Technik.

Technische Mechanik.

855. **H. Frahm.* Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen. M.F.I. 6. 33.

Siehe auch 154; 290.

Maschinenlehre.

856. **R. Lenz.* Une machine thermique idéale. R.G.O. 13. 93.

857. **J. Nadal.* Théorie de la machine à vapeur. A.F. 29. 73.

858. **L. Anspach.* Moderne Streitfragen in der Dampfmaschinentheorie. R.G.O. 12. 313.

859. *G. Lindner. Dampfhammerdiagramme. M.F.I. 4. 21.

860. R. Schreder. Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. P.Z. 4. 117.

861. *Belluzzo. Il calcolo pratico delle turbine a vapore. Pol M. 1901. Mai.

862. *E. Meyer. Untersuchungen am Gasmotor. M.F.I. 1901. 1.

863. *E. Körting. Untersuchungen über die Wärme der Gasmotorencylinder. M.F.I. 4. 46.

864. *A. Staus. Beitrag zur Wärmebilanz des Gasmotors. M.F.I. 4. 32.

Siehe auch 190; 191; 193; 465; 491; 594; 652; 855.

Eisenbahnwesen.

Siehe 192.

Uhrmacherkunst.

Siehe 896.

Hydrologie.

865. E. Maillot. Sur la prévision des débits minima des sources de la Vanne. C.R. 134. 1103.

Siehe 665.

Luftschiffahrt.

866. Torres. Sur un avant-projet de ballon dirigeable à quille intérieure. C.R. 135. 141.

Mathematische Musik.

867. P. v. Jankó. Über mehr als 12stufige gleichschwebende Temperaturen. B.A.M. 36.

868. F. Storch. Über die Wahrnehmung musikalischer Tonverhältnisse. Z.P.O. 27. 361.

Beleuchtungslehre.

869. E. Weinholdt. Über die Konstruktion von Isophengen. A.Gr. (3) 4. 22.

Photographie.

870. *M. J. Wilbert. On the reversal of the photographic image and its subsequent development in actinic light. J.F.I. 153. 231.

Elektrotechnik.

871. G. Benischke. Die Schutzvorrichtungen der Starkstoßtechnik gegen atmosphärische Entladungen. D.V.N. 73. 84.

Telegraphenwesen.

Siehe 371; 895.

Instrumentenkunde.

872. J. Pernet. Über einen Drehcomparator zur Vergleichung und Ausdehnungsbestimmungen von Maßstäben. M.P.G.Z. 1901. 7.

873. *G. Lippmann. Méthode pour vérifier si une glissière ou une règle sont rectilignes. J.P. (4) 1. 626.

874. R. Straubel. Über den Zusammenhang zwischen Absorption und Auflösungsvermögen. P.Z. 4. 74.

875. *F. L. O. Wadsworth. Description of a new type of focal plane spectroscopy. M.S.P.A.O. 7.

876. *F. L. O. Wadsworth. The theory of the ocular spectroscopy. M.S.P.A.O. 6.

877. *J. W. Gordon. Diffraction theory of the microscope. J.R.M.S. 1901. 353.

878. H. Siedentopf. Über Mikrospektroskopobjektiv nach Engelmann mit ausklappbaren geradsichtigen Gittern nach Thorp und ausklappbarem Polarisator. S.A.B. 1902. 711.

879. H. Siedentopf. Über ein Mikrospektrophotometer nach Engelmann mit Gitterspektrum. S.A.B. 1902. 706.

880. G. Sagnac. Principe d'un nouveau réfractomètre interférentiel. C.R. 134. 820.

881. *A. Cornu. Démonstration et usage des formules relatives au réfractomètre. B.S.M.F. 25. 54.

882. *P. Chappuis. Notes on gas-thermometre. P.P.S.L. 18. 89.

883. E. Marx. Über ein Hochfrequenzmeßgerät zur Bestimmung von Periode, Kapazität und Selbstinduktion eines Entladungskreises. B.G.L. 53. 437.

884. W. B. v. Czudnochowski. Ein Beitrag zur Frage der elektrischen Tiefenthermometer. A.H. 30. 264.

885. H. du Bois. Über störungsfreie Differentialmagnetometer. A.P.L. 9. 938.

886. Messerschmitt. Deviationsbestimmung der Kompass durch Schwingungszeiten. A.H. 30. 304.

887. *K. Haussmann. Zur Theorie des Theodolits. M.A.M.F. (2) 1.

888. **O. Jacoangeli*. Teoria dei strumenti topografici. R. T. C. 14. 136; 145.

889. *C. Bender*. Vortrag über Zeissasche Relieffernrohre und tereoskopische Entfernungsmesser. M. P. D. 17. 20.

890. *C. Klein*. Totalreflektometer mit Fernrohrmikroskop. S. A. B. 1902. 653.

891. *W. Trabert*. Die Korrektur der Registrierapparate wegen Trägheit. M. Z. 19. 136.

892. **A. Cornu*. Über den Einfluß des Erdmagnetismus auf den Gang von magnetischen Chronometern. R. I. H. 1. No. 19—20.

893. *G. de Cadet*. Dispositif d'électroscope atmosphérique. C. R. 134. 745.

894. *F. Nuß* et *J. Frič*. Note sur 2 appareils sans niveau pour la détermination de l'heure et de la latitude. B. A. 19. 261.

895. *E. Branly*. Récepteur de télégraphie sans fil. C. R. 34. 1197.

896. **E. Soulié*. Détermination de la méridienne en vue du réglage des montres. Co. (2) 44. 808.

897. *A. Schwassmann*. Der Stereokomparator. A. H. 30. 347.

Siehe auch 23; 24; 204; 335; 387; 394; 395; 411; 490; 564; 565; 576; 629—631; 658; 680.



*Sieben erschienen im Verlage von B. G. Teubner in
Leipzig und sind in allen Buchhandlungen — auch zur
Ansicht — zu erhalten:*

DR. K. SCHREBER,

PRIVATDOZENT FÜR PHYSIK,

DIE THEORIE DER MEHRSTOFFDAMPFMASCHINEN.

UNTERSUCHUNG DER FRAGE:

„IST WASSER DIE VORTEILHAFTESTE FLÜSSIGKEIT
ZUM BETRIEBE VON DAMPFMASCHINEN?“

UND BEARBEITUNG

DER AUF DIESE FRAGE SICH ERGEBENDEN ANTWORTEN.

MIT 12 ZEICHNUNGEN IM TEXT.

[IV u. 126 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 3.60. In Leinw. geb. *M.* 4.20.

DIE KRAFTMASCHINEN.

VORLESUNGEN ÜBER DIE WICHTIGSTEN DER ZUR ZEIT
GEBRAUCHTEN KRAFTMASCHINEN.

FÜR ZUHÖRER ALLER FAKULTÄTEN AN DER UNIVERSITÄT
GREIFSWALD GEHALTEN.

MIT 56 ABBILDUNGEN IM TEXT UND AUF EINER TAFEL.

[XII u. 348 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 6.—. In Leinw. geb. *M.* 6.80.

Die Theorie der Dampfmaschinen hat seit einer Reihe von Jahren
keine eigentlichen Fortschritte gemacht. Die sämtlichen Arbeiten der
Theoretiker beschränkten sich auf den Ausbau der von Hirn und
Zeuner gegebenen Arbeiten. So ist es gekommen, daß die so sehr

viel jüngeren Gasmotoren nahe daran sind, die Dampfmaschinen zu überflügeln, sowohl was die Ausbildung der Theorie anbelangt, als auch in Bezug auf die Ausnutzung der Brennstoffe.

Dieses Stocken in der Theorie der Dampfmaschinen liegt darin, daß man sich ausschließlich an Wasserdampfmaschinen gehalten hat. Ein Fortschritt in der Ausnutzung der Brennstoffe durch Dampfmaschinen kann nur durch den Übergang zu Mehrstoffdampfmaschinen erreicht werden.

Im vorliegenden Buch wird nun nachgewiesen, wie man die geeignetste Flüssigkeit auswählt und welches die dadurch erreichbaren Vorteile sind.

Inhaltsverzeichnis

zu „Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen“.

Einleitung	1
1. Der die Umwandlung der Wärmeenergie in Arbeit vermittelnde Körper muß ein Dampf sein	11
2. Temperatur- und Druckgrenzen. Maximum der durch einen Carnot'schen Prozeß zu gewinnenden Arbeit	15
3. Der Prozeß der Dampfmaschine. Maximum der mit einer Dampfmaschine aus den Heizgasen zu gewinnenden Arbeit. Obere Temperaturgrenze des Dampfmaschinenprozesses	21
4. Die unvollständige Expansion, die Überhitzung und die Vorwärmung	22
5. Die Eigenschaften der günstigsten Flüssigkeit. Definition der Mehrstoffdampfmaschinen	47
6. Der Wirkungsgrad der Mehrstoffdampfmaschine	63
7. Dampf tabellen	82
8. Die indizierte Arbeit	88
9. Berechnung der Heizflächen für eine 1000 P.-Anlage	99
10. Graphische Darstellung der Mehrstoffdampfmaschine	119

Das zweite Werk gibt in elementarer Darstellung, d. h. nur unter Benutzung der auf den Gymnasien und ähnlichen Anstalten gelehrtten Grundlagen der Mathematik und Physik, eine zusammenfassende Darstellung der wichtigsten Kraftmaschinen der Jetztzeit unter Bezugnahme hauptsächlich auf die Ausnutzung der Energievorräte der Natur und auf die Kosten der gewonnenen Arbeit.

Es dürfte sich ganz besonders für die Besitzer und Leiter von Fabriken und technischen Unternehmungen eignen, soweit sie nicht selbst Maschineningenieure sind, und zwar vom Landwirt, welcher seinen Betrieb durch Benutzung von Kraftmaschinen erleichtern will, bis zum Leiter von Textil- und chemischen Fabriken, die Kraftmaschinen benutzen müssen; für Verwaltungsbeamte, soweit sie

technischen Ressorts zugeteilt sind, Eisenbahn, Post u. s. w., oder überhaupt mit technischen Fragen zu tun haben; für Lehrer der Naturwissenschaften, welche ihren Schülern auch die Errungenschaften der Technik vortragen wollen, sowie für alle, welche sich für die Technik interessieren und im Besitze von Gymnasial- oder entsprechender Schulbildung sind.

Inhaltsverzeichnis zu „Die Kraftmaschinen“.

I. Einleitung.

	Seite
1. Aufgabe der Technik und Begriff der mechanischen Arbeit . . .	1
2. Die Bewegungsenergie	2
3. Die Entfernungsenergie	3
4. Ebbe und Flut	5
5. Wärme, elektrische, strahlende Energie	6
6. Chemische Energie	7
7. Geographische Verteilung der Energievorräte	8
8. Die Maschinen	10
9. Das Schwungrad	12
10. Der Regulator	15
11. Messung der Energie	18
12. Messung der mechanischen Arbeit	21
13. Wirkungsgrad der Kraftmaschine und Kosten der Arbeit . . .	24

II. Die belebten Motoren.

14. Die Arbeit des Menschen	29
15. Der Wirkungsgrad des Menschen	30
16. Arbeitstiere	31

III. Die Wind- und Wasserkraftmaschinen.

A. Die Windkraftmaschinen.

17. Der Wind	33
18. Das Segeln	35
19. Die Windmühlen	36
20. Die Windräder oder Windmotoren	37

B. Die Wasserkraftmaschinen.

21. Der theoretische Wirkungsgrad	39
22. Die Wasseranlage	41
23. Die Arten der Wasserkraftmaschinen	43
24. Geschichtliches	45

C. Die Wasserräder.

25. Das überschlächlige Wasserrad	46
26. Die Gefälleverluste und der Wirkungsgrad der überschlächligen Wasserräder	48

	Seite
27. Schütze und Kulissee	51
28. Schaufelform	53
29. Das Kropfgerinne	54
30. Wirkungsgrad der rückläufigen Räder	55
31. Das Sagebien- und Zuppinger-Rad	56
32. Die Regulierung der Wasserräder	57
D. Das Poncelet-Rad.	
33. Das Poncelet-Rad	58
E. Die Turbinen.	
34. Die Arten der Turbinen	62
35. Die Bedingungen für die Bildung der Schaufeln	64
36. Preßstrahl- und Freistrahlturbinen	67
37. Voll- und Partialturbinen	70
38. Der Wirkungsgrad der Turbinen	73
39. Die Regulierung der Turbinen	75
IV. Die Dampfmaschinen.	
A. Geschichtliches.	
40. Die Dampfmaschine vor Papin	77
41. Die atmosphärische Dampfmaschine	78
42. Watt	82
43. Die Entwicklung der Kesselsysteme	85
44. Die Entwicklung des Kondensators	87
45. Die Entwicklung des Zylinders mit seinem Gestänge	88
46. Tabellarische Zusammenstellung der Fortschritte des Dampfmaschinenbaues	94
B. Aus der Theorie der Dampfmaschine.	
47. Die Brennstoffe	95
48. Der Schornstein	97
49. Wärmedurchgang durch Heizflächen	98
50. Die Gase	100
51. Die Dämpfe	105
52. Der Carnotsche Kreisprozeß	109
53. Der Prozeß der Dampfmaschine	112
54. Der Kondensator	117
55. Die Mehrstoffdampfmaschinen	118
C. Wirkungsgrade und Verluste.	
56. Der Wirkungsgrad des Kessels	121
57. Die Dampfleitung	125
58. Der Indikator	126
59. Das Indikator diagramm	129
60. Diskussion des Indikator diagrammes	130
61. Der Einfluß der Wandungen	134
62. Der indizierte Wirkungsgrad	139
63. Die Verluste im Kondensator	140
64. Der mechanische Wirkungsgrad	141
65. Die Abwärmekraftmaschinen	143

D. Ausführung einer Dampfmaschine.

	Seite
66. Der Walzenkessel	146
67. Kesselarmaturen	147
68. Der Flamm- und Heizrohrkessel	153
69. Kessel mit Siedern und Wasserrohrkessel	157
70. Die Feuerung und der Schornstein	161
71. Vorwärmer und Überhitzer	166
72. Die Dampfleitung	169
73. Der Zylinder	171
74. Kolben, Kolbenstange und Stopfbüchse	174
75. Das Kurbelgetriebe	177
76. Die Steuerungen	186
77. Die Kondensatoren und Rückkühlanlagen	194

E. Berechnung einer Dampfmaschine.

78. Der Kessel und die Feuerung	199
79. Der Zylinder und das Gestänge	202
80. Der Kondensator mit Pumpen	208
81. Bau und Berechnung der Mehrstoffdampfmaschinen	209

F. Arten von Dampfmaschinen.

82. Einteilungsgrundsätze	212
83. Ein- und Mehrzylindermaschinen	212
84. Liegende und stehende Maschinen	219
85. Die Schiffsmaschine	222
86. Die Lokomobile	225
87. Die Lokomotive	229

G. Die Dampfturbinen.

88. Die Ausströmung des Dampfes aus Düsen	236
89. Die De Laval-Dampfturbine	237
90. Parsons' Dampfturbine	239
91. Vergleich der Dampfturbinen und Kolbendampfmaschinen	242

V. Heiß- und Feuerluftmaschinen.**A. Die Heißluftmaschinen.**

92. Die Heißluftmaschinen	245
-------------------------------------	-----

B. Die Explosionsmaschinen.

93. Geschichtliches	247
94. Der Viertaktprozeß	250
95. Die Verbrennung	252
96. Aus der Theorie des Viertaktprozesses	255
97. Die Ausführung der Gasmotoren	261
98. Explosionsmaschinen mit flüssigen Brennstoffen	268
99. Kraftgasanlagen	273
100. Große Gasmaschinen	280
101. Anlaßvorrichtungen	287
102. Wirkungsgrad der Explosionsmaschinen	288

C. Die Verbrennungsmaschinen.

103. Der Diesel-Motor	294
---------------------------------	-----

VI. Die Kosten der Arbeit.

Seite

A. Die belebten Motoren.

104. Die Grundlagen für die Berechnung der Kosten der Arbeit . . . 299
 105. Der Mensch 301

B. Die Wind- und Wasserkraftmaschinen.

106. Die Windräder 301
 107. Die Wasserkraftmaschinen. 303

C. Die mit chemischer Energie gespeisten Kraftmaschinen.

108. Der Preis der chemischen Energie 307
 109. Kosten der von der Dampfmaschine verbrauchten chemischen Energie 310
 110. Kosten der von den Explosionsmaschinen verbrauchten chemischen Energie 314
 111. Die Betriebskosten: a) Das Wasser 318
 b) Schmier- und Putzmittel 322
 c) Die Bedienung 323
 d) Die gesamten Betriebskosten 325
 112. Die Kapitalkosten 328
 113. Die Kosten der aus chemischer Energie gewonnenen Arbeit . . . 333
 114. Vergleich der Kosten der von verschiedenen Arten von Kraftmaschinen gelieferten Arbeit 338

**BESTELL-ZETTEL.**

Bei

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit aus dem Verlage von B. G. Teubner
 in Leipzig [zur Ansicht]:

Schreiber, die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 3.60. In Leinw. geb. *M.* 4.20.

— die Kraftmaschinen. Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen. Für Zuhörer aller Fakultäten an der Universität Greifswald gehalten. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 6.—. In Leinw. geb. *M.* 6.80.

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Das Nichtgewünschte bitte gefl. durchzustreichen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

GRUNDLAGEN DER THEORIE UND DES BAUES DER WÄRMEKRAFTMASCHINEN

VON ALFRED MUSIL,

o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Wien.

Englisch autorisierter, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes: „The steam-engine and other heat-engines“ von J. A. Ewing, Professor an der Universität in Cambridge.

Mit 303 Figuren im Text.

[X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. M. 20.—

Ein Lehrbuch der Wärmekraftmaschinen für Studierende und Maschinenbauingenieure fehlte bisher gänzlich. Diesem dringend gewordenen Bedürfnis soll das folgende Lehrbuch abhelfen, das mit sorgfältigster Auswahl das für den Studierenden und den Ingenieur Wichtigste zusammenfaßt und in den Grundlagen festlegt.

NEUERE FORTSCHRITTE AUF DEM GEBIETE DER ELEKTRIZITÄT.

VON PROF. DR. F. RICHARZ.

2. Auflage. Mit 97 Abbild. [VI u. 128 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. M. 1. 50.

Zweck der Schrift ist, in zwar wissenschaftlicher, aber gemeinverständlicher Weise, ohne Zuhilfenahme mathematischer Entwicklungen, diejenigen Vorstellungen und Versuche auseinanderzusetzen, welche dem elektrischen und magnetischen absoluten Maßsysteme, den Hertz'schen elektrischen Schwingungen und seinen elektrischen Wellen, der Telegraphie ohne Draht und den Tesla-Strömen zu Grunde liegen. Man wende die Schrift daher eine elementare Darstellung der Faraday-Maxwell'schen Anschauungen und ihrer experimentellen Grundlagen nennen. Die 1. Auflage hat dementsprechend ihre Hauptverbreitung bei denjenigen Lehrenden gefunden, welchen eine solche Darstellung zu geben in ihrem Berufe obliegt, und bei solchen Lernenden, welche entweder sich mit der elementaren Darstellung begnügen oder sich durch sie auf das streng mathematische Studium jener Theorien vorbereiten wollen.

GRUNDRISZ DER ELEKTROTECHNIK FÜR TECHNISCHE LEHRANSTALTEN

VON OBERLEHRER DR. WILHELM BRÜSCH.

Mit 248 Abbild. im Text. [XII u. 168 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. M. 3.—

Bei der Abfassung dieses Werkes sind eine Reihe neuer Abschnitte, wie diejenigen über die Flüssigkeitsanlasser, über das Parallelschalten von Gleich- und Wechselstrommaschinen, über die Transformatoren und deren Leerlaufstrom, über die Osram-, Osmium-, Bremer- und Flammenbogenlampe, über die elektrische Arbeitsvertragsung usw., nebst Textfiguren neu hinzugekommen.

Zur Erleichterung der Übersichtlichkeit ist eine Trennung der Lern- und Lehrstoffe (Versuche etc.) durch verschiedenen Druck angestrebt worden. Es dürfte das auch infolge dieser Anordnung auch für solche Leser brauchbar sein, denen die Gelegenheit nicht geboten wird, die beschriebenen Experimente zu sehen. Die Länge der einzelnen Vorträge ist derartig bemessen worden, daß sie sich, je nach den Verhältnissen der Anstalt, in zwei bis drei Stunden, also insgesamt in 40 bis 60 Stunden bewältigen lassen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

HÖHERE ANALYSIS FÜR INGENIEURE

VON DR. JOHN PERRY F. R. S.

Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science in London.

Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, Professor in Braunschweig, und Fritz Süchting, Oberingenieur in Minden.

[X u. 423 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. *M.* 12. —

Dieses Buch ist bestimmt für die Studierenden an den technischen Hochschulen, und zwar sowohl als Vorbereitung oder Ergänzung der mathematischen Vorlesungen als auch zum Studium während der höheren Semester, falls eine Wiederauffrischung der mathematischen Kenntnisse von nöten ist. Die Lektüre des Buches leistet zugleich dem praktischen Ingenieur gute Dienste, falls ihn seine mathematische Bildung im Stiche zu lassen droht. Die Bedeutung des Buches ist in dem Umstande begründet, daß der Verfasser Ingenieur ist und dementsprechend die mathematischen Begriffsbildungen fortgesetzt in die Sprache und Vorstellungsweise des Ingenieurs einzukleiden befähigt ist, daß er aber andererseits die richtige Würdigung der Mathematik in ihrer Bedeutung für die technischen Wissenschaften besitzt. Die ersten beiden von den drei Kapiteln des Buches handeln nur von den allereinfachsten Funktionen, das erste sogar nur von der Funktion x^n . Um so reichlicher sind die Ausführungen an Beispielen, welche den verschiedensten Gebieten der Technik entnommen sind. Auch der Studierende, welcher sich eine über das Notwendigste hinausgehende mathematische Bildung aneignen will, findet im dritten Kapitel „Schwierigere Aufgaben und Lehrsätze“ hierzu die ersten Anfänge.

GALILEO FERRARIS. WISSENSCHAFTLICHE GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK.

Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik, gehalten in dem R. Museo Industriale in Turin, deutsch herausgegeben von Dr. LEO FINZI.

Mit 161 Fig. im Text. [XII u. 358 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M.* 12. —

Die Erfindung des magnetischen Drehfeldes durch Galileo Ferraris, welche einen neuen gewaltigen Aufschwung der elektrischen Industrie einleitete, hat den Namen dieses genialen italienischen Forschers weit über die Grenzen seines Vaterlandes hinaus bekannt gemacht. Nicht minder aber verdienen in weiteren Kreisen bekannt zu werden seine theoretischen Vorlesungen über Elektrotechnik. Denn theoretische Erörterungen, welche von einem Forscher stammen, der auf dem Gebiete der Praxis bahnbrechend wirkte, müssen besonders wertvoll erscheinen, weil von vornherein anzunehmen ist, daß darin den Forderungen der Praxis gebührend Rechnung getragen wird. Dieses geschieht denn auch durchaus in dem vorliegenden Werke, welches nach den Vorlesungen, die Galileo Ferraris an dem Reale Museo Industriale in Turin über die Grundlagen der Elektrotechnik hielt, zusammengestellt und unter der wissenschaftlichen Mitwirkung von Dr. Rudolf Blochmann in deutscher Übersetzung von Dr. Leo Finzi herausgegeben worden ist. — Das Werk behandelt in sechs Kapiteln das Gesamtgebiet der Elektrotechnik auf Grund der von Faraday und Maxwell entwickelten Anschauungen, welche durch die genialen Arbeiten von Heinrich Hertz ihre glänzende experimentelle Bestätigung erfuhren.



*Soeben erschien im Verlage von B. G. Teubner
in Leipzig und ist in allen Buchhandlungen
— auch zur Ansicht — zu erhalten:*

ELEMENTE DER VEKTOR-ANALYSIS.

MIT BEISPIELEN
AUS DER THEORETISCHEN PHYSIK

VON

DR. A. H. BUCHERER,
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT BONN.

[VI u. 91 S.] gr. 8. In Leinwand geb. M. 2.40.

Unter den verschiedenen Disziplinen der Mathematik nimmt die Vektoranalysis eine eigenartige Stellung ein. In ihr findet man die Begriffe der Algebra erweitert und in einer Weise auf das Rechnen mit geometrischen Größen angewandt, daß man mit diesen Größen direkt rechnen kann anstatt mit den kartesischen Koordinaten derselben, welche mit ihnen künstlich verknüpft sind.

Daß eine solche Methode ein wichtiges Hilfsmittel in der Physik abgeben würde, konnte vorausgesehen werden. Und in der Tat findet das Rechnen mit Vektorgrößen eine beständig zunehmende Anwendung. Indem hierbei die Denktätigkeit auf die in der Physik vorkommenden geometrischen Größen

selbst gerichtet wird, anstatt auf die mit ihnen verknüpften Zahlen, gewinnen die Denkoperationen an Kraft, Lebendigkeit und Anschaulichkeit.

Hierzu kommt noch ein anderer Vorzug. Die Symbolik der Vektoranalysis ist eine überraschend einfache und übersichtliche. Operationen, welche bei Verwendung von kartesischen Methoden verwickelt und schwierig erscheinen, werden kurz und einfach, wenn sie in ihre Äquivalente in der Sprache der Vektorenrechnung übersetzt werden, ohne dabei an umfassender Bedeutung und Bestimmtheit einzubüßen. Die Vorbereitung eines elementaren, speziell für Physiker bestimmten Werkchens über Vektoranalysis bedarf daher wohl keiner besonderen Apologie, zumal es bisher an einem solchen in deutscher Sprache verfaßten und separat ausgegebenen Werke gefehlt hat.

Bei der Ausarbeitung der Elemente der Vektoranalysis ließ sich der Verfasser hauptsächlich von praktischen Erwägungen leiten. Es lag ihm weniger daran, eine erschöpfende Abhandlung über den Gegenstand zu schreiben, als vielmehr den Studierenden der Physik sobald wie möglich in den Stand zu setzen, die vektoriellen Methoden zur Lösung und Bewältigung physikalischer Fragen anzuwenden und ihn vor allem dazu anzuregen, sich dieser Methoden auch allgemein beim „physikalischen Denken“ zu bedienen. Er wird sich so bald des Vorteils bewußt werden, den ein Operieren mit sinnfälligen räumlichen Beziehungen über ein solches mit reinen Abstraktionen besitzt.

In der Form der Darstellung hat sich der Verfasser im großen und ganzen Heaviside angeschlossen und sich dabei derselben Symbole bedient, wie A. Föppl in seiner vorzüglichen, im selben Verlage erschienenen 'Einführung in die Maxwell'sche Theorie'. Gleichwohl hat er es für zweckmäßig gehalten, die von Grassmann herrührende Zuordnung von Flächen zu Vektoren ausgiebig zu verwerten. Die Ableitung mancher Theoreme gewinnt dadurch an Einfachheit. Angesichts des eigentlichen Zweckes dieses Buches und seines elementaren Charakters glaubte der Verfasser davon absehen zu müssen, in funktionen-theoretische Erörterungen einzugehen, und hat

sich demgemäß hauptsächlich darauf beschränkt, solche physikalische Vektoren der Untersuchung zu unterziehen, denen eine stetige Verteilung im Raume zukommt.

In der Wahl der Beispiele hat er sich von der Absicht leiten lassen, ein möglichst vielseitiges Bild von der Anwendbarkeit der vektoranalytischen Methoden zu geben. Eine Anzahl von Beispielen wurde besonders für diesen Zweck ausgearbeitet und gelangt zum erstenmal zur Veröffentlichung.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Addition und Subtraktion	2
§ 2. Zerlegung von Vektoren	5
Über Grundvektoren und Raumsysteme	6
§ 3. Rotationen und zugeordnete Richtungen	7
§ 4. Produkte aus zwei Faktoren. Darstellung von Flächen durch Vektoren.	
I. Das Vektorprodukt.	9
II. Das skalare Produkt	14
§ 5. Produkte aus drei Faktoren	16
§ 6. Über Differentiation.	
Allgemeines	21
§ 7. Über Differentiation	23
§ 8. Über Differentiation	33
Einfachere Beispiele aus der Mechanik.	
I. Zur Statik starrer Körper	35
II. Zur Theorie des Schwerpunktes.	36
III. Die Bewegung eines starren Körpers	38
IV. Zur Kinematik eines Punktes. Das erste Keplersche Gesetz	39
V. Die Bewegung eines Punktes auf einer Kurve	40
§ 8a. Vektoranalytische Transformationen	42
§ 9. Das Potential	47

	Seite
§ 10. Zerlegung eines Vektors in einen solenoidalen und einen wirbel- freien Anteil	56
§ 11. Umwandlung von Differentialquotienten nach der Zeit in solche nach dem Ort.	
I. Translation von Vektorfeldern	57
II. Rotationen von Vektorfeldern	60
§ 12. Das Greensche Theorem	66
§ 13. Der Satz von Beltrami und das Theorem von Poincaré-Lorentz	70
§ 14. Das Huyghenssche Prinzip	76
§ 15. Zur Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten.	
I. Der Helmholtzsche Satz	77
II. Über die Potentialbewegungen idealer Flüssigkeiten.	
Die Bewegung einer Kugel in einer idealen Flüssigkeit	80
Zusammenstellung der wichtigsten Formeln und Definitionen . . .	85



Bestell - Zettel.

Bei

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B.G. Teubner
in Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:

**Bucherer, Elemente der Vektor-Analysis. Mit
Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.]
gr. 8. In Leinwand geb. M 2.40.**

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Lehrbuch der Experimentalphysik

VON

Dr. Adolph Wüllner,

Professor der Physik an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen.

Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage.

4 Bände. gr. 8. geh. \mathcal{M} 56.—, in Hftbd. \mathcal{M} 64.—

- I. Band Allgemeine Physik und Akustik. Mit 321 in den Text gedruckten Holzschnitten. [X u. 1000 S.] 1893. \mathcal{M} 12.—, in Hftbd. \mathcal{M} 14.—
II. — Die Lehre von der Wärme. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] 1896. \mathcal{M} 12.—, in Hftbd. \mathcal{M} 14.—
III. — Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XV u. 1415 S.] 1897. \mathcal{M} 18.—, in Hftbd. \mathcal{M} 20.—
IV. — Die Lehre von der Strahlung. Mit 299 in den Text gedruckten Abbildungen u. Figuren u. 4 lithogr. Tafeln. [XII u. 1042 S.] 1899. \mathcal{M} 14.—, in Hftbd. \mathcal{M} 16.—

Die wissenschaftlichen Vorschläge dieses reich ausgestatteten Lehrbuches sind von der Kritik einstimmig anerkannt worden. Dasselbe hat sich die Aufgabe gestellt, einerseits die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen bekannt zu machen, andererseits denjenigen, welche tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, als Vorschule zu dienen; so hat aber, ohne den ersten Zweck außer Acht zu lassen, die zweite, wissenschaftliche Aufgabe mehr ins Auge gefaßt, als dies von den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik bis jetzt geschehen ist.

Die vorliegende 5. Auflage der Experimentalphysik hat die gleiche Haltung wie die früheren Auflagen; das Buch soll unter dem steten Hinweis auf die Originalarbeiten eine Übersicht geben über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik und über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zur Zeit gelangt ist.

Der Schwerpunkt des Werkes liegt hiernach in den Experimentaluntersuchungen, und deshalb sind alle wichtigeren neueren Untersuchungen, die bis zur Bearbeitung des betreffenden Bandes erschienen waren, aufgenommen; wo es wissenschaftlich erwiesen wurde, auch auf ältere Arbeiten zurückgegriffen. Die Erweiterung des experimentellen Materials verlangte auch ein tieferes Eingehen in die Theorien; dieselben sind so weit dargestellt, wie es ohne zu ausgedehnte Rechnungen möglich war. Das neu zu behandelnde Material war ein recht ausgedehntes, daher auch der ziemlich erheblich gewachsene Umfang des Buches.

Neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper

(mit einem kurzen Anhang über das sog. „absolute Maßsystem“).

Ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts von

Dr. Karl T. Fischer,

Privatdozent und 1. Assistent für Physik an der Kgl. Technischen Hochschule München.

[V u. 68 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. \mathcal{M} 2.—

Das Büchlein verdankt seine Entstehung einer 1897 gehaltenen Vorlesung über Entwicklung der physikalischen Grundbegriffe und den in den beiden ersten Münchener Ferienkursen für Lehrer der Mathematik und Physik gehaltenen Experimentalvorträgen. Es enthält eine Reihe von genau beschriebenen und durch Detailszeichnungen erläuterten Versuchen, welche eine möglichst verständliche und doch streng richtige, experimentelle Entwicklung der mechanischen Begriffe im Mittelschulunterricht bezwecken und größtenteils vom Verfasser selbst stammen und sonst noch nicht veröffentlicht wurden, zum Teil aber auch besonders wichtige und einfache Unterrichtsversuche anderer Physiker darstellen. In der Anordnung wurde versucht, den von Ernst Mach in seiner Entwicklung der Mechanik aufgestellten Forderungen zu genügen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität.

Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen
mit Vectorgrößen in der Physik.

Von **Dr. A. Föppl,**

Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, früher Oberlehrer an der
städt. Gewerbeschule zu Leipzig.

Mit Figuren im Texte.

[XVI u. 413 S.] gr. 8. 1894. geh. n. M 10.—, in Leinw. geb. n. M 11.—

Vorausgeschickt ist im ersten Abschnitt eine Erörterung der Bezeichnungen und Methoden des Vektorkalküls, den der Verfasser, nach dem Vorgehens des Herrn Heaviside, der Darstellung der Maxwell'schen Theorie zu Grunde legt. Während in der Quaternionentheorie die Quadrate der Grundvektoren gleich -1 sind, werden sie in der Vektoretheorie gleich $+1$ gesetzt. Hierdurch werden die imaginären Einheiten vermieden. Der zweite Abschnitt gibt die Grundlinien der Maxwell'schen Elektrizitätslehre bis zur Aufstellung der beiden Hauptgleichungen. In der Darstellung der Dimensionen der elektrostatischen und magnetischen Größen wird entweder die Dielektrizitätskonstante κ oder die Permeabilität μ beibehalten, wodurch der Unterschied zwischen freier und wahrer Elektrizität, zwischen freiem und wahrem Magnetismus (der in der Natur nicht vorkommt) hervortritt. Die Analogie zwischen Elektrostatik und Magnetismus wird durch Heaviside's Prinzip der Dualität zum Ausdruck gebracht. Die magnetische Härte erfährt eine eingehende, dem Verfasser eigentümliche Behandlung. Der dritte Abschnitt behält die Betrachtung aus auf die elektrodynamischen und magnetodynamischen, sowie auf die „eingepreßten“ elektrischen und magnetischen Kräfte. In dem vierten Abschnitt, der von den Energiebeziehungen im elektromagnetischen Felde zwischen ruhenden Leitern handelt, wird gezeigt, daß der von Herrn Poynting angenommene Energiestrom zwar mit den Grundlagen der Theorie verträglich ist, aber nicht mit Notwendigkeit aus ihnen folgt. Die Elektrodynamik bewegter Leiter bildet den Inhalt des fünften Abschnitts.

Da sich der Verfasser eine möglichst leicht verständliche Behandlung des Gegenstandes zur Richtschnur macht, ohne auf eine strenge Durchführung des ganzen Systems zu verzichten, so vermeidet er es, die Energiebeziehungen zur Ableitung der Grundgesetze heranzuziehen, stützt sich dagegen, soweit es irgend angeht, auf die Erfahrungstatsachen. Daher endet die Herleitung der Feldgleichungen aus den mechanischen Prinzipien, die Herr Boltzmann voranstellt, erst am Schluß eine gedrängte Darstellung.

Dem praktischen Zweck des Buches entspricht es auch, daß durchweg auf die Beziehungen zu den früheren Theorien hingewiesen wird. Auch Fragen von allgemeinerem Interesse werden an verschiedenen Stellen erörtert.

Jahrbuch ab. d. Fortschr. d. Mathematik. XXV

Lehrbuch der praktischen Physik

VON

F. Kohlrausch.

Zugleich als neunnte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik.

Mit zahlreichen Figuren im Text.

[XXVII u. 614 S.] gr. 8. Biegen in Leinwand geb. M 8.60.

Infolge der doppelten Aufgabe, welche sich obiges Werk stellt, wurde in der neuen, erheblich vergrößerten Auflage der Thermometrie, der Strahlung und vor allem der Elektrizität ein breiterer Spielraum eingeräumt und darf der Leitfaden unserem Ermessen nach das Verdienst für sich beanspruchen, zuerst und allein eine handliche Zusammenstellung kritisch ausgewählter, physikalischer Zahlen gebracht zu haben.

(Der prakt. Maschinenkonstr. 1901. Nr. 35.)

Dieses eigenartige Werk gewinnt mit jeder neuen Auflage an Vertiefung und damit an Wert für alle diejenigen, welche der praktischen Physik als Lehrer oder Lernende näher stehen. Auch als Nachschlagewerk ist es von Bedeutung, denn in knapper, aber ausreichend verständlicher Form umfaßt es einen außerordentlich reichen Inhalt und bringt nicht wenig, was man in sehr umfangreichen Lehrbüchern vergebens sucht. Die zahlreichen im Anhang gegebenen Tabellen beruhen selbstverständlich auf dem besten zur Zeit vorhandenen Material.

(Gaea 1901. 14. H. S. 640.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Vorlesungen
über
Technische Mechanik
in vier Bänden
von
Dr. August Föppl,

Professor der Mechanik u. Vorstand des Mechan.-Techn. Laboratoriums an d. Techn. Hochschule in München.

Band: Einführung in die Mechanik (1. Aufl. 1898). 2. Aufl. 1900. Preis geb. *ℳ* 10.—
Band: Graphische Statik. 1901. Preis geb. *ℳ* 10.—
Band: Festigkeitslehre (1. Aufl. 1897). 2. Aufl. 1900. Preis geb. *ℳ* 12.—
Band: Dynamik. (1. Aufl. 1899). 2. Aufl. 1901. Preis geb. *ℳ* 12.—

Preis des ganzen Werkes in vier eleganten Leinwd.-Bänden *ℳ* 44.—

Herr Geheimrat Professor Lampe von der Technischen Hochschule in Berlin schreibt:

„Wie bei der Anzeige des zuerst erschienenen dritten Bandes bemerkt wurde, ist die Föppl'sche Behandlung der Mechanik dadurch ausgezeichnet, daß die Darstellung von großer Einfachheit und Klarheit, das Hauptgewicht in die Begriffsbildung gelegt wird; durch Vermeidung verwickelter analytischer Rechnung wird der Raum gewonnen zur eingehenden Erörterung und Vertiefung der Grundanschauungen physikalischer Basis. Diese Eigenschaften fallen natürlich bei dem vorliegenden ersten Bande am meisten in die Augen.“

„Als eigenartiges Erzeugnis eines selbständig schaffenden Geistes verdient das Buch, welches sich seine große Verbreitung in technischen Kreisen gewiß einen bedeutenden Einfluß ausüben wird, ebenfalls auch von wissenschaftlicher Seite volle Beachtung und genaue Prüfung der Einzelheiten.“

**GALILEO FERRARIS,
WISSENSCHAFTLICHE GRUNDLAGEN
DER ELEKTROTECHNIK.**

nach den Vorlesungen über Elektrotechnik, gehalten in dem R. Museo Industriale
in Turin, deutsch herausgegeben von Dr. LEO FINZI.

mit 161 Fig. im Text. [XII u. 358 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *ℳ* 12.—

Die Erfindung des magnetischen Drehfeldes durch Galileo Ferraris, welche einen neuen gewaltigen Aufschwung der elektrischen Industrie einleitete, hat den Namen dieses genialen italienischen Forschers weit über die Grenzen seines Vaterlandes hinaus bekannt gemacht. Nicht minder aber verdienen in weiteren Kreisen bekannt zu werden seine theoretischen Vorlesungen über Elektrotechnik. Denn theoretische Erörterungen, welche von einem Forscher stammen, der auf dem Gebiete der Praxis einflussreich wirkte, müssen besonders wertvoll erscheinen, weil von vornherein anzunehmen ist, daß darin den Forderungen der Praxis gebührend Rechnung getragen wird. Dieses geschieht denn auch durchaus in dem vorliegenden Werke, welches nach den Vorlesungen, die Galileo Ferraris an dem Reale Museo Industriale in Turin über die Grundlagen der Elektrotechnik hielt, zusammengestellt und unter der wissenschaftlichen Mitwirkung von Dr. Rudolf Blochmann in deutscher Übersetzung von Dr. Leo Finzi herausgegeben worden ist. — Das Werk behandelt in sechs Kapiteln das Gesamtgebiet der Elektrotechnik auf Grund der von Faraday und Maxwell entwickelten Anschauungen, welche durch die genialen Arbeiten von Heinrich Hertz ihre glänzende experimentelle Bestätigung erfuhren.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Einführung

in das

Studium der theoretischen Physik,

insbesondere in das der analytischen Mechanik.

Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis

von

P. Volkmann,

Professor der theoretischen Physik an der Universität Königsberg i. Pr.

(VI u. 370 S.) gr. 8. 1900. geh. \mathcal{M} 9.—, in Leinwand gebunden \mathcal{M} 10.20.

Die Darstellungen, welche die Mechanik in den letzten Jahrzehnten gefunden hat, wandten die Aufmerksamkeit wiederholt den Grundprinzipien der Disziplin zu und wiesen auf innere Unklarheiten derselben hin. Auch die vorstehend als Einführung in das Studium der theoretischen Physik angekündigte Bearbeitung der Mechanik will sich mit Vorliebe der Klarstellung der Grundprinzipien zuwenden, erblickt aber, nachdem die letzten Jahre noch einige sehr willkommene mathematische Präzisierungen gebracht haben, für die dabei zu überwindenden Schwierigkeiten das Bedürfnis zur Zeit mehr in einer erkenntniskritischen Klärung als in dem Versuch einer weiteren mathematischen Präzisierung.

Der wissenschaftlich vertiefte Erfahrungsbegriff, der alle naturwissenschaftlichen Disziplinen und damit auch die Mechanik dauernd zu befruchten hat, legt hier zunächst ein eingehendes Studium der geschichtlichen Entwicklung der Mechanik nahe, wie ein solches die nach vielen Richtungen vortreffliche Darstellung von E. Mach erleichtert. Wenn neuerdings von anderer beachtenswerter Seite die Darstellung der Mechanik in ihrer alten klassischen Form als Ziel hingestellt wurde, dann dürfte aber doch dagegen zu bemerken sein, daß Newton, Euler, Lagrange die Mechanik unter wesentlich verschiedenen Gesichtspunkten behandelt und dargestellt haben.

Die Stellungnahme des Autors zur Mechanik und zu ihren Grundprinzipien nimmt ihren Ausgangspunkt wesentlich von Newton und dürfte dahin kurz zu charakterisieren sein, daß die Mechanik, wie jede naturwissenschaftliche Disziplin, mehr ein gegenseitiges Bezugssystem mit rückwirkender Verfestigung der einzelnen Teile gegeneinander ist und als solches dargestellt sein will, als ein einseitiges Bezugssystem, aufgeführt nach dem Muster einer mathematischen Disziplin, bei der alles auf die Festigkeit der Fundamente ankommt, und bei der die Teile des Gebäudes ziemlich unabhängig von einander darauf aufgeführt werden können, ohne daß die gegenseitige Stützung eine sonderliche Rolle spielt.

Bei der Auffassung des Autors fällt die Beurteilung des Newtonschen Systems der Mechanik wesentlich günstiger aus, als sie sich z. B. bei E. Mach gestaltet. Die üblichen Darstellungen der Mechanik nach Art eines mathematischen Systems, dessen Stärke in der Konsequenz und Strenge der Deduktion liegt, bilden bei dieser Stellungnahme nicht höchsten Zweck und höchstes Ziel, aber sie bieten sich als ein sehr willkommenes Mittel dar, die Mechanik als Muster eines naturwissenschaftlichen Systems darstellen zu können, dessen Stärke in der innigen Durchdringung von Induktion und Deduktion besteht und stets bestehen wird.

Sieben erschien im Verlage von B. G. Teubner in
Leipzig und ist in allen Buchhandlungen — auch
zur Ansicht — zu erhalten:

HAUPTPROBLEME DER ETHIK

SIEBEN VORTRÄGE VON
PROF. DR. PAUL HENSEL.

[VI u. 106 S.] 8. 1903. geh. M. 1.60. In Leinw. geb. M. 2.20.

Der Verfasser geht vom Wesen der Ethik als der Wissenschaft vom menschlichen Handeln aus, die uns dessen geschichtliche Entwicklung und seine Gesetze erkennen lehrt. Diese Gesetze aber sind verschieden je nach dem Standpunkte der Betrachtung. Der Utilitarismus, als dessen Vertreter Mill dargestellt wird, will, daß alles Handeln auf den größtmöglichen Nutzen hinauslaufe und dementsprechend einzurichten sei. Der Evolutionismus, besonders Herbert Spencer, sieht unser Handeln als die notwendige Folge einer Entwicklungsreihe an und betrachtet den ethischen Fortschritt als letzten Ausläufer des großen fortschreitenden Weltgeschehens. Gegenüber beiden Lehren aber erheben sich schwere Bedenken. Das Handeln erfolgt tatsächlich nicht, nachdem eine Rechnung über die möglichen Folgen von Lust und Unlust angestellt ist, und die Entwicklung geht nicht nur in einer fortschreitenden Stufenfolge vor sich, sondern in der natürlichen wie in der sittlichen Welt sind Rückbildungen vorhanden.

Nicht der Erfolg kann für den Wert unserer Handlungen maßgebend sein, sondern die Gesinnung, durch die sie veranlaßt wird. Die Gesinnungsethik allein bietet in dem pflichtmäßigen Handeln einen sicheren Maßstab der Beurteilung. Diese von Kant zuerst tiefer begründete Lehre verteidigt der Verfasser gegen die inzwischen erhobenen Einwürfe. Er betont dabei nachdrücklich, daß die landläufige Unterscheidung zwischen Egoismus und Altruismus, zwischen Handeln zum eigenen Vorteil und Handeln im Interesse des Nächsten oder der Gesamtheit von keiner Bedeutung für die sittliche Beurteilung ist, da beides ebenso gut pflichtgemäß wie nicht pflichtgemäß sein kann. Das Nichtpflichtgemäße ist außer-sittlich; böse wird es durch Handeln gegen das Pflichtbewußtsein.

Das ethische Handeln wird also als die eigenste Angelegenheit der Persönlichkeit dargestellt, aber der modernen Lehre vom unbeschränkten Recht des Individuums gegenüber wird mit aller Schärfe darauf hingewiesen, daß die Gesellschaft in Recht und Sitte Zwangsnormen zur Verfügung hat, die sie den Verletzern dieser Satzungen gegenüber aufrecht zu erhalten berechtigt und verpflichtet ist. Das Verhältnis zwischen Persönlichkeit und Gesellschaft führt auf die Bedeutung der Kultur für das sittliche Handeln. Mit fortschreitender Kultur werden die Möglichkeiten des sittlichen wie die des unsittlichen Handelns größer: durch die Kultur erlangen wir eine Spannkraft und Schwingungsweite des Handelns, wie sie dem Naturmenschen vollständig abgeht.

Zum Schluß hebt der Verfasser die Bedeutung des religiösen Lebens hervor, das über die Grenzen der wissenschaftlichen Erkenntnis hinaus den Abschluß des ethischen Systems zu einer ethischen Weltanschauung ermöglicht.

Je dringender die Gegenwart eine Auseinandersetzung mit den verschiedenen geistigen Strömungen fordert, je mehr die Persönlichkeit wieder nach festen Normen des Handelns verlangt, um so mehr Aufmerksamkeit wird man diesem Buche schenken müssen, das diese Fragen in klarer und ansprechender Weise behandelt.

INHALTSVERZEICHNIS.

ERSTER VORTRAG.		Seite
Darstellung und Kritik des Utilitarismus	1	
ZWEITER VORTRAG.		
Darstellung des Evolutionismus	17	
DRITTER VORTRAG.		
Kritik des Evolutionismus	30	
VIERTER VORTRAG.		
Die Gesinnungsethik	43	
FÜNFTER VORTRAG.		
Ethik, Recht und Sitte	57	
SECHSTER VORTRAG.		
Außersittlich. Unsittlich. Böse	71	
SIEBENTER VORTRAG.		
Ethik und Kultur. Schluß	88	

Bestell-Zettel.

Bei

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B. G. Teubner
in Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:

HENSEL, HAUPTPROBLEME DER ETHIK.

Sieben Vorträge. [VI u. 106 S.] 8. 1903.

geh. M. 1.60. In Leinw. geb. M. 2.20.

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart.

Acht Vorträge. Von Prof. Dr. **A. Biehl**.

[VI u. 258 S.] gr. 8. 1903. geh. M 3.—, geb. M 3.60.

Weniger zu belehren, als vielmehr anzuregen ist die Bestimmung der Schrift. Sie will der Philosophie unter den Gebildeten neue Freunde gewinnen und weitere Kreise mit den philosophischen Bestrebungen der Gegenwart bekannt machen. Die großen Gestalten der Vergangenheit, Systeme und Persönlichkeiten, werden daher vorgeführt; der Werdegang der Philosophie wird von ihrer Entstehung bis zur ihrer Gegenwart durch die entscheidenden Wendepunkte hindurch verfolgt.

Die fünf ersten Vorträge sind den theoretischen Aufgaben der Philosophie gewidmet: sie erörtern das Verhältnis der Philosophie zur Wissenschaft im Altertum und in der neueren Zeit und handeln von der kritischen Philosophie, den Grundlagen der Erkenntnis, dem naturwissenschaftlichen und dem philosophischen Monismus; der sechste Vortrag über Wertprobleme zeigt in der Person des Sokrates das Beispiel philosophischer Lebensführung, der folgende hat die Frage des Pessimismus (Schopenhauer und Nietzsche) zum Gegenstande; eine Betrachtung über Gegenwart und Zukunft der Philosophie faßt zum Schlusse die Ergebnisse der Schrift zusammen.

Unser Verhältnis zu den bildenden Künsten.

Sechs Vorträge über Kunst und Erziehung.

Von Professor Dr. **August Schmarsow**.

gr. 8. 1903. Geheftet M 2.—, geb. M 2.60.

Die Vorträge legen in aller Kürze unser Verhältnis zu den bildenden Künsten klar und weisen auf die Hauptpunkte, wo eine künstlerische Erziehung einzusetzen hat, mit Nachdruck hin. Die Überzeugung, daß hierbei von der eignen Ausdrucksbewegung auszugehen ist wie bei Entstehung der Künste selber, veranlaßt den Verfasser, das weite Gebiet der Mimik in seiner Bedeutung für die gesamte Kunst zu würdigen. Von diesem Ursprunge ausgeht er den Triebfedern des künstlerischen Schaffens in Plastik, Architektur und Malerei nach und legt auch die Verbindung zur Musik und Poesie frei. So entwickelt er aus der natürlichen Organisation des Menschen heraus die Grundzüge einer vollständigen, in sich geschlossenen Kunstlehre, die in hervorragendem Maße die Beachtung aller Kunstfreunde verdient.

Die Philosophie der Gegenwart in Deutschland.

Von Professor Dr. **O. Külpe**.

[VI u. 115 S.] 8. 1902. geh. M 1.—, geb. M 1.25.

Der Verfasser hat versucht, die vier Hauptrichtungen der deutschen Philosophie der Gegenwart, die er unterscheiden zu sollen glaubt, nämlich den Positivismus, Materialismus, Naturalismus und Idealismus (im metaphysischen Sinne dieses Wortes), nicht nur im allgemeinen, sondern auch durch eine eingehendere Würdigung einzelner typischer Vertreter zu charakterisieren. Als solche hat er bei dem Positivismus Mach und Dühring, bei dem Materialismus Häckel, bei dem Naturalismus Nietzsche und bei dem Idealismus Fechner, Lotze, v. Hartmann und Wundt behandelt. An die Darstellung der Lehren schließt sich stets eine Kritik, deren Grundgedanke in den Schlußbemerkungen, die der Verfasser neu hinzugefügt hat, deutlicher zum Ausdruck gebracht wird.

Druck von Theodor Hofmann in Gera.

Soeben erschien:

EINLEITUNG
IN DIE ALLGEMEINE THEORIE DER
ALGEBRAISCHEN GRÖSSEN

VON

JULIUS KÖNIG



AUS DEM UNGARISCHEN ÜBERTRAGEN VOM VERFASSER

Die allgemeine Theorie der algebraischen Größen hat Leopold Kronecker in der berühmten „Festschrift“ vom Jahre 1882 nicht nur als grundlegende mathematische Disziplin neu geschaffen, sondern auch ihrem gesamten Inhalte, ihren Zielen und Problemen nach genau umschrieben. Gleichwohl reicht die Geschichte ihrer Entwicklung weit zurück. Als verschleiertes Bild in Gauß' unvergänglichen Arbeiten enthalten, hat diese Theorie in den arithmetischen Untersuchungen von Lejeune-Dirichlet, Kummer und Dedekind, den algebraischen Forschungen von Abel, Galois und Jordan, den funktionentheoretischen Schöpfungen von Puiseux, Riemann und Weierstraß, sowie endlich in den algebraisch-geometrischen Sätzen von Cayley, Clebsch, Gordan und Noether ihre entscheidenden Gesichtspunkte gewonnen. Auch die seit dem Erscheinen der Festschrift verflossenen weiteren zwei Jahrzehnte haben bedeutsame Resultate geliefert, aus denen — abgesehen von den Kroneckerschen Abhandlungen —

insbesondere die geradezu grundlegenden Sätze über Divisorsysteme von Hilbert und die wertvollen Arbeiten von Hensel hervorzuheben sind.

Bedenkt man weiter, daß auch die neuen Bahnen, welche die Gruppen- und Funktionentheorie unter der Führung von Klein und Lie einerseits, Fuchs und Poincaré andererseits eingeschlagen hat, mit der Theorie der algebraischen Größen vielfache Berührungs- und Kreuzungspunkte aufweist, so ergibt sich für unsre Disziplin eine zentrale Stellung, die an Bedeutung auf dem Gebiete der reinen Mathematik vielleicht nur von den Methoden der Infinitesimalrechnung übertroffen wird.

Eine systematische Darstellung der Theorie — oder genauer ausgedrückt ihrer Fundamentalsätze —, die sich in allerdings unvollkommener Analogie zu den gangbaren arithmetisch-algebraischen Handbüchern so verhält, wie eine Darstellung der Funktionentheorie zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, wird wohl ohne weiteres als dankbare Aufgabe anerkannt werden. Wie schwierig eine befriedigende Lösung dieser Aufgabe sich gestaltet, hat der Verfasser des vorliegenden Versuchs an seiner Arbeit selbst erfahren. War ja doch neben manchen methodischen Fragen früher eine Reihe von Fundamentalproblemen zu erledigen, deren Lösung entweder gar nicht, oder nur für spezielle Fälle bekannt war.

Gerade diese neuen Untersuchungen, die wohl mehr als die Hälfte des gesamten Inhaltes ausmachen, drängten aber zu der hier gewählten systematischen Darstellung. Seit langer Zeit mit dem Gegenstande beschäftigt, mußte der Verfasser bald einsehen, daß einzelne Abhandlungen bei dem vielfachen Ineinandergreifen jener Fundamentalprobleme wieder sehr schwer lesbar und auf einen kleinsten Kreis beschränkt blieben, also ihren Hauptzweck verfehlen müßten. Denn als solchen betrachtet es der Verfasser, den Geist der Kroneckerschen Methoden — wenn der Ausdruck für dieses schwierige mathematische Gebiet gestattet ist — zu popularisieren.

So entstand dieses Buch, das eigentlich nur die ersten Elemente der Algebra und Zahlentheorie — einige Sätze aus der Lehre von den Determinanten inbegriffen — voraussetzt, und das eben darum auch ein Studierender mit Nutzen lesen kann; während andererseits der Fachmann die Darstellung alter und neuer Resultate hier in bequemerer Form erhält, als dies in einzelnen Journalabhandlungen hätte geschehen können.

Den Inhalt des Buches hier in Form eines noch so knappen Referates zusammenzufassen, hieße den Umfang dieser Anzeige

zu sehr ausdehnen; statt dessen sollen hier nur einige Punkte fragmentarisch berührt werden.

Die ganze Darstellung geht von der Definition „holoider“ und „orthoider“ Bereiche aus, die den Bereichen der ganzen rationalen, resp. der rationalen Zahlen nachgebildet sind, also, wie es scheint, durch gangbare technische Ausdrücke wie Integritätsbereich und Rationalitätsbereich (Körper) ersetzt werden können. Daß dies nicht der Fall ist, wird der aufmerksame Leser bald erkennen; denn jene Definitionen vermeiden die Starrheit der letzteren Begriffe und gestatten infolgedessen eine viel einfachere Grundlegung der Theorie, heben den unangenehmen Gegensatz zwischen Arithmetik und Geometrie und ergeben den für die Ökonomie der Darstellung wichtigen Umstand, daß das „Orthoide“ (Rationale) als spezieller Fall des „Holoiden“ (Ganzen) zu betrachten ist. Diesen Begriffsbestimmungen entsprechend scheidet sich auch die Theorie in einen „algebraischen“ und „arithmetischen“ Teil.

Vom methodischen Standpunkte aus hebt der Verfasser noch hervor, daß der Kroneckersche Fundamentalsatz (Kap. III. § 5—7) auf Grund eines völlig elementaren Beweises zum Ausgangspunkt der ganzen Theorie gewählt werden konnte.

Diesem Satze reiht sich sodann — als wichtigste Grundlage der hier erlangten neuen Resultate — die Aufstellung der von dem Verfasser sogenannten Resolventenform an, die als für ein beliebiges Formensystem geltende arithmetische Erweiterung des Resultantenbegriffs aufzufassen ist und insbesondere immer als homogene lineare Form der gegebenen Formen dargestellt werden kann. Dabei wird nach dem Beispiele Kroneckers bei Benutzung des Ausdrucks „Form“ von der Forderung der Homogenität abgesehen.

Die Einführung der Resolventenform einerseits, der Kroneckersche Grundgedanke der Association neuer Unbestimmter andererseits führen zu einer — im vollen Sinne des Wortes — allgemeinen Theorie der Elimination, in der die Multiplizität der durch irgend ein Gleichungssystem definierten Mannigfaltigkeiten nicht mehr, wie dies in der „Festschrift“ der Fall ist, vernachlässigt wird. So entsteht ein mächtiges Werkzeug der Forschung, das uns zunächst eine rein algebraische Theorie der Funktionaldeterminanten liefert. In einem längeren Exkurse wird dann auch eine definitive Darstellung der sog. speziellen Eliminationstheorie, d. h. die allgemeine Theorie der Resultanten und Discriminanten — letztere zum ersten Male — gegeben.

Die im engeren Sinne des Wortes arithmetischen Teile

der Theorie erhalten durch die Behandlung der linearen diophantischen Probleme eine feste Grundlage. Als solches wird die allgemeine Lösung eines Gleichungssystems hingestellt, dessen einzelne Gleichungen die Gestalt $\sum F_i X_i = F$ haben. Dabei sind die F als gegebene, die X als unbekannte Formen angesehen, die der weiteren Bedingung unterworfen sind, daß ihre Koeffizienten einem bestimmten, vorweg gegebenen holoiden Bereiche angehören. Dieses Problem wird in den für die Theorie der algebraischen Größen ausreichenden Fällen durch eine endliche, wohldefinierte Reihe elementarer Operationen vollständig gelöst. Es sind dies die Fälle, wo die Formenkoeffizienten entweder einem orthoiden Bereiche (also z. B. irgend einem Rationalitätsbereiche) oder aber dem Bereiche der ganzen rationalen Zahlen angehören.

Der erste Fall ergibt unter anderem eine allgemeine Behandlung des Noetherschen Satzes im Raume von n Dimensionen.

Mit diesen Resultaten ist nicht nur die wichtige, bisher kaum gestreifte Frage nach der Äquivalenz zweier Divisorensysteme vollständig gelöst, sondern es ist auch die allgemeinere Frage des „Enthaltenseins“ eines Divisorensystems in einem andern erledigt.

In der Theorie der ganzen algebraischen Größen werden die beiden Fälle der im strengen Sinne der allgemeinen Arithmetik („absolut“) ganzen Größen und der in Bezug auf einen orthoiden Bereich („relativ“) ganzen Größen zugleich und nach denselben Methoden behandelt. Im zweiten Falle sind unter anderen die im Sinne der Funktionentheorie oder Geometrie ganzen Größen enthalten. Es ist ein Kardinalpunkt der Darstellung, daß die idealen Größen von Beginn ab als nicht nur der Multiplikation, sondern auch der Addition fähige Größen eingeführt werden. Auf dieser Grundlage baut sich eine wesentlich neue und einfache Methode zur wirklichen Bestimmung des Fundamentalsystems in allen Fällen auf, die in erster Reihe auf der Theorie des „Äquivalenzmoduls“ beruht. Die Zerlegung einer ganzen Größe in Primideale wird endlich definitiv und ohne Ausnahmefall geleistet, wobei die diesbezüglichen Kroneckerschen Resultate in einem wesentlichen Punkte richtig zu stellen sind, da diese infolge eines merkwürdigen, allerdings tiefer liegenden Versehens nur in den einfachsten Fällen richtig sind.

Für alles Weitere sei auf das Inhaltsverzeichnis verwiesen, aus dem der Inhalt des Buchs und dessen Disposition im einzelnen zu ersehen ist. Ein ausführliches Sachregister wird die Benutzung des Buches wesentlich erleichtern.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Einleitende Grundbegriffe.

	Seite
§ 1. Zahl, Größe, Bereich	1
§ 2. 3. Das gewöhnliche Additions- und Multiplikationsgesetz	4 5
§ 4. Holoide und orthoide Bereiche	7
§ 5. Teilbarkeit in holoiden Bereichen	9
§ 6. Der größte gemeinschaftliche Teiler	13
§ 7 — 9. Beispiel: Die Bereiche $[\sqrt{-k}]$	15 19 21
§ 10. 11. Kongruenzbereiche und Modulsysteme	23 26
§ 12. Relative Äquivalenz	27

Zweites Kapitel.

Holoiden Bereichen entstammende Formen.

§ 1. 2. Formen und ganze Funktionen	31 33
§ 3. 4. Lexikographische Anordnung der Glieder einer Form.	35 37
§ 5. 6. Die derivierten Formen	38 40
§ 7. Der polynomische Lehrsatz	42
§ 8. 9. Homogene Formen	43 45
§ 10 — 12. Die elementaren symmetrischen Formen	46 47 50
§ 13 — 16. Die reduzierten Formen	54 56 58 60
§ 17. Die ganzen Funktionen	62
§ 18. 19. Lineare Transformation. Reguläre Formen	65 67

Drittes Kapitel.

Die Teilbarkeit der Formen.

§ 1. Das gewöhnliche Divisionsverfahren	70
§ 2. 3. Das Kriterium der Teilbarkeit im Formenbereiche	72 73
§ 4. Der Dedekindsche Hilfsatz	74
§ 5 — 7. Der Kroneckersche Fundamentalsatz	78 80 82
§ 8 — 11. Vollständigen Bereichen entstammende Formen	83 86 88 89
§ 12. Vollständigen Bereichen zugeordnete orthoide Bereiche	91

Inhaltsverzeichnis.

Viertes Kapitel.

Die algebraischen Größen.

Fünftes Kapitel.
Allgemeine Theorie der Elimination.

Sechstes Kapitel.

Resultanten und Discriminanten. (Spezielle Eliminationstheorie.)

§ 1.	2.	Allgemeine Formen und die diesbezügliche Fragestellung	260	263
§ 3 — 6.		Definition und fundamentale Eigenschaften der Resultante	265	268 270 274

Inhaltsverzeichnis.		VII
		Seite
§ 7—10.	Rekursive Bildung der Resultante	275 280 282 285
§ 11.	Der Produktsatz der Resultantentheorie	288
§ 12.	Resultante eines Systems homogener Formen. Invarianteneigenschaft	291
§ 13.	Systeme homogener Gleichungen	294
§ 14—17.	Bestimmte und unbestimmte gewöhnliche Systeme	299 302 308 310
§ 18—21.	Symmetrische Formen von mehreren Größensystemen	312 315 317 321
§ 22.	Die Irreduzibilität der Funktionaldeterminante	323
§ 23—26.	Die Grundeigenschaften der Discriminante	325 326 329 330
§ 27.	Die Invarianteneigenschaft der Discriminante	335
§ 28—30.	Die Multiplizität der Lösungen	338 341 342

Siebentes Kapitel.

Lineare diophantische Probleme.

(Allgemeine Sätze und die algebraische Theorie.)

§ 1.	Aufstellung des Problems	347
§ 2 — 4.	Modul- oder Divisorensysteme	351 354 358
§ 5 — 7.	Endliche Divisorenketten	362 367 368
§ 8.	Sonderung der algebraischen und arithmetischen Probleme	371
§ 9.	Algebraische Theorie der linearen diophantischen Systeme	373
§ 10. 11.	Die Divisorensysteme der Hauptklasse (deren Elemente einem orthoiden Bereiche entstammende Formen sind)	377 381
§ 12. 13.	Der verallgemeinerte Noethersche Satz	385 389
§ 14. 15.	Theorie der Charakteristiken der Wurzelsysteme für den „einfachen“ Fall	393 394
§ 16.	Der Hilbertsche Satz	398

Achtes Kapitel.

Arithmetische Theorie der linearen diophantischen Probleme.

§ 1 — 4.	Die absoluten Primsysteme in $[(1), x_1, x_2, \dots, x_k]$	401 404 409 413
§ 5.	Divisorensysteme mod. $(P^{(k)})$	416
§ 6 — 8.	Theorie der Resolventenformen mod. $(P^{(k)})$	419 422 428
§ 9.	Gattungsbereiche mod. $(P^{(k)})$	431
§ 10—14.	Arithmetische Theorie der homogenen linearen diophantischen Gleichungen. Die Prinzipien der Reduktion	435 438 441 442 444
§ 15—18.	Der allgemeine Fall	447 449 451 454
§ 19.	Der singuläre Fall	456

Neuntes Kapitel.

Die ganzen algebraischen Größen.

§ 1.	Einleitende Festsetzungen	459
§ 2. 3.	Die ganzen algebraischen Größen und Formen . .	463 466
§ 4—6.	Die primitiven ganzen algebraischen Formen .	468 470 473
§ 7—9.	Die Association der idealen Größen.	474 479 482
§ 10—13.	Teilbarkeitstheorie der Ideale	484 487 489 491
§ 14—16.	Das Fundamentalsystem der wirklichen Größen eines Gattungsbereichs	493 497 501
§ 17—20.	Teilbarkeit der Formen nach einem Äquivalenzmodul 502 505 506 510	
§ 21—23.	Allgemeine Methode zur Aufstellung der Fundamental- systeme	512 518 520
§ 24. 25.	Das Fundamentalsystem der idealen Größen eines Gattungsbereichs	524 530
§ 26—29.	Die Zerlegung der ganzen Größen in Primideale 534 539 542 545	
§ 30. 31.	Die Discriminante der Gattung	547 550
	Namen- und Sachregister	553

**BESTELL-ZETTEL.**

Bei

Buchhandlung in.....

bestellt der Unterzeichnete hiermit aus dem Verlage von
B. G. Teubner in Leipzig [zur Ansicht]:

**König, Einleitung in die allgemeine Theorie der
algebraischen Größen. [X u. 564 S.]. 1903. 8.
geh. M 18.—, geb. M 20.—**

Ort u. Name:

Wohnung:

Soeben erschien:

VORLESUNGEN ÜBER ALGEBRA

VON

DR. GUSTAV BAUER

GEHEIMRAT, O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

HERAUSGEGEBEN VOM

MATHEMATISCHEN VEREIN MÜNCHEN



MIT DEM BILDNIS GUSTAV BAUERS ALS TITELBILD

UND 11 FIGUREN IM TEXT

Am 18. November 1900 feierte Geheimrat Professor Dr. Gustav Bauer in unverminderter, geistiger und körperlicher Frische, noch rastlos tätig im akademischen Lehramte, seinen 80. Geburtstag. Zur Feier dieses seltenen Ereignisses veranstaltete der „Mathematische Verein München“, der von Studierenden der Universität und der technischen Hochschule gebildet wird, einen Festabend und machte gewissermaßen als Ehrengabe dem Jubilar das Anerbieten, dessen Vorlesungen über „Algebra“ im Drucke erscheinen zu lassen. Herr Professor Bauer erklärte sich da-

mit einverstanden und kam dem mathematischen Verein noch weiter entgegen, indem er das vom Verein aus verschiedenen Nachschriften zusammengestellte Manuskript vor der Drucklegung sorgfältig überarbeitete.

Das vorliegende Buch soll demnach nicht nur den Titel „Vorlesungen“ führen, sondern in der That Vorlesungen, wie sie gehalten wurden, wiedergeben. Es ist hervorgegangen aus Vorträgen über Algebra, die Herr Professor Bauer in der Zeit von 1870—1897 je in Zwischenräumen von 2—3 Jahren an der Universität München gehalten hat. Diese Vorlesungen waren für Studierende im ersten oder zweiten Studienjahr bestimmt. Der Zeit nach erstreckte sich die Vorlesung jeweilig über zwei Semester in der Weise, daß das Wintersemester hauptsächlich der theoretischen Betrachtung der Probleme, das Sommersemester der Lehre von den Determinanten und deren Anwendung zur Lösung dieser Probleme gewidmet war. Diese aus rein praktischen Gründen durchgeführte Teilung auch in dem Buche besonders hervorzuheben lag kein Grund vor, im übrigen entsprechen die beiden ersten Abschnitte dem Inhalte der Wintervorlesung, die beiden letzten der Sommervorlesung. Immerhin kann der Leser etwa vor Kapitel VII die Kapitel XXV bis XXVII über die Theorie der Determinanten lesen und sodann ~~an~~ jedem weiteren Abschnitte über die Elimination, die Diskriminante usw. die Ergänzungen durch Anwendung der Determinanten in den betreffenden Kapiteln des vierten Abschnittes einsehen. Das in den Noten I und II Gegebene wurde gelegentlich in Übungsstunden vorgetragen.

Daß das Buch im Hinblick auf den besonderen Anlaß mit dem Porträt des Verfassers ausgestattet ist, wird dessen zahlreichen Freunden und Schülern gewiß zur Freude gereichen.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt. Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen.

	Seite
I. Kapitel. Einleitung	1
II. „ Komplexe Größen.	4
III. „ Eigenschaften der ganzen rationalen Funktion	14
IV. „ Allgemeine Eigenschaften einer algebraischen Gleichung.	22
V. „ Zerlegung rationaler Brüche.	33
VI. „ Symmetrische Funktionen	41
VII. „ Elimination	58
VIII. „ Zwei Gleichungen mit zwei Variablen	68
IX. „ Elimination von zwei und mehr Variablen	78
X. „ Die Diskriminante	86
XI. „ Die Transformation von Gleichungen	94

II. Abschnitt. Algebraische Auflösung der Gleichungen.

XII. Kapitel. Algebraische Auflösung der Gleichungen 3 ^{ten} und 4 ^{ten} Grades	106
XIII. „ Reziproke Gleichungen. Binomische Gleichungen	116
XIV. „ Von den Einheitswurzeln	124
XV. „ Unmöglichkeit der algebraischen Lösung der Gleichungen 5 ^{ten} und höheren Grades	136
XVI. „ Reduktible und irreduktible Gleichungen. Sätze von Galois	143
XVII. „ Zahlentheoretisches	156
XVIII. „ Abelsche Gleichungen	175
XIX. „ Algebraische Auflösung der binomischen Gleichungen	185

III. Abschnitt. Numerische Auflösung der Gleichungen.

XX. Kapitel. Grenzen der Wurzeln. Rationale Wurzeln. Trennung der Wurzeln. Die Sätze von Descartes und Rolle	200
XXI. „ Die Sätze von Fourier und Sturm	214
XXII. „ Näherungsmethoden.	225
XXIII. „ Imaginäre Wurzeln	238
XXIV. „ Die Graeffesche Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen	244

IV. Abschnitt. Theorie und Anwendung der Determinanten.

	Seite
XXV. Kapitel. Bildung und Eigenschaften der Determinanten	257
XXVI. „ Systeme linearer Gleichungen	276
XXVII. „ Eigenschaften der Determinanten (Fortsetzung)	291
XXVIII. „ Anwendung auf die Elimination einer Variablen aus zwei Gleichungen beliebigen Grades	304
XXIX. „ Zur Elimination von mehreren Variablen	321
XXX. „ Zur Theorie der Diskriminante	330
XXXI. „ Anwendung auf quadratische und bilineare Formen	334
Note I. Kettenbrüche	351
Note II. Herleitung der Formel für die Summe der n^{ten} Potenzen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung	367

Bestell-Zettel.

Bei

Buchhandlung in

bestelle ich hiermit ein Exemplar des im Verlage von B. G. Teubner in
Leipzig soeben erschienenen Werkes [zur Ansicht]:

**Bauer, Gustav, Vorlesungen über Algebra. Mit dem
Bildnis GUSTAV BAUERS als Titelbild und 11 Figuren im
Text. [VI u. 376 S.] gr. 8. 1903. geb. n. M. 12.—,
geb. n. M. 13.—**

Ort, Wohnung.

Unterschrift.

Sobald erschienen:

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. HEFT XVI, 1.

MATHEMATISCHER BÜCHERSCHATZ.

SYSTEMATISCHES VERZEICHNIS
DER WICHTIGSTEN DEUTSCHEN UND AUSLÄNDISCHEN LEHR-
BÜCHER UND MONOGRAPHIEN DES 19. JAHRHUNDERTS AUF
DEM GEBIETE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

VON

DR. ERNST WÖLFFING,

PROFESSOR A. D. KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU STUTTGART

IN ZWEI TEILEN.

I. TEIL: REINE MATHEMATIK.

MIT EINER EINLEITUNG:

DEUTSCHE ÜBERSICHT ÜBER DIE BIBLIOGRAPHISCHEN HILFSMITTEL DER MATHEMATIK.

[XXXVI u. 416 S.] gr. 8. geb. n. M. 14. —, geb. n. M. 15. —



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.



Der mathematische Bücherschatz ist ein systematisches Verzeichnis der achtperiodischen mathematischen Literatur der ganzen Welt für die Zeit von 1801 bis 1900. Von den Titeln der elementar mathematischen Werke ist nur eine Auswahl gegeben worden, während auf dem Gebiet der höheren Mathematik keine Schrift absichtlich unerwähnt geblieben ist und daher auch nichts Wichtiges vermißt werden wird. Die Titel sind unter Stichwörtern angeordnet, von welchen der vorliegende erste Teil, die reine Mathematik umfassend, 313 enthält. Innerhalb der Stichwörter sind die Titel nach Verfassernamen geordnet. Von jeder Schrift ist womöglich angegeben: Verfasser, Anfangsbuchstaben seiner Vornamen, Titel, Druckort, Druckjahr, Verleger und Ladenpreis. Es ist immer nur die neueste zu ermittelnde Auflage des 19. Jahrhunderts angeführt. Zahlreiche Verweise erleichtern die Auffindung der zu mehreren Stichwörtern gehörigen Werke. Außer dem nachstehend abgedruckten Inhaltsverzeichnis enthält der mathematische Bücherschatz ein alphabetisches Sachregister und ein Autorenregister; endlich eine Einleitung, welche eine kritische Übersicht über die bisher vorhandenen bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik gibt. Der zweite Teil des mathematischen Bücherschatzes wird die angewandte Mathematik (Wahrscheinlichkeitsrechnung, numerisches Rechnen, graphischer und geometrischer Kalkül, Zeichnen und darstellende Geometrie, Kristallographie, sowie die Anwendungen der Mathematik auf Mechanik, Physik, Mediziner, Astronomie, Geophysik, Chemie, Biologie und Technik) umfassen und in einigen Jahren nachfolgen.

- Lockhart, J.** Resolution of equations by means of limits inferior and superior. London 1845. Talboys. 4,5 sh.
- The nature of the roots of numerical equations. London 1849. Groombridge. 2 sh.
- Mac Giunis, M. A.** The universal solution of numerical and literal equations. London 1900. Sonnenschein. 5 sh.
- Maleyx, L.** Note sur la résolution numérique des équations. Paris 1860. Hachette. 1,5 fr.
- Marron, F.** Siehe 65.
- Martone, M.** Sulla risoluzione delle equazioni numeriche. Catanzaro. 1889. Maccarone.
- Martynowski, J.** Sur la solution des équations numériques. Liège 1845.
- Matrot, A.** Note sur la résolution des équations numériques par la méthode des différences. Lille 1875. Danel.
- Matzka, W.** Horner's Auflösung algebraischer Ziffergleichungen. Prag 1871.
- de Mauro, A.** Nouvelle théorie sur la résolution des équations numériques de tous les degrés. Petersburg 1833.
- Monnier, E.** Siehe 32.
- Montucci, H.** Siehe 35.
- v. Mor, K.** Anwendung der Horner'schen Methode zur Berechnung der imaginären Wurzeln n. Gl. Innsbruck 1884.
- Moschurger, L.** Auflösung der algebraischen Gl aller Grade. Aarau 1859.
- Mozlik, F. G.** Theorie der n. Gl. Wien 1833. Heubner. 2 M.
- Nejedli, E.** Elementare Ableitung der Budan-Horner'schen Lösungsmethode höherer Zahlengleichungen. Pr. Laibach 1865.
- Nicholson, J. W.** Direct and general method of finding the approximate values of the real roots of numerical equations to any degree of accuracy. New Orleans 1891.
- P. Essai on evolution and involution particularly applied to the operation of extracting the roots of equations and numbers. London 1820.
- Nordheim, J.** Direkte Lösung der Gl. höheren Grads. Entwicklung und Summierung der Reihen. Frankfurt 1863. Bräuner. 1,2 M.
- Ochltowitsch, A. P.** Neue Methode der Lösung algebr. Gl. 1. Krasn 1900. 8 M.
- Olivier, A.** Siehe 34.
- Orzabal, A.** Estudio critico y comparativo de las reglas de Descartes y de Newton respecto al numero de raíces de las ecuaciones numericas. Buenos Ayres 1885.
- Osthoff, C. F.** Neue Art. höhere Gl. zu lösen. Westhofen 1846. Betz. 0,6 M.
- Otto, F. A.** Ein Problem der Herstein. 2. Aufl. Tegel 1895. Pioner. 1,2 M.
- Paletti, G.** Nuovo metodo per dettare le radici immaginarie delle equazioni numeriche. Torino 1824.
- Parseval, M. A.** Methode generale pour sommer la suite donnée par le theoreme de Lagrange au moyen de laquelle on trouve une valeur qui satisfait à l'équation algebrique ou transcendente. Paris 1804.
- Pfeiffer, E.** Siehe 38.
- Phillips, A. W. and Beebe, W.** The algebra or geometrical interpretation of the theory of equations with 1 unknown quantity. New-York 1882. O. E. B.
- Piani, D.** De limitibus aequationum. Lugna 1837.
- Del metodo Newtoniano per la soluzione approssimata delle equazioni numeriche. Bologna 1886.
- Piller, M.** Die Auflösung der n. Gl durch successive Quadrate der Wurzeln. L. Pr. Dillingen 1892.
- Pinet, H.** Memoire sur une nouvelle methode pour la resolution des équations numériques. Paris 1898. Nemo.
- Pineto, Z.** Über Vorhandensein Grenzen positiver Wurzeln n. Gl. höherer alg. Gl. höheren Grads. 1886.
- Plator, D.** De solutione aequationum altiorum ope serierum arithmetice. Wilschaden 1821.
- Pochlinski, N. S.** Neue und einfache Methode n. alg. Gl. von beliebigem Grade zu lösen russ. 1. Pr. 1895. 1,5 rub.
- Poncin, G.** Le equazioni numeriche e razionali di una incognita. Land 1877. Hoepli. 7,5 l.
- Popper, J.** Beiträge zu Wedgell's Methode der Auflösung n. G. Prag 1860.
- Posusta, V.** Über Horner's Anleitung zur Auflösung der höheren Zahlengleichungen mit 1 Unbekannten (tschech.). Pr. 1876.
- Prada, M. V.** Luenbraciones algebraicas. Madrid 1889.
- v. Prasse, M.** De aequationibus altiorum ordinum commentatio. Pr. 1807.
- Prouhet, E.** Propriétés de quelques fonctions et représentation des racines des équations par des intersections de courbes. Paris 1862.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite		Seite
Einleitung	III	40. Sturmsche Funktionen	79
Inhaltsverzeichnis	XXXIII	41. Transzendente Gleichungen	80
1. Geschichte der Mathematik	1	42. Substitutionen	80
2. Philosophie der Mathematik	5	43. Substitutionsgruppen	81
3. Zeichen und Zeichensprachen	10	44. Gruppentheorie	81
4. Logikkalcul und mathematische Logik	10	45. Kombinatoriklehre	82
5. Algorithmen	11	46. Determinanten	83
6. Pädagogik der Mathematik	11	47. Funktionaldeterminanten	86
7. Arithmetik	17	48. Symmetrische Funktionen	86
8. Positiv und Negativ	29	49. Elimination	87
9. Dezimalbrüche	30	50. Resultante	87
10. Proportionen	32	51. Diskriminante	88
11. Zahlbegriff	33	52. Invarianten	88
12. Zahlssysteme	33	53. Bilinear	90
13. Zahlentheorie, Allgemeines	34	54. Trilinear	91
14. Zahlentheorie, Spezielles	36	55. Kanonische Form	91
15. Pythagoräische Zahlen	40	56. Hessesche Form	91
16. Irrationale Größen	40	57. Algebraische (Niedere) Analysis	91
17. Rationalmachen	41	58. Ungleichungen	93
18. Imaginäre Größen	41	59. Potenzen	93
19. Komplexe Größen	43	60. Wurzeln	94
20. Zahlkörper	44	61. Binomialkoeffizienten	95
21. Faktoren	44	62. Figurierte Zahlen	95
22. Primzahlen	45	63. Binomischer Lehrsatz	96
23. Zahlentheorien	45	64. Polynomischer Lehrsatz	97
24. Diophantische Gleichungen	46	65. Reihen, Allgemeines	97
25. Reste	48	66. Reihen, Spezielles	98
26. Quadratische Formen	49	67. Konvergenz und Divergenz	101
27. Algebra	50	68. Progressionen	102
28. Höhere Algebra	59	69. Arithmetische Reihen	103
29. Literale Gleichungen, Allgemeines	60	70. Geometrische Reihen	103
30. Literale Gleichungen, Spezielles	62	71. Harmonische Reihen	104
31. Lineare Gleichungen	66	72. Rekurrirende Reihen	104
32. Quadratische Gleichungen	66	73. Fakultäten und Faktoriellen	104
33. Kubische Gleichungen	68	74. Bernoullische Zahlen	104
34. Biquadratische Gleichungen	70	75. Potenzreihen	105
35. Gleichungen fünften Grades	71	76. Hypergeometrische Reihen und Funktionen	106
36. Kreisteilungsgleichungen	72	77. Stirlingsche Reihe	106
37. Reziproke Gleichungen	73	78. Fouriersche (trigonometrische) Reihen	106
38. Trinomische Gleichungen	73	79. Differenzenrechnung	107
39. Numerische Gleichungen	74	80. Interpolation	108
		81. Mittelwerte	109
		82. Differenzengleichungen	109

	Seite		Seite
83. (Unendliche) Produkte	110	126. Elliptische Funktionen, Spezielles	177
84. Kettenbrüche	110	127. Elliptische Integrale, Spezielles	178
85. Höhere Analysis (Infinitesimalrechnung)	112	128. Thetafunktionen	179
86. Differentialrechnung, Allgemeines	122	129. Ultraelliptische Transzendenten	179
87. Differentialrechnung, Spezielles	125	130. Hyperelliptische Funktionen	179
88. Grenzen	126	131. Hyperelliptische Integrale	179
89. Unendlich	127	132. Abelsche Funktionen	179
90. Taylorscher (MacLaurinscher) Satz	128	133. Abelsche Integrale	179
91. Unbestimmte Formen	129	134. Automorphe Funktionen	180
92. Maxima und Minima	129	135. Kugelfunktionen	181
93. Operationskalkül	132	136. Cylinderfunktionen (Besselsche Funktionen)	182
94. Funktionalgleichungen	132	137. Lamésche Funktionen (Integrale, Gleichungen)	189
95. Iteration	132	138. Cofunktionen	183
96. Integralrechnung, Allgemeines	132	139. Prinzipien der Geometrie	183
97. Integralrechnung, Spezielles	134	140. Parallelentheorie	183
98. Bestimmte Integrale	136	141. Nichtenklidische Geometrie	186
99. Variationsrechnung, Allgemeines	139	142. N -dimensionale Geometrie	186
100. Variationsrechnung, Spezielles	140	143. Topologie	197
101. Isoperimetrische Probleme	141	144. Konfigurationen	199
102. Gewöhnliche Differentialgleichungen	141	145. Magische Quadrate	198
103. Partielle Differentialgleichungen	149	146. Elementare Geometrie	198
104. Willkürliche Funktionen	153	147. Perismen	207
105. Transformationsgruppen	153	148. Gerade	207
106. Differentialinvarianten	154	149. Goldener Schnitt	209
107. Berührungstransformationen	154	150. Winkel	208
108. Funktionen reeller Veränderlicher	155	151. Dreieck	209
109. Stetigkeit	155	152. Transversalen	214
110. Mengenlehre	155	153. Feuerbachscher Kreis	217
111. Transfinite Zahlen	156	154. Viereck	218
112. Funktionen komplexer Veränderlicher, Allgemeines	156	155. Quadrat	218
113. Funktionen komplexer Veränderlicher, Spezielles	158	156. Parallelogramm	217
114. Riemannsche Flächen	162	157. Deltoid	217
115. Algebraische Funktionen	162	158. Polygone	211
116. Ganze Funktionen	163	159. Kreis	220
117. Rationale Funktionen	163	160. Apollonisches Taktionsprobl.	227
118. Partialbrüche	163	161. Malfattisches Problem	228
119. Exponentialfunktion und Exponentialrechnung	164	162. Geometrischer Ort	224
120. Logarithmen	164	163. Delisches Problem	225
121. Gonometrische Funktionen	167	164. Winkelteilung	228
122. Hyperbelfunktionen	169	165. Quadratur (und Rektifikation) des Kreises	229
123. Eulersche Integrale (Beta- und Gammafunktionen)	169	166. Geometrographie	234
124. Doppelperiodische Funktionen	170	167. Stereometrie	234
125. Elliptische Funktionen und Integrale, Allgemeines	171	168. Ebene	236
		169. Dreikant	237
		170. Tetraeder	237
		171. Polyeder	238
		172. Prisma	240
		173. Parallelepiped	240
		174. Prismatoid	241
		175. Obelisk	241
		176. Pyramide	241
		177. Cylinder	241

138. Kugel	242	227. Kegelflächen	306
139. Kugel	243	228. Abwickelbare Flächen	307
140. Geometrie	244	229. Cylinderflächen	308
141. Trigonometrie	245	230. Kegelflächen	308
142. Sphärische Trigonometrie	251	231. Drehungsflächen	309
143. Geometrie der Lage (projek-		232. Konoidflächen	310
tische Geometrie)	254	233. Translationsflächen	310
144. Neuere Geometrie	255	234. Spezielle algebraische Flächen	310
145. Synthetische Geometrie	258	235. Flächen zweiten Grades, All-	
146. Abzählende Geometrie	258	gemeines	311
147. Analytische Geometrie (alge-		236. Flächen zweiten Grades, Spezi-	
braische Geometrie)	259	zielles	312
148. Geometrie des Maßes	260	237. Paraboloid	315
149. Differentialgeometrie, Allge-		238. Ellipsoid	316
meines	270	239. Hyperboloid	318
150. Koordinaten	270	240. Flächen dritten Grades	318
151. Sphärik	273	241. Flächen vierten Grades	319
152. Ebene Kurven, Allgemeines	274	242. Wellenfläche und Elastizitäts-	
153. Ebene Kurven, Spezielles	275	fläche	320
154. Tangenten und Tangential-		243. Wulst	321
ebenen	278	244. Cylinder	321
155. Normale und Normalebenen	278	245. Flächen fünften Grades	321
156. Asymptoten	279	246. Raumkurven, Allgemeines	321
157. Mittelpunkte	279	247. Raumkurven, Spezielles	322
158. Orthogonal	279	248. Spezielle algebraische Raum-	
159. Singularitäten der ebenen		kurven	322
Kurven	279	249. Sphärische Kurven	323
160. Schließungspolygone	280	250. Raumkurven dritter Ordnung	323
161. Punktsysteme	280	251. Raumkurven vierter Ordnung	324
162. Schaaren ebener Kurven	280	252. Sphärische Kegelschnitte	324
163. Spezielle ebene algebraische		253. Differentialgeometrie der ebe-	
Kurven	282	nen Kurven	324
164. Kegelschnitte, Allgemeines	284	254. Krümmung der ebenen Kurven	325
165. Kegelschnitte, Spezielles	289	255. Quadratur	325
166. Parabel	294	256. Rektifikation	327
167. Ellipse	296	257. Enveloppen	328
168. Hyperbel	297	258. Fußpunktkurven	328
169. Durchmesser	297	259. Parallelkurven	329
170. Pascalisches Sechseck	298	260. Äquidistante Kurven	329
171. Kurven dritten Grades	298	261. Trajektorien	329
172. Strophoide	300	262. Evoluten (Developpoiden)	329
173. Cuspiden	300	263. Evolventen	330
174. Descartessches Folium	300	264. Rouletten	330
175. Kurven vierten Grades	301	265. Gliassetten	330
176. Conchoide	302	266. Ebene transzendente Kurven	330
177. Cartesische Ovale	302	267. Cyclische Kurven	331
178. Pascalische Schnecke	302	268. Kreisevolvente	333
179. Cardoide	303	269. Spiralen	333
180. Cassinische Kurven	303	270. Rabaucourlinien	333
181. Lemniscate	303	271. Sinusspiralen	334
182. Spirische Linien	303	272. Verfolgungskurven	334
183. Flächentheorie, Allgemeines	303	273. Differentialgeometrie der Flä-	
184. Flächentheorie, Spezielles	304	chen und Raumkurven	334
185. Singularitäten von Flächen		274. Striktionslinien	334
und Raumkurven	306	275. Krümmung der Flächen und	
186. Schaaren von Flächen und		Raumkurven	334
Raumkurven	306	276. Krümmungslinien	335
		277. Centrafläche	336

	Seite		Seite
278. Haupttangentenkurven	336	298. Komplexe	346
279. Geodätische Linien	336	299. Kongruenzen	346
280. Deformation	337		
281. Differentialparameter	338	300. Geometrische Verwandtschaft	347
282. Kubatur	338	301. Transformationen	348
283. Komplanation	339	302. Symmetrie	351
284. Fußpunktfächen	340	303. Ähnlichkeit	351
285. Parallelfächen	340	304. Inversion	352
286. Transzendente Flächen	341	305. Kollineation	353
287. Minimalflächen	341	306. Reziprozität	353
288. Schraubenflächen	342	307. Konnex	353
289. Flächen konstanter Krümmungsumfö	343	308. Involution	353
290. Flächen konstanter mittlerer Krümmung	343	309. Korrespondenzen	353
291. Transzendente Raumkurven	343	310. Abbildung	354
292. Schraubenlinien	343	311. Konforme Abbildung	354
293. Sphäroidische Trigonometrie	343	312. Formelsammlungen	355
294. Loxodromen	344	313. Mathematische Belustigungen	355
295. Loxodromische Trigonometrie	344		
296. Isothermen	344	Sachregister	356
		Autorenregister	357
297. Liniengeometrie	344	Verbesserungen	357



Bestell-Zettel.

Bei der

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:

Ernst Wölffing, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. [XXXVI u. 416 S.] gr 8 1903. geh. n. M. 14. — In Leinwand geb. n. M. 15. —
II. Teil. Nach Erscheinen.

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Das Nichtgewünschte bitte gef. durchzustreichen.



Sieben erschienen:

POLITISCHE ARITHMETIK

ODER

DIE ARITHMETIK DES TÄGLICHEN LEBENS

VON

MORITZ CANTOR

ZWEITE AUFLAGE

[X u. 166 S.] 8. 1903. In Leinw. geb. n. M. 1.80

Zeit einer langen Reihe von Jahren halte ich jeden Winter an der Universität Heidelberg eine zweistündige Vorlesung für Kameralisten, welche unter dem Namen der Politischen Arithmetik angekündigt wird. Oft befragt, ob ich ein Buch über diesen Gegenstand empfehlen könne, mußte ich immer verneinend antworten, nicht als ob kein Werk über politische Arithmetik im Drucke erschienen wäre, aber weil keines alles enthält, was ich in jenen Vorlesungen behandle. Ich entschloß mich, die allmählich entstandenen Vorlesungsnotizen zu veröffentlichen, und während ich sie zur Herausgabe vorbereitete, kam ich zur Vermutung, das so entstehende kleine Buch möchte auch über den engen Kreis kameralistischer Leser hinaus ein wirkliches Bedürfnis zu befriedigen imstande sein.

Heutzutage wird es fast für jedermann notwendig sein, etwas von den Rechnungsweisen des auf Kauf und Verkauf sich beschränkenden Börsengeschäftes zu verstehen, so enthehrlich, ja so schädlich unter Umständen die Kenntnis derjenigen Geschäftsformen sich erweisen kann, welche dem Börsenspiele eigentümlich sind. In diesem Büchlein findet der Leser Auskunft über das eine unter absichtlicher Vermeidung des anderen, es sei denn, daß man das Promessengeschäft als Börsenspiel betrachte, welches vielmehr eine Abart der Lotterie ist. Gemeinde- und Staatsverwaltung lassen es wünschenswert erscheinen, etwas von der Aufnahme und Heimzahlung von Anlehen zu wissen. Hier sind diese Dinge behandelt. Das Versicherungswesen ist in den

Vordergrund des modernen Lebens getreten. Ich glaube kaum, daß man sich anderwärts darüber in so gedrängter Kürze Auskunft verschaffen kann wie hier. Bei manchen von den behandelten Gegenständen ist eine Beziehung auf das binnen kurzem in Rechtskraft tretende Bürgerliche Gesetzbuch für das Deutsche Reich erforderlich. Ich erfülle eine mir angenehme Pflicht, indem ich meinen Sohn, Rechtsanwalt Dr. Otto Cantor in Karlsruhe, als meinen kundigen Ratgeber und Mitarbeiter nach dieser Richtung nenne. Logarithmisches Rechnen ist nicht jedermanns Sache. In einem Anhang finden sich ausgerechnete Tafeln von $1,0p^n$ und $1,0p^{-n}$ für die drei gegenwärtig üblichsten Zinsfüße 3, $3\frac{1}{2}$ und 4 Prozent über sämtliche Jahre von $n=1$ bis $n=100$, so daß Logarithmen fast überall entbehrlich werden. Ein solcher Inhalt rechtfertigt vielleicht meine oben ausgesprochene Vermutung.

Zweierlei Bedingungen waren allerdings zu erfüllen, wenn mein Buch seinem erweiterten Zwecke sollte genügen können. Es mußte lesbar geschrieben, es mußte zu verhältnismäßig niedrigem Preise käuflich sein. In letzterer Beziehung hat das Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung wohl das überhaupt Mögliche geleistet. Darüber zu entscheiden, ob ein lesbares Buch vorliegt, ist Sache des Lesers, nicht des Verfassers. Ich kann nur sagen, daß ich mir redliche Mühe gegeben habe, verständlich zu bleiben, wenn der Gegenstand es auch mit sich brachte, daß mathematische Formeln nicht überall vermieden werden konnten. Eingestreute Beispiele dienen zu deren Erläuterung, so daß sie, wie ich hoffe, dem nichtmathematischen Leser kein unübersteigliches Hindernis bieten werden. Überdies besteht zwischen den einzelnen Kapiteln ein verhältnismäßig loser Zusammenhang, so daß man über Unverstandenes hinweggehen bald wieder zu leichteren Gegenständen gelangt. Mathematischer Leser aber, Lehrer an Mittelschulen z. B., welche in der Lage sind, mit ihren Schülern Zinseszins- und Wahrscheinlichkeitsaufgaben zu behandeln, werden die verhältnismäßige Breite meiner Darstellung sowie die nicht überall vollkommene strenge Beweisführung zu entschuldigen haben. Alle Leser zu befriedigen ist unmöglich, und darum glaubte ich eine Vermittlung zwischen einander vielfach widerstreitenden Neigungen anstreben zu müssen.

Heidelberg, Oktober 1898.

Wenn ich dem Gebrauche folgend auch der zweiten Auflage dieses kleinen Buches ein Vorwort vorausschicke, so kann es auch verhältnismäßig kurz fassen. Der Zweck des Buches ist der gleiche geblieben wie in der ersten Auflage und wird mit den gleichen Mitteln wie damals gegen Ende 1898 angetroffen.

Allerdings sind im einzelnen manche Veränderungen eingetreten. Nicht nur, daß verschiedene Zahlenirrtümer Verbeßerung fanden, haben neue landesgesetzliche und reichsbehördliche Anordnungen eine Umarbeitung einzelner Paragraphen nötig gemacht. Ich erinnere an das Badische Feuerversicherungsgesetz, an die Erhöhung der Börsenumsatzsteuer, an die Vereinheitlichung der Deutschen Börsenübungen von 1899. Eine ähnliche Lage hatte der zur gleichen Zeit vollzogene Übergang der Deutschen Lebensversicherungsanstalten von den mit $4\frac{1}{2}\%$ Verzinsung berechneten Tarifen zu solchen, welche nur 4% in Rechnung bringen, nebst anderen Satzungsänderungen der Kaiserlichen Lebensversicherungsanstalt, für deren Lebensversicherungs-Mitteilung ich Herrn Emil Walz meinen besonderen Dank auszusprechen habe.

Es entspricht der Natur des Gegenstandes, daß ein Buch wie das vorliegende immer nur einen Anspruch auf allgemeine Beachtung des Inhaltes befriedigen kann, während Einzelheiten dem Verschulden des Verfassers der Abänderung ausgesetzt bleiben. Als ein sprechendes Beispiel erwähne ich die in den §§ 19, 29 vorkommende Österreichische $4\frac{1}{2}\%$ Silberrente. Es stellt sich, wie während des Druckes der letzten vier Druckungen bekannt wurde, baldiger Einziehung entgegen, und so, als dies erfolgt ist, wird es notwendig sein, die Rechnungen der erwähnten Paragraphen für andere Anleihen auszuführen.

Leider ist auch auf S. 107, Zeile 17 ein sinnentstellender Druckfehler stehen geblieben. Anstatt „das Alter von h Jahren“ zu lesen „das Alter von $h + 1$ Jahren“.

Was die Ausstattung des Buches betrifft, so werden die Leser gewiß ebenso wie der Verfasser es dankbar anerkennen, daß die Verlagshandlung zu einem für die Augen angenehmeren Druck übergegangen ist, ohne den sehr mäßigen Preis zu erhöhen.

Heidelberg, Februar 1903.

Moritz Cantor.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Einfacher Zins.

Nr. 1—30. S. 1—37.

Nr.		
1.	Geschichtliche Einleitung	
2.	Inhalt der politischen Arithmetik	
3.	Der Zins und seine Bedeutung	
4.	Zinsverbote. Die Höhe des Zinsfußes	
5.	Abkürzende Bezeichnungen: $\%$, ‰ , 1,0p	
6.	Grundformeln der Zinsrechnung. Zahlenbeispiel. Englische Zinsberechnung	
7.	Die Usance der Zeitberechnung	
8.	Praktische Anweisung zur Zeitberechnung	
9.	Normalzinsfuß. Zinsfaktor	
10.	Laufende Rechnung. Scheckverkehr	
11.	Beispiel eines Kontokorrentes	9 u.
12.	Erläuterungen zum Kontokorrent	
13.	Die Zinsberechnung in laufender Rechnung. Zinszahlen	
14.	Retrograde Zinsberechnung. Progressive Zinsberechnung	
15.	Ausgabe von Staatsanlehen	
16.	Das Kursblatt. Kursveränderungen	
17.	Anlehenscheine auf Namen. Inhaberpapiere. Coupon. P (od. B), G, bz.	
18.	Zahlenbeispiel. Provision. Courtage. Stempel	
19.	Ausländische Wertpapiere. Die Umrechnungssätze. Besteuerte und steuerfreie Anlehen	
20.	Aktien. Dividende. Börsenzinsfuß	
21.	Vollbezahlte und nichtvollbezahlte Aktien	
22.	Prioritätsobligationen	
23.	Hypothekenbanken. Pfandbriefe	
24.	Wechsel. Rimessen und Devisen	
25.	Rabatt. Diskonto. Die Usance der Diskontierung bei Rimessen	
26.	Devisen. Kurze Sicht. Lange Sicht	
27.	Arbitrage	
28.	Interusurium. Diskontierung von 100. Diskontierung auf 100	
29.	Unterschied der Ergebnisse der beiden Diskontierungsweisen	
30.	Terminrechnung	

Zweites Kapitel.

Zusammengesetzter Zins.

Nr. 31—49. S. 37—57.

31.	§ 608 des Bürgerlichen Gesetzbuches für das Deutsche Reich	
32.	Diskontierung von und auf 100 ist falsch, wenn die Zeit 1 Jahr übersteigt	

	Seite
23. Notwendigkeit der Diskontierung nach der Formel $K_n = \frac{K}{1,0p^n}$	39
24. Zinseszinsformeln. § 248 des Bürgerlichen Gesetzbuches für das Deutsche Reich	40
25. Zinseszins bei Sparkassen. Wirkung der Unverzinslichkeit ganz kleiner Beiträge	41
26. Wann wird durch Zinseszins $K_n = m K_0$? Bedeutung der Bruchteile von Jahren	45
27. Termingerechnung mit Zinseszins	46
28. Zinseszins bei ungleichem Zinsfuß für Kapital und Zinsen	46
29. Ein Beispiel zusammengesetzter Verzinsung	47
30. Tilgung eines Anlehens durch Annuitäten. Die Amortisationsgleichung	49
31. Folgerungen aus der Amortisationsgleichung	50
32. Entwurf eines Tilgungsplanes	50
33. Unterschied der Annuitäten bei verschiedenem Zinsfuß, aber gleicher Tilgungszeit	52
34. Kurs C des $q\%$ -Anlehens, wenn das $p\%$ -Anlehen pari steht	52
35. Amortisationszuschlag	53
36. Unrichtigkeit der Formel $K_n = \frac{K}{1,0p^n}$, wenn n keine ganze Zahl ist	55
37. Der relative Zinsfuß	56
38. Der konforme Zinsfuß	57
39. Waldaufgaben	57

Drittes Kapitel.

Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Nr. 50—68. S. 57—80

40. Begriffsbestimmung der mathematischen Wahrscheinlichkeit	57
41. Vollständige Wahrscheinlichkeit als Summe der Teilwahrscheinlichkeiten	58
42. Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von Ereignissen	59
43. Beispiel der durch eine Scheidewand getrennten Urne mit verschiedenfarbigen Kugeln	60
44. Begriff der Kombinatorik. Permutationen. Kombinationen	61
45. Bildung der Permutationsformen	62
46. Anzahl der Permutationsformen	63
47. Bildung der Kombinationsformen	63
48. Anzahl der Kombinationsformen ohne Wiederholung	64
49. Beispiel. Das Lottospiel	65
50. Wahrscheinlichkeiten im Lottospiel	66
51. Der Vorteil des Spielgebers. Abschaffung des Lottospiels	68
52. Beispiel aus dem Skatenspiel	69
53. Beispiel aus dem Whistspiel	71

Nr.		Seite
64.	Beispiel aus dem Würfelspiel	72
65.	Paschwerfen mit 3 Würfeln	74
66.	Die Anzahlen der Kombinationen ohne Wiederholung als Binomialkoeffizienten	76
67.	Das größte Glied in einer Binomialentwicklung. Das Gesetz der großen Zahlen	77
68.	Wahrscheinlichkeit a priori. Wahrscheinlichkeit a posteriori. Statistik	79

Viertes Kapitel.

Von den Lotterieranlehen.

Nr. 69—76. S. 80—92.

69.	Begriff des Lotterieranlehens	80
70.	Mathematische Hoffnung. Moralische Hoffnung	81
71.	Die Reihenfolge der Spieler beeinflußt ihre Hoffnung nicht	82
72.	Verfahren bei der Ziehung von Losen. Serienziehung. Prämienziehung	83
73.	Wertberechnung eines Loses. Die Badischen 100 Taler-Lose von 1867.	85
74.	Wert eines Serienloses. Gesellschaften zum Spiel von Serienlosen	87
75.	Promessen	90
76.	Versicherung gegen Zurückzahlung	91

Fünftes Kapitel.

Versicherungswesen.

Nr. 77—83. S. 92—99.

77.	Begriff der Versicherung	92
78.	Entwicklung des Versicherungswesens	93
79.	Feuerversicherung. Versicherung durch Aktiengesellschaften. Versicherung auf Gegenseitigkeit.	94
80.	Verminderung der Feuersgefahr durch neu hinzutretende Momente.	95
81.	Landesbrandkassen	96
82.	Jahresüberschuß. Nachzahlungspflicht bei Gegenseitigkeitsanstalten	96
83.	Beschränkung des Risiko. Rückversicherung.	98

Sechstes Kapitel.

Sterblichkeitstafeln.

Nr. 84—96. S. 100—114.

84.	Untunlichkeit unmittelbarer fortgesetzter Beobachtung der Sterblichkeit	100
85.	Stationäre Bevölkerung.	100
86.	Bedeutung der Volkszählung bei stationärer Bevölkerung	101
87.	Mittlere Lebensdauer.	102
88.	Wahrscheinliche Lebensdauer.	103

	Seite
Unrichtigkeit der stationären Bevölkerung. Veränderung der Bevölkerung in geometrischer Progression	104
Herstellung von Sterblichkeitstafeln aus der Erfahrung	106
Die ersten Sterblichkeitstafeln	108
Die Süßmilch-Baummannsche Sterblichkeitstafel	109
Sterblichkeitstafel für Lebensversicherung	109
Sterblichkeitstafel für Rentenversicherung	111
Der tatsächliche Unterschied der beiden Sterblichkeitstafeln	112
Unterschiede zwischen Rentenversicherung und Lebensversicherung	112

Siebentes Kapitel.

Einfache Lebensversicherung und sofort beginnende vorschüssige Rentenversicherung.

Nr. 97—106. S. 114—130.

Die geschichtlichen Anfänge der Lebensversicherung	114
Unzweckmäßigkeit einer Lebensversicherung von Jahr zu Jahr	116
Einfache Lebensversicherung gegen einmalige Einzahlung. Erklärung von m_A , v_A . Formel für P_A	118
Einfache Lebensversicherung gegen Jahresprämien. Formel für p_A	121
Sofort beginnende vorschüssige Rentenversicherung. Formel für R_A	123
Der Deckungsfond (Prämienreserve).	123
Formeln für den Deckungsfond	124
Allmähliche Berechnung des Deckungsfond	125
Notwendigkeit der Tarifveränderung bei Veränderung des Zinsfußes	128
Rückkauf und Umwandlung von Verträgen	129

Achstes Kapitel.

Dividendenberechnung.

Nr. 107—113. S. 130—139.

	Seite
Entstehung der Bruttoprämie aus der Nettoprämie mittels eines Zuschlags	130
Sicherheitsreserve der Gegenseitigkeitsanstalten als Ersatz des Aktienkapitals	131
Die dividendenlose Karenzzeit	133
Verteilung der Dividende im Verhältnis zur Jahresprämie	135
Verteilung der Dividende im Verhältnis zur Summe der Jahresprämien	136
Verteilung der Dividende im Verhältnis zum Deckungsfond	136
Bonus. Tontinensparfond	138

Neuntes Kapitel.

Weniger einfache Versicherungsarten auf Grundlage der Sterblichkeit.

Nr. 114—127. S. 139—153.

114. Die aufgeschobene Rente. ${}^{(k)}R_h$
115. Die nachschüssige Rente
116. Die aufhörende oder temporäre Rente. ${}^{(k)}R_h$
117. Die aufgeschobene temporäre Rente ${}^{(k+\eta)}R_{(h)}$. Militärversicherung, Studienversicherung
118. Die aufgeschobene Rente gegen Jahresprämien. $p[{}^{(u)}R_h]$ Beispiel
119. Beispiel für sofort beginnende vorschüssige Rente
120. Ratenweise ausbezahlte Rente
121. Abgekürzte Lebensversicherung. Kapitalversicherung auf den Erlebensfall. Aussteuerversicherung
122. Rückgewähr und Rückgewährprämien
123. Verbindungsrente. Formel für $R_{h,k}$
124. Rente für zwei Personen bis zum Tode der zuletzt sterbenden Person. Formel für ${}^{\text{II}}R_{h,k}$
125. Überlebensrente. Formel für ${}^{\text{I}}R_{h,k}$
126. Versorgungsrente oder einseitige Überlebensrente. Formel für $R_{[h],k}$
127. Versorgungsrente auf Jahresprämien. Formel für $p[R_{[h],i}]$

Anhang.

Tafel für $1,0p^n$ und $1,0p^{-n}$ bei $p = 3$, $p = 3\frac{1}{2}$, $p = 4$ und $n = 1$ bis $n = 100$



Bei

Bestell-Zettel.

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B.G. Teubner in Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:

Moritz Cantor, Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. Zweite Aufl. [X u. 156 S.] 8. 1903. In Leinw. geb. n. M. 1.50

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Soeben erschienen:



LEHRBUCH DER PRAKTISCHEN PHYSIK

VON

DR. F. KOHLRAUSCH,

PRÄSIDENT DER PHYSIKALISCH-TECHNISCHEN REICHSANSTALT IN CHARLOTTENBURG,
ORD. HONORARPROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BERLIN.

NEUNTE UMGEARBEITETE AUFLAGE
DES LEITFADENS DER PRAKTISCHEN PHYSIK.

Mit zahlreichen Figuren im Text. [XXVII u. 610 S.] gr. 8.
1901. Biegsam in Leinwand geb. n. *M.* 8.60.

Es genügt, die neue Auflage des Buches, welches in 30 Jahren seines Bestehens durch je acht Auflagen in deutscher und fremder Sprache Verbreitung gefunden hat, durch ihre Abweichungen von früheren Ausgaben zu charakterisiren. Diese sind freilich bei der vorliegenden neunten Auflage, die den früheren Namen des „Leitfadens“ gegen die Benennung „Lehrbuch“ vertauscht hat, erheblicher als sonst.

Da nämlich den Zwecken des elementaren physikalischen Praktikums inzwischen Rechnung durch die kleine Ausgabe des Leitfadens*)

*) F. Kohlrausch, kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Mit zahlreichen in Text gedruckten Figuren. [XIX u. 260 S.] gr. 8. 1899. In Leinw. geb. n. *M.* 4.—

getragen worden ist, welche sich auf den gebräuchlichen Stoff des allgemeinen Praktikums beschränkt und dem Praktikanten seine Aufgabe also in übersichtlicher Form bietet, so dürfte die größere Ausgabe sich nach Auswahl ihres Inhalts und nach ihrem Umfang frei bewegen.

Das Buch hat einerseits seine alte Aufgabe festgehalten, den Unterrichte zu dienen und zwar, indem die Vollständigkeit des Stoffes gewahrt ist, auch dem Anfangspraktikum, sobald der Arbeitende nicht scheut, seine Aufgabe aus einer größeren Menge anderen Inhalts herauszusuchen und die, für ihn weniger in Betracht kommende Litteratur, sowie zuweilen einige mathematische Zugaben mitzunehmen, welche ja aber dem, der sie zu gebrauchen weiß, auch eine rasche und eingehendere Kenntnis ermöglichen. Ausser dem Fachstudium der Physik, Mathematik, physikalischen Chemie oder Elektrotechnik wird auch mancher Andere vorziehen, bei der Arbeit gleich die größere Ausgabe zu gebrauchen und dabei vielleicht durch Lektüre mancher kennen zu lernen, was in den Kurs des Praktikums nicht eingeschlossen ist.

Der Gebrauch beider Ausgaben neben einander wird erleichtert dadurch, daß die, systematischer als früher gestaltete Anordnung beider die gleiche ist und auch die Bezifferung der Paragraphen und Tabellen, soweit es durchführbar war, übereinstimmt. Auch der größeren Ausgabe bildet zum Zwecke des Unterrichts die allgemeine Methode stets den Kern der Behandlung.

Auf der anderen Seite aber ist der Inhalt vielseitig weiter ausgebaut worden, z. B. in den technischen Anweisungen, in der Thermometrie, in den feineren Teilen der Optik, wo u. A. auch die modernen Anwendungen der Interferenz auf die Längenmessung berücksichtigt werden, und wo die Photometrie eine vollständige Aufführung ihrer Methoden findet. Eingehender als früher behandelt wird die Barometrie und die Messung hoher und tiefer Temperaturen. In der Elektrizitätslehre werden sowohl die neueren Instrumente wie die Methoden beschrieben, welche grossenteils der Elektrotechnik entnommen sind und die sich in ihr eingebürgert haben, der Kompensationsapparat und die Anwendung der Normalelemente, die Messung an Wechselströmen und an Dynamomaschinen, die Bestimmung der Magnetisirungs-Konstanten. Der Anwendung der Elektrizitätslehre auf die Chemie wird ein breiterer Platz eingeräumt. Neu hinzugekommen sind u. A. Kapitel über Hertz'sche Wellen und Kathodenstrahlen.

Von dem neuen oder umgestalteten Inhalte der Tabellen seien genannt die Beziehung der Quecksilberthermometer auf das Gas-thermometer, die Wellenlänge des Lichtes, die Brechungsverhältnisse

und Absorptionskonstanten der für Wärmestrahlung oft gebrauchten Körper Quarz, Steinsalz, Sylvin und Flußspath, das Reflexionsvermögen von Metallen, elektrisches Potential und Funkenlänge, die magnetischen Eigenschaften von Eisensorten und die wieder von der Deutschen Seewarte neu aufgestellten erdmagnetischen Tabellen.

Inhalt.

Alphabetisches Verzeichnis.

Allgemeines über Messungen.

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Beobachtungsfehler. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler. 2. Beurteilung des Fehlers aus der Methode. Einfluß auf das Resultat. Näherungsregeln für das Rechnen mit kleinen Größen. 3. Bestimmung empirischer Konstanten mit kleinsten Quadraten. Rechnung bei gleich großen Intervallen. Auflösung v. Gleichungen, wenn Näherungswerte vorliegen. Das Gauß'sche Rechenverfahren. 4. Korrekturen und Korrektionsrechnungen. 5. Interpolation. 6. Graphische Darstellung von Beobachtungen. 7. Genauigkeit von Messungen. Zahlenrechnen. | <ol style="list-style-type: none"> 8. Technisches. <ol style="list-style-type: none"> 1. Quecksilber. 2. Wasser. 3. Gase. 4—10. Glas. 11. Amalgamiren. 12. Löten. 13. Platin schweißen. 14. Stahl härten. 15. Ausglühen. 16. Magnetisiren; entmagnetisiren. 17. Schleifen und Poliren. 18. Galvanoplastik. 19. Paraffiniren. 20. Cocon. 21. Quarz. 22. Luftpumpenfett. 23. Wasser- u. 24. Quecksilberluftpumpe. 25. Quecksilberdichtungen. 26. Motoren. 27. Temperaturbäder. 28. Rührer. 29. Elektrische Heizung. 30. Luftverflüssigungsmaschine. 31. Kautschuk. 32. Dämpfer. 33. Aufstellung in unruhigen Gebäuden. 9. Herstellung von Lösungen. |
|---|---|

Wägung und Dichtigkeitsbestimmung.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 10. Wage und Wägung. 11. Empfindlichkeit einer Wage. 12. Verhältnis der Wagearme. 13. Absolute Wägung eines Körpers. Doppelwägung. Tarirung. Reduktion auf den leeren Raum. 14. Korrektionsstabelle eines Gewichtssatzes. 15. Dichtigkeit oder spezifisches Gewicht; Bestimmungsmethoden. | <ol style="list-style-type: none"> 16. Korrektion einer Dichtigkeitsbestimmung wegen Luftauftriebs und Temperatur. 17. Volumenometer. 18. Umrechnung d. Zustände v. Gasen. Berechnung der Dichtigkeit. 18a. Eudiometer. 19. Dampfdichte. 20. Gasdichte. Wägungs- und Ausströmungsmethode. |
|--|---|

Raummessung.

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 21. Längenmessung. Strichmaße. Kontaktmaße. Sphärometer. 22. Kathetometer. 22a. Ophthalmometer. 23. Bestimmung eines Hohlvolumens durch Auswägen. 24. Kalibrirung einer engen Glasröhre. | <ol style="list-style-type: none"> 25. Winkelmessung mit Spiegel und Skale. 26. Ableitung der Ruhelage aus Schwingungen. 27. Dämpfung und logarithmisches Dekrement. 27a. Bifilare Aufhängung. |
|--|--|

Zeitmessungen. Geographische Bestimmungen.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 28. Schwingungsdauer. | 32. Polhöhe. |
| 29. Trägheitsmoment. | 33. Zeitbestimmung aus Sonnenstand. |
| 29a. Messung sehr kurzer Zeiten. | 34. Gang einer Uhr. Festhalten einer absoluten Zeit. |
| 30. Astronomische Bezeichnungen. | 35. Gravitationskonstante. Schwebpendel. |
| 30a. Theodolit, Universalinstrument. | |
| 31. Meridiaurichtung eines Ortes. | |

Druck.

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 36. Druckmessung. Manometer. | 38. Barometrische Höhenmessung. |
| 37. Atmosphärisch. Druck. Barometer. | |

Wärme.

- | | |
|---|--|
| 39. Formen von Thermometern. Allgemeines. | interferenz und Wägung. Festigkeiten, Gase. |
| 40. Quecksilberthermometer. Eis- und Siedepunkt. Veränderlichkeit der Fixpunkte. Thermometrie mit steter Nullpunktsbestimmung. Herausragender Faden. Reduktion auf das Gas thermometer. | 45. Schmelz- oder Gefrierpunkt. |
| 41. Kalibrierung eines Thermometers. | 46. Siedepunkt. |
| 42. Gas- oder Luftthermometer. | 46a. Dampfspannung. |
| 43. Elektrische Temperaturmessung. Thermoelement. Widerstands-Thermometer („Bolometer“). | 47. Luftfeuchtigkeit (Hygrometrisches Verfahren. Wasserkalorimetrisches Verfahren. |
| 43a. Messung tiefer und hoher Temperaturen. Luftpyrometer. Elektrische Pyrometer. | 49. Spezifische Wärme; elektrische Methode. |
| 44. Wärme-Ausdehnungskoeffizient. Durch Längenmessung, Licht- | 49a. Spezifische Wärme; Erkaltmethode. |
| | 50. Eiskalorimeter. |
| | 50a. Dampfkalorimeter. |
| | 51. Andere kalorimetrische, kalische u. chemische Methoden. |
| | 51a. Wärmeleitvermögen. |

Elastizität und Schall.

- | | |
|--|--|
| 52. Elastizitätsmodul durch Ausdehnung. | 55a. Elastizitätszahl. Querkontraktion. |
| 53. Elastizitätsmodul aus Längsschwingungen. | 55b. Elastische Nachwirkung. |
| 54. Elastizitätsmodul durch Biegung. | 56. Wellenlängen. Schallgeschwindigkeit. |
| 55. Torsionsmodul. | 57. Absolute Schwingungszahl. Tones. |

Kapillarität und Reibung.

- | | |
|------------------------|---|
| 58. Kapillarkonstante. | 59. Reibungskoeffizienten. Flüssigkeiten. |
|------------------------|---|

Licht.

- | | |
|--|---|
| 59a. Lichtquellen. Spektrum. | 63a. Lichtbrechungsverhältnisse. Interferenz-Refraktor. |
| 60. Brechungsverhältnis n . Prismaspektrometer. Dispersion. Fraunhofer'sche Linien. Wellenlänge. | 63b. Schlierenmethode. |
| 61. Reflexionsgoniometer. | 64. Spektralanalyse. |
| 62. Brechungsverhältnis einer Platte mit dem Mikroskop. | 65. Lichtwellenlänge. |
| 63. Brechungsverhältnis aus totaler Reflexion. Totalreflektometer. Refraktometer. | 66. Krümmungshalbmesser. |
| | 67. Brennweite. |
| | 68. Vergrößerungszahl. Lupe, reehr. Mikroskop. |
| | 69. Polarisationswinkel eines Kristalls. |

- | | |
|--|---|
| 70. Polarisationsapparat. Untersuchung doppelbrechender Körper. Einaxige Kristalle. Zweiaxige Kristalle. Axenwinkel. | 71a. Erzeugung und Untersuchung elliptischen Lichtes. Babinet's Kompensator. Metallreflexion. |
| 71. Optisches Drehvermögen. Saccharimetrie. | 72. Photometrie. |
| | 72a. Wärmestrahlung. Schwarze Strahlung. |

Magnetismus.

- | | |
|---|---|
| 72b. Allgemeines. Stahlmagnete. Aufhängung. Astastrung etc. | 75. Vergleichung der Intensität an zwei Orten. |
| 73. Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus. Kompensiertes Magnetometer. Bismarmagnetometer. | 76. Magnetisches Moment. |
| 74. Zeitliche erdmagnetische Deklination- und Intensitätsschwankungen. | 76a. Temperaturkoeffizient c. Magnets. |
| | 76b. Polabstand eines Magnets. |
| | 77. Torsionsverhältnis. |
| | 78. Erdmagnetische Deklination. Magnetischer Theodolit. |
| | 79. Inklination. |

Elektricität. Galvanismus.

- | | |
|--|--|
| 80. Allgemeines über galvanische Arbeiten. Elektrische Einheiten. Ohm's - Kirchhoff'sche Gesetze. Stromerzeuger. Normalelemente. Stromverbindungen und Rheostaten. | 94. Widerstandsvergleichung durch Dämpfung. |
| 81. Absolute Strommessung. Tangen-Leuchtmass. | 94a. Sehr große Widerstände. Isolationsmessungen. |
| 82. Ampereschere. | 95. Kalibrierung eines Rheostaten oder eines Brückendrahtes. |
| 83. Spiegalg galvanometer. | 95a. Temperaturkoeffizient c. Leiters. |
| 84. Ballgalvanometer. | 95b. Quecksilberwiderstände. |
| 85. Elektrodynamometer. Elektrodynamische Waage. | 96. Leitvermögen von Elektrolyten. Äquivalentleitvermögen u. Ionenbeweglichkeit. Dissociation. |
| 86. Formen von Stromzweigern. Nadel-, Spulen-, Weicheisen-, Hitzdraht-Strommesser. | 96a. Konzentration einer Lösung aus ihrem Leitvermögen. Löslichkeit. |
| 87a. Bortelephon. Optisches Telephon. Vibrationsgalvanometer. | 97. Widerstand galvan. Elemente. |
| 88. Messung starker Ströme mit Abzweigung. | 98. Widerstand eines Galvanometers. |
| 89. Strommessung durch Elektrolyse. Voltmeter. | 99. Vergleichung elektromotorischer Kräfte oder Spannungen. Kompensationsverfahren. |
| 90. Strommessung durch Kompensation eines Normalelements. | 100. Elektromotorische Kraft in absolutem Maße. Spannungsmesser. |
| 91. Prüfung eines Strommessers. Empirische Bestimmung eines Reduktionsfaktors. | 101. Spannungsdifferenz im Schließungskreise. Klemmspannung. Messung großer Stromstärken mit dem Spannungsmesser. |
| 92. Widerstandsbestimmung durch Vertauschen. | 102. Universalgalvanometer und Torsionsgalvanometer. |
| 93. Widerstandsbestimmung durch Strommessung. | 103. Kompensationsapparat. |
| 94. Differentialgalvanometer. | 104. Beziehungen der elektrischen Spannung z. Chemie d. Lösungen. Konzentrationsspannung. Normalelektroden. Polarisation. Zersetzungsspannung. |
| 95. Wheatstone'sche Brücke. Brücke aus gleichen Widerstandsparen und Wheatstone-Kirchhoff'sche Drahtbrücke. Sehr kleine Widerstände. | 105. Bestimmung eines magnetischen Feldes durch Strommessung. |
| | 106. Windungsfläche c. Drahtspule. |
| | 107. Elektromagnetische Drehung des Lichtes. |

- | | |
|--|---|
| 108. Bewegungsgesetze eines schwingenden Körpers mit elektromagnetischer Dämpfung. | 116. Absolute Widerstandsmessung. Dämpfung. Erdinduktor. tironde Schreibe. Aus der Induktion zweier Stromleiter der Stromwärme. |
| 109. Messung kurz dauernder elektrischer Ströme oder entladener Elektrizitätsmengen. Ballistisches Galvanometer. | 117. Selbstinduktions-Koeffizient. |
| 110. Multiplikations- und Zurückwerfungsmethode. | 118. Gegenseitiger Induktions-Koeffizient. |
| 111. Erdinduktor. Hervorbringung bekannter Integrale von elektromotorischer Kraft. Inklination. | 119. Gleichstrom-Dynamomaschine. |
| 112. Magnetinduktor. | 120. Messungen an Wechselstrom. |
| 113. Induktions-Koeffizient e . Magnetstabes in schwachem Felde. | 121. Wechselstrom-Dynamomaschine. |
| 114. Bestimmung eines starken magnetischen Feldes. | 122. Transformatoren. |
| 115. Untersuchung magnetisierbaren | 123. Elektrische Lampen. |
| | 124. Geißler'sche Röhren. Kathodenstrahlen. |
| | 125. Hertz'sche Wellen. |

Elektrostatik.

- | | |
|---|--|
| 126. Allgemeines über elektrostatische Messungen. | 129. Eichung und Kalibrierung des Elektrometers. |
| 127. Messung von Potentialen. Elektrometer. Sinuselektrometer. Quadrantelektrometer, Kapillarelektrometer, andere Elektrometer. | 130. Elektrometrische Messung Spannung, Widerstand, Stromstärke und Stromleistung. |
| 128. Absolute Messung elektrostatischer Potentiale. Thomson'sches Elektrometer. Kirchhoff'sche Wage. Schlagweite. | 131. Elektrizitätsmenge eines Kondensators. Mit Elektromessflasche, Galvanometer, Thermometer. |
| | 132. Elektrostatische Kapazität. |
| | 133. Dielektrizitätskonstante. |

Das auf Länge, Masse und Zeit zurückgeführte „absolute“ Maßsystem mit Anschluß von Gesetzen und Erläuterungen.

Mechanische Einheiten.

- | | |
|---|---|
| 1. Fläche. 2. Raum. 3. Winkel. | 9b. Absolute Temperaturskala. |
| 4. Geschwindigkeit. 5. Beschleunigung. 6. Dichte. 7. Kraft. 8. Druck. | 10. Leistung. 11. Drehmoment. |
| 9. Arbeit, Energie. 9a. Wärmemenge. | 12. Trägheitsmoment. 13. Elastizitätsmodul. |

Elektrostatische Einheiten.

- | | |
|---|---|
| 14. Elektrizitätsmenge. 14a. Flächenendichte. 14b. Feldstärke. 14c. Kraftlinie. 15. Potential. 16. Kapazität. | 17. Dielektr.-Konst. 18. Stat. 18a. Widerstand. |
|---|---|

Magnetische Einheiten.

- | | |
|--|--|
| 19. Magnetpol. 19a. Flächenendichte. 20. Magnetisches Moment. 20a. Specif. Magnetismus, Magnetisierung. 21. Feldstärke. 22. Magnetisierungs- | Koeffizient. 22a. Permeabilität. 22b. Magnetische Induktion. Stromstärke, chemische Einheit. |
|--|--|

Elektromagnetische Einheiten.

- | | |
|--|--|
| 23. Stromstärke. 25. Elektrizitätsmenge. 26. Elektromotorische Kraft. Potential. 26a. Induktionsfluß. 27. Kapazität. 28. Induktions-Koeffizient, | elektrodynam. Potential. 29. Leitend. 30. Stromleistung. 31. arbeit, Stromwärme. |
|--|--|

Tabellen.

In-	Tab.
1. Korrektur einer Waagung auf den leeren Raum	22. Spektrallinien nach der Skale von Bunsen und Kirchhoff
2. Dichtigkeit fester und flüssiger Körper	23. Wellenlänge der wichtigsten Linien chemischer Elemente und des Sonnenspektrums, zurückgeführt auf $D_1 = 0,58960 \mu$
3. Dichtigkeit von Gläsern	24. Lichtbrechungsverhältnis einiger Körper und Drehung im Quarz
4. Prozentgehalt und spezifisches Gewicht wässriger Lösungen	24a. Brechungsverhältnis von Quarz, Fluspat, Steinsalz und Sylvit im sichtbaren, ultravioletten und ultravioletten Spektrum
5. Wässrige Normalösungen von 1gr. Äquiv./Liter: Gehalt, Dichtigkeit, elektrisches Leitvermögen und Wanderung der Ionen	25. Absorptionsvermögen von Kalkspat, Quarz, Fluspat, Sylvit, Steinsalz, Wasser, Wasserdampf und Kohlensäure
6. Dichtigkeit des Wassers und Volumen eines Glasgefäßes aus der Waagung mit Wasser	25a. Reflexionsvermögen von Metallen
7. Ausdehnung des Wassers von 0 bis 100°	26. Farben Newton'scher Ringe
8. Spezifisches Gewicht der trocknen atmosphärischen Luft von 0 bis 30° und von 760 bis 770 mm Barometerstand	27. Reduktion e. Schwingungsdauer auf kleine Schwingungswerte
9. Reduktion eines Gasvolumens auf 0° und 760 mm	28. Reduktion einer Beobachtung mit Spiegel und Skale
10. Reduktion der Barometerablesung auf 0°	29. Zur Reduktion von Beobachtungen gedämpfter Schwingungen
11. Mittlerer Barometerstand in verschiedenen Höhen	30. Elektrizitätsleitung e. Metalle
12. Kapillardepression des Quecksilbers	31. Elektrisches Leitvermögen wässriger Lösungen
13a. Ausdehnungskoeffizient wässriger Lösungen um 18°	32. Elektrochemische Äquivalente
14. Wärmeausdehnung, spezifische Wärme, Wärmeleitvermögen, Schmelzpunkt und Schmelzwärme fester Körper	33. Äquivalent - Leitvermögen von Elektrolyten in wässriger Lösung
15. Wärmeausdehnung, spezifische Wärme, Schmelzpunkt u. Siedepunkt von Flüssigkeiten	34. Ionen-Beweglichkeiten in verdünnter wässriger Lösung
16. Hygrometrische Tabelle u. Spannkraft des Wasserdampfes bis 90°	35. Dielektritäts-Konstanten
17. Spannkraft des Wasserdampfes zwischen 90° und 101°	36a. Schwach magnetische oder diamagnetische Körper
18. Siedepunkt des Wassers zwischen 80 und 760 mm Druck	37. Magnetisierbarkeit e. Eisensorten
19. Löslichkeit in Wasser	38. Erdmagnetische Horizontalintensität im mittleren Europa für 1902
20. Quecksilberthermometer u. Luftthermometer	39. Erdmagnetische Deklination im mittleren Europa für 1902
21. Absorption von Gasen in Wasser	40. Potential und elektrische Schlagweite
22. Dampfspannung und kritische Daten	41. Erdmagnetische Inklination im mittleren Europa für 1902
23. Elastizitätsmodul und Tragfähigkeit einiger Metalle	42. Dimensionen einiger Größenarten im absoluten Maßsystem nebst ihrem Maßverhältnis bei verschiedenen Grundeinheiten
24. Zusammendrückbarkeit u. innere Reibung von Flüssigkeiten	43. Chemische Atomgewichte
25. Reibungskoeffizient des Wassers	44. Schwerbeschleunigung an der Erdoberfläche
26. Tonhöhe und Schwingungszahl $n_1 = 435$	45. Geographische Lage und Höhe einiger Orte
	46. Deklination der Sonne, Zeitgleichung und Sternzeit für den mittleren Mittag

Zeitmessungen. Geographische Bestimmungen.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 28. Schwingungsdauer. | 32. Polhöhe. |
| 29. Trägheitsmoment. | 33. Zeitbestimmung aus Sonnenhöhe. |
| 29a. Messung sehr kurzer Zeiten. | 34. Gang einer Uhr. Festhalten einer absoluten Zeit. |
| 30. Astronomische Bezeichnungen. | 35. Gravitationskonstante. Sekundenpendel. |
| 30a. Theodolit, Universalinstrument. | |
| 31. Meridianrichtung eines Ortes. | |

Druck.

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 36. Druckmessung. Manometer. | 38. Barometrische Höhenmessung. |
| 37. Atmosphärisch. Druck. Barometer. | |

Wärme.

- | | |
|--|---|
| 39. Formen von Thermometern. Allgemeines. | interferenz und Wägung. Flüssigkeiten. Gase. |
| 40. Quecksilberthermometer. Eis- und Siedepunkt. Veränderlichkeit der Fixpunkte. Thermometrie mit steter Nullpunktsbestimmung. Herausragender Faden. Reduktion auf das Gasthermometer. | 45. Schmelz- oder Gefrierpunkt. |
| 41. Kalibrierung eines Thermometers. | 46. Siedepunkt. |
| 42. Gas- oder Luftthermometer. | 46a. Dampfspannung. |
| 43. Elektrische Temperaturmessung. Thermoelement. Widerstandsthermometer („Bolometer“). | 47. Luftfeuchtigkeit (Hygrometer). |
| 43a. Messung tiefer und hoher Temperaturen. Luftpyrometer. Elektrische Pyrometer. | 48. Spezifische Wärme; Mischungsverfahren. Wasserkalorimeter. |
| 44. Wärme - Ausdehnungskoeffizient. Durch Längenmessung, Licht- | 49. Spezifische Wärme; elektrische Methode. |
| | 49a. Spezifische Wärme; Erkaltungsmethode. |
| | 50. Eiskalorimeter. |
| | 50a. Dampfkalorimeter. |
| | 51. Andere kalorimetrische, physikalische u. chemische Messungen. |
| | 51a. Wärmeleitvermögen. |

Elastizität und Schall.

- | | |
|--|---|
| 52. Elastizitätsmodul durch Ausdehnung. | 55a. Elastizitätszahl. Querkontraktion. |
| 53. Elastizitätsmodul aus Längsschwingungen. | 55b. Elastische Nachwirkung. |
| 54. Elastizitätsmodul durch Biegung. | 56. Wellenlängen. Schallgeschwindigkeit. |
| 55. Torsionsmodul. | 57. Absolute Schwingungszahl eines Tones. |

Kapillarität und Reibung.

- | | |
|------------------------|-------------------------------------|
| 58. Kapillarkonstante. | 59. Reibungskoeffiziente. Flüssige. |
|------------------------|-------------------------------------|

Licht.

- | | |
|--|--|
| 59a. Lichtquellen. Spektrum. | 63a. Lichtbrechungsverhältnis mit Interferenz-Refraktor. |
| 60. Brechungsverhältnis e. Prismas. Spektrometer. Dispersion. Fraunhofer'sche Linien. Wellenlänge. | 63b. Schlierenmethode. |
| 61. Reflexionsgoniometer. | 64. Spektralanalyse. |
| 62. Brechungsverhältnis einer Planplatte mit dem Mikroskop. | 65. Lichtwellenlänge. |
| 63. Brechungsverhältnis aus totaler Reflexion. Totalreflektometer. Refraktometer. | 66. Krümmungshalbmesser. |
| | 67. Brennweite. |
| | 68. Vergrößerungszahl. Lupe. Fernrohr. Mikroskop. |
| | 69. Polarisationswinkel eines Körpers. |

- | | |
|---|--|
| 70. Polarisationsapparat. Untersuchung doppelbrechender Körper. Einaxige Krystalle. Zweiaxige Krystalle. Axenwinkel.
71. Optisches Drehvermögen. Saccharimetrie. | 71a. Erzeugung und Untersuchung elliptischen Lichtes. Babinet's Kompensator. Metallreflexion.
72. Photometrie.
72a. Wärmestrahlung. Schwarze Strahlung. |
|---|--|

Magnetismus.

- | | |
|--|---|
| 72b. Allgemeines. Stahlmagnete. Aufhängung. Astasirung etc.
73. Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus. Kompensirtes Magnetometer. Bifilarmagnetometer.
74. Zeitliche erdmagnetische Deklinations- und Intensitätsschwankungen. | 75. Vergleichung der Intensität an zwei Orten.
76. Magnetisches Moment.
76a. Temperaturkoefficient e. Magnets.
76b. Polabstand eines Magnets.
77. Torsionsverhältnis.
78. Erdmagnetische Deklination. Magnetischer Theodolit.
79. Inklination. |
|--|---|

Elektricität. Galvanismus.

- | | |
|---|---|
| 80. Allgemeines über galvanische Arbeiten. Elektrische Einheiten. Ohm - Kirchhoff'sche Gesetze. Stromerreger. Normalelemente. Stromverbindungen und Rheostaten.
81. Absolute Strommessung. Tangentenbusssole.
82. Sinusbusssole.
83. Spiegelgalvanometer.
83a. Bifilargalvanometer.
84. Elektrodynamometer. Elektrodynamische Wage.
85. Formen von Stromzeigern. Nadel-, Spulen-, Weicheisen-, Hitzdraht-Strommesser.
85a. Hörtelephon. Optisches Telephon. Vibrationsgalvanometer.
86. Messung starker Ströme mit Abzweigung.
87. Strommessung durch Elektrolyse. Voltameter.
88. Strommessung durch Kompensation eines Normalelements.
89. Prüfung eines Strommessers. Empirische Bestimmung eines Reduktionsfaktors.
90. Widerstandsbestimmung durch Vertauschen.
91. Widerstandsbestimmung durch Strommessung.
92. Differentialgalvanometer.
93. Wheatstone'sche Brücke. Brücke mit gleichen Widerstandspaaren und Wheatstone-Kirchhoff'sche Drahtbrücke. Sehr kleine Widerstände. | 94. Widerstandsvergleichung durch Dämpfung.
94a. Sehr große Widerstände. Isolationsmessungen.
95. Kalibrirung eines Rheostaten oder eines Brückendrahtes.
95 a. Temperaturkoefficient e. Leiters.
95 b. Quecksilberwiderstände.
96. Leitvermögen von Elektrolyten. Äquivalentleitvermög. u. Ionenbeweglichkeit. Dissociation.
96 a. Konzentration einer Lösung aus ihrem Leitvermögen. Löslichkeit.
97. Widerstand galvan. Elemente.
98. Widerstand eines Galvanometers.
99. Vergleichung elektromotorischer Kräfte oder Spannungen. Kompensationsverfahren.
100. Elektromotorische Kraft in absolutem Maße. Spannungsmesser.
101. Spannungsdifferenz im Schließungskreise. Klemmspannung. Messung großer Stromstärken mit dem Spannungsmesser.
102. Universalgalvanometer und Torsionsgalvanometer.
103. Kompensationsapparat.
104. Beziehungen der elektrischen Spannung z. Chemie d. Lösungen. Konzentrationsspannung. Normalelektroden. Polarisation. Zersetzungsspannung.
105. Bestimmung eines magnetischen Feldes durch Strommessung.
106. Windungsfläche e. Drahtspule.
107. Elektromagnetische Drehung des Lichtes. |
|---|---|

- | | |
|--|---|
| 108. Bewegungsgesetze eines schwingenden Körpers mit elektromagnetischer Dämpfung. | Materials. Magnetisierungscoefficient. Permeabilität. Induktion |
| 109. Messung kurz dauernder elektrischer Ströme oder entladener Elektrizitätsmengen. Ballistisches Galvanometer. | 116. Absolute Widerstandsmessung. Dämpfung. Erdinduktor. Rotirende Scheibe. Aus der Induktion zweier Stromleiter. Aus der Stromwärme. |
| 110. Multiplikations- und Zurückwerfungsmethode. | 117. Selbstinduktions-Koeffizient. |
| 111. Erdinduktor. Hervorbringung bekannter Integrale von elektromotorischer Kraft. Inklination. | 118. Gegenseitiger Induktions-Koeffizient. |
| 112. Magnetinduktor. | 119. Gleichstrom-Dynamomaschinen |
| 113. Induktions-Koeffizient e. Magnetstabes in schwachem Felde. | 120. Messungen an Wechselströmen |
| 114. Bestimmung eines starken magnetischen Feldes. | 121. Wechselstrom-Dynamomasch. |
| 115. Untersuchung magnetisierbaren | 122. Transformatoren. |
| | 123. Elektrische Lampen. |
| | 124. Geißler'sche Röhren. Kathodenstrahlen. |
| | 125. Hertz'sche Wellen. |

Elektrostatik.

- | | |
|---|--|
| 126. Allgemeines über elektrostatische Messungen. | 129. Eichung und Kalibrirung eines Elektrometers. |
| 127. Messung von Potentialen. Elektrometer. Sinuselektrometer, Quadrantelektrometer, Kapillarelektrometer, andere Elektrometer. | 130. Elektrometrische Messung von Spannung, Widerstand, Stromstärke und Stromleistung. |
| 128. Absolute Messung elektrostatischer Potentiale. Thomson'sches Elektrometer. Kirchhoff'sche Wage. Schlagweite. | 131. Elektrizitätsmenge eines Kondensators. Mit Elektrometer, Maßflasche, Galvanometer, Luftthermometer. |
| | 132. Elektrostatische Kapazität. |
| | 133. Dielektritätskonstante. |

Das auf Länge, Masse und Zeit zurückgeführte „absolute“ Maßsystem mit Anschluß von Gesetzen und Erläuterungen.

Mechanische Einheiten.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. Fläche. 2. Raum. 3. Winkel. | 9b. Absolute Temperaturskala. 10 |
| 4. Geschwindigkeit. 5. Beschleunigung. 6. Dichte. 7. Kraft. 8. Druck. | Leistung. 11. Drehmoment. 11a |
| 9. Arbeit. Energie. 9a. Wärmemenge. | Direktionskraft. 12. Trägheitsmoment |
| | 13. Elastizitätsmodul. |

Elektrostatische Einheiten.

- | | |
|---|--------------------------------|
| 14. Elektrizitätsmenge. 14a. Flächendichte. 14b. Feldstärke. 14c. Kraftlinie. 15. Potential. 16. Kapazität. | 17. Dielektr.-Konst. 18. Strom |
| | 18a. Widerstand. |

Magnetische Einheiten.

- | | |
|--|--|
| 19. Magnetpol. 19a. Flächendichte. 20. Magnetisches Moment. 20a. Specif. Magnetismus, Magnetisirung. Feldstärke. 22. Magnetisirungs- | Koeffizient. 22a. Permeabilität. 22b. Magnetische Induktion. 25. Stromstärke, chemische Einheit. |
|--|--|

Elektromagnetische Einheiten.

- | | |
|--|--|
| 24. Stromstärke. 25. Elektrizitätsmenge. 26. Elektromotorische Kraft. Potential. 26a. Induktionsfluß. 27. Kapazität. 28. Induktions-Koeffizient, | elektrodynam. Potential. 29. Leitungswiderstand. 30. Stromleistung, Stromarbeit, Stromwärme. |
|--|--|

Tabellen.

Tab.	Tab.
1. Korrektur einer Wägung auf den leeren Raum.	22. Spektrallinien nach der Skale von Bunsen und Kirchhoff.
2. Dichtigkeit fester und flüssiger Körper.	23. Wellenlänge der wichtigsten Linien chemischer Elemente und des Sonnenspektrums, zurückgeführt auf $D_1 = 0,58960 \mu$.
2a. Dichtigkeit von Gasen.	24. Lichtbrechungsverhältnis einiger Körper und Drehung im Quarz.
3. Procentgehalt und spezifisches Gewicht wässriger Lösungen.	24a. Brechungsverhältnis von Quarz, Flußspat, Steinsalz und Sylvin im sichtbaren, ultraroten und ultravioletten Spektrum.
3a. Wässrige Normallösungen von 1gr-Äquiv./Liter: Gehalt, Dichtigkeit, elektrisches Leitvermögen und Wanderung der Ionen.	25. Absorptionsvermögen von Kalkspat, Quarz, Flußspat, Sylvin, Steinsalz, Wasser, Wasserdampf und Kohlensäure.
4. Dichtigkeit des Wassers und Volumen eines Glasgefäßes aus der Wägung mit Wasser.	25a. Reflexionsvermögen von Metallen.
5. Ausdehnung des Wassers von 0 bis 100°.	26. Farben Newton'scher Ringe.
6. Spezifisches Gewicht der trocknen atmosphärischen Luft von 0 bis 30° und von 700 bis 770 mm Barometerstand.	27. Reduktion e. Schwingungsdauer auf kleine Schwingungsweite.
7. Reduktion eines Gasvolumens auf 0° und 760 mm.	28. Reduktion einer Beobachtung mit Spiegel und Skale.
8. Reduktion der Barometerablesung auf 0°.	29. Zur Reduktion von Beobachtungen gedämpfter Schwingungen.
9. Mittlerer Barometerstand in verschiedenen Höhen.	30. Elektrizitätsleitung e. Metalle.
10. Kapillardepression des Quecksilbers.	31. Elektrisches Leitvermögen wässriger Lösungen.
10a. Ausdehnungskoeffizient wässriger Lösungen um 18°.	32. Elektrochemische Äquivalente.
11. Wärmeausdehnung, spezifische Wärme, Wärmeleitvermögen, Schmelzpunkt und Schmelzwärme fester Körper.	33. Äquivalent - Leitvermögen von Elektrolyten in wässriger Lösung.
12. Wärmeausdehnung, spezifische Wärme, Schmelzpunkt u. Siedepunkt von Flüssigkeiten.	34. Ionen-Beweglichkeiten in verdünnter wässriger Lösung.
13. Hygrometrische Tabelle u. Spannkraft des Wasserdampfes bis 90°.	36. Dielektricitäts-Konstanten.
14. Spannkraft des Wasserdampfes zwischen 90° und 101°.	36a. Schwach magnetische oder diamagnetische Körper.
14a. Siedepunkt des Wassers zwischen 680 und 780 mm Druck.	37. Magnetisierbarkeit e. Eisensorten.
15. Löslichkeit in Wasser.	38. Erdmagnetische Horizontalintensität im mittleren Europa für 1902.
16. Quecksilberthermometer u. Luftthermometer.	39. Erdmagnetische Deklination im mittleren Europa für 1902.
17. Absorption von Gasen in Wasser.	35. Potential und elektrische Schlagweite.
18. Dampfspannung und kritische Daten.	40. Erdmagnetische Inklination im mittleren Europa für 1902.
19. Elastizitätsmodul und Tragfähigkeit einiger Metalle.	41. Dimensionen einiger Größenarten im absoluten Maßsystem nebst ihrem Maßverhältnis bei verschiedenen Grundeinheiten.
20. Zusammendrückbarkeit u. innere Reibung von Flüssigkeiten.	42. Chemische Atomgewichte.
20a. Reibungskoeffizient des Wassers.	43. Schwerbeschleunigung an der Erdoberfläche.
21. Tonhöhe und Schwingungszahl $a_1 = 435$).	44. Geographische Lage und Höhe einiger Orte.
	45. Deklination der Sonne, Zeitgleichung und Sternzeit für den mittleren Mittag.

Tab.	Tab.
46. Korrektionsstab. f. d. Jahresanfang.	51. Quadrate. Quadratwurzeln. Kubikwurzeln. Verwandlung von Bogengraden in absolutes Winkelmaß.
47. Halbmesser der Sonne.	52. Tafel z. Wheatstone'schen Brücke
48. Astronomische Strahlenbrechung.	53. Vierstellige Logarithmen.
49. Mittlere Örter einiger Fixsterne für 1900,0.	54. Trigonometrische Zahlen.
50. Verschiedene Zahlen.	

Im gleichen Verlage erschien:

F. Kohlrausch, kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren [XIX u. 260 S.] gr. 8. 1899. In Leinw. geb. n. *M* 4.—

In dem „kleinen Leitfaden“ soll ein Buch geboten werden, welches in den physikalischen Übungen den Zwecken der meisten Praktikanten, z. B. der Chemiker, Mineralogen, Mediziner, Pharmazeuten, genügt. Es schließt sich in der Anordnung dem „Lehrbuch der praktischen Physik“ an, um bequem neben diesem gebraucht werden zu können. Den Anweisungen zur Arbeit, die durch zahlreiche Figuren erläutert werden, ist in der Regel eine kurze Erörterung über das Wesen der Aufgabe vorausgeschickt.



Bestell-Zettel.

Bei der

Buchhandlung in

bestelle ich hiermit ein Exemplar des im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig soeben erschienenen Werkes [zur Ansicht]:

Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik.

9. umgearb. Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. 1901. In Leinwand geb. n. *M* 8.60.

— kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 1899. In Leinwand geb. n. *M* 4.—

Unterschrift:

Ort, Datum, Wohnung:

Das Nichtgewünschte bitte zu durchstreichen.



November 1902.

Neuester Verlag:

Dr. E. Bardey's
methodisch geordnete
Aufgabensammlung,

mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der
Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Real-
gymnasien und Oberrealschulen.

Dr. E. Bardey's
arithmetische Aufgaben
nebst Lehrbuch der Arithmetik,
vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Pro-
gymnasien und Realgymnasien.

Neubearbeitungen von
Prof. Pietzker und Prof. Presler
am Gymnasium zu Nordhausen a. d. Oberrealsch. zu Hannover.



**Dr. E. Bardey, methodisch geordnete Aufgaben-
sammlung**, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der
Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien
und Oberrealschulen. In alter und neuer Ausgabe. Neue Aus-
gabe. [VII u. 376 S.] gr. 8. 1902. Dauerhaft geb. M. 3.20

**Dr. E. Bardey, arithmetische Aufgaben nebst Lehr-
buch der Arithmetik**, vorzugsweise für höhere Bürgerschulen,
Realschulen, Progymnasien und Realgymnasien. In alter und
neuer Ausgabe. Neue Ausgabe. [VIII u. 314 S.] gr. 8. 1902.
Dauerhaft geb. M. 2.60.

Neubearbeitungen von Prof. Dietzker und Prof. Presler

Die altbewährten Aufgabensammlungen von Dr. E. Bardey sind
nach dem Tode des Verfassers durch Professor Dietzker in Nord-
hausen und Professor Presler in Hannover einer durchgreifenden
Neubearbeitung unterzogen worden, bei der die Bearbeiter bemüht
gewesen sind, den gegenwärtig in den Fachkreisen erhobenen Forderungen
sowohl wie auch den Vorschriften der neuesten Lehrpläne in weit-
gehender Weise gerecht zu werden. Bei beiden Büchern, von denen
inzwischen das für den Gebrauch an Vollanstalten bestimmte bereits
in zweiter Auflage erschienen ist, hat die Neubearbeitung, in der auch
die neue Rechtschreibung schon vorkommt, in den Fachzeitschriften
durchweg eine sehr günstige Beurteilung erfahren; ein Auszug aus
den bisher erschienenen Besprechungen folgt weiterhin.

Was die Einzelheiten der Neubearbeitung betrifft, so hat ins-
besondere die Zahl der eingekleideten Aufgaben überall eine
erhebliche Vermehrung erfahren, die z. B. in dem Abschnitt über
kubische Gleichungen, der bisher keinerlei eingekleidete Aufgaben ent-
hielt, sich allein auf 33 beläuft. Die neuen Aufgaben sind den ver-
schiedensten Gebieten der Physik und Chemie, der Mechanik, der
mathematischen und physikalischen Geographie, der Geometrie und
mannigfachen Verhältnissen des praktischen Lebens entlehnt. In der
Geometrie haben neben allen Zweigen der elementaren Planimetrie
und Stereometrie namentlich auch die Kegelschnitte eine ausgiebige
Verwendung gefunden. Überall, namentlich bei den Aufgaben über
Verhältnisse des praktischen Lebens ist auf eine der wirklichen Sach-
lage möglichst angepasste Einkleidung besonderer Wert gelegt worden.
Besonders dem Abschnitt über Zinseszins- und
Rentenrechnung eine erhebliche Erweiterung, u. a. durch Hinzunahme
einer Reihe von Aufgaben, die zur Einführung in die Versicherung-
rechnung dienen, zu teil geworden.

Die Wiedereinführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in das Unterrichtsspensum hat eine Umarbeitung des einschlägigen Abschnitts zur Folge gehabt, bei der, unter Berücksichtigung gewisser bisher wenig oder gar nicht zur Geltung gekommener Gesichtspunkte, eine Vermehrung der Aufgaben um mehr als die Hälfte eingetreten ist.

Die Theorie der reziproken Gleichungen und die der kubischen Gleichungen haben eine vollständigere und schärfere Fassung erhalten, der Anhang über Berechnung der Logarithmen durch unendliche Reihen ist durch Hinzunahme der Reihen für die Exponentialfunktion, die Funktion sinus, cosinus, arctg und die Zahl π erweitert und durch Berücksichtigung der Konvergenzbedingungen zu einem abgeschlossenen Ganzen gestaltet worden.

Für den durch die neuesten Lehrpläne vorgeschriebenen wiederholenden Aufbau des arithmetischen Lehrganges (Erweiterung des Zahlenbegriffes durch die algebraischen Operationen von der ganzen positiven bis zur komplexen Zahl) ist durch Herstellung eines engeren Zusammenhanges zwischen den einzelnen hierbei in Betracht kommenden Abschnitten eine brauchbare, den weitestgehenden Anforderungen gerecht werdende Grundlage geschaffen worden; zur Erleichterung des Verständnisses dienen einige Figuren.

Auszüge aus den Besprechungen.

Hann. Courier.

Jedenfalls sind die mathematischen Kollegen den Herren Verfassern aufrichtigen Dank schuldig für das gelungene schwierige Werk, auf den alten Stamm frische Reiser zu pflanzen, Wildlinge auszumerzen und doch Stamm und Mark nicht zu verletzen.

Mögen die Bücher allenthalben die verdiente Anerkennung und Verbreitung finden.

Chemnitz.

Oberlehrer Dr. Paul Domsch.

Zeitschrift für lateinlose höhere Schulen.

Was die Erläuterungen anbetrifft, so ist das Streben der Bearbeiter nach wissenschaftlicher Strenge und Klarheit, sowie nach Einfachheit und Kürze, welche vom pädagogisch-didaktischen Standpunkte zu verlangen sind, nicht nur überall erkennbar, sondern es ist ihnen auch in seltenem Maße gelungen, beides miteinander zu verbinden.

Ich schließe mit dem Wunsche, daß der überaus sorgfältigen und mühevollen Arbeit der Herausgeber die Anerkennung nicht fehlen möge, auf die sie in der That berechtigten Anspruch hat.

Düsseldorf.

Oberlehrer Dr. Berghoff.

Zeitschrift für mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von Hoffmann.

Die neuen Bücher kommen in hinreichendem Maße der berechtigten Forderung nach, daß im mathematischen Unterricht die Anwendung auf die

Einführungen von Dr. E. Bardeys Aufgabenfammlungen,
soweit der Verlagsbuchhandlung bekannt geworden ist, an folgenden Anstalten:

Zeichen-Erklärung:

G = Gymnasium
RG = Realgymnasium
PG = Progymnasium
RPG = Realprogymnasium
ORS = Oberschule
RS = Realschule
Sem = Seminar

HKaS = Höhere Knabenschule
HBS = Höhere Bürgerschule
Priv.-PG = Privat-Progymnasium
MS = Mittelschule
Landw. Sch. = Landwirtschaftliche Schule

Pädag. = Pädagogium
Rekt.-Sch. = Rektoratschule
HaS = Handelsschule
Gew.-Sch. = Gewerbeschule
LatS = Lateinschule
HMS = Höhere Mädchenschule
Geb. Sch. = Gehobene Schule

I. Preußen:

Provinz Ostpreußen.

Allenstein G
Gumbinnen G, RPG

Insterburg G
Königsberg 2 G, RG

Pr. Holland HKaS
Sinn

Provinz Westpreußen.

Berent PG
Culm G
Deutsch-Krone G, RG
Elbing G, ORS
Pr. Friedland Sem

König G
Kobau PG
Martenburg G
Neumark PG
Neußadt G

Neuenburg RPG
Schwetz/W. PG
Strasburg G
Thorn G
Tirgenhof RS

Provinz Brandenburg.

Menswalde RS
Berlin 9 G, 3 RG, 1 ORS,
RS I—XII
Brandenburg G (Ritter-
Akademie)
Charlottenburg RG, ORS, RS
Eberswalde G
Forst RPG
Friedenau G
Friedeberg G
Grenzlichterfelde G, RS
Havelberg RPG

Koepenitz RS
Kottbus G, RS
Küstenwalde RPG
Neu-Ruppin G
Pantow RS
Rathenow RPG
Rixdorf RS
Schöneberg G (Prinz Heinrich)
Soran G
Spandau G
Spremberg RPG, RS
Steglig G

Wittenberge RS
Züllichau G
Angermünde PrKaS
Berlin Mädchen-G, Mädchen-
Mitt. Pädag., Handelsschule
Krieg Sem
Königsauerhausen HKaS
Grenzlichterfelde, Institut
Soldin HBS
Templin, Privatschule
Zossen, Pädag.

Provinz Pommern.

Belgard G
Demmin G
Dramburg G
Greifswald G
Greifswald G
Kolberg G
Köslin G

Neustettin G
Pasewalk PG
Putbus G
Pyritz G
Schlawe PG
Stargard G
Stettin G (Stadt)

Stolp G
Stralsund RG
Treptow G
Wolgast RPG

Gollnow HKaS
Zwinnende, Oberschule

Provinz Posen.

Bromberg G, RG, Sem
Egin G
Fraustadt G
Gnesen G
Kempen PG
Rafel G
Posen 3 G

Bawitsch G
Bogasen G
Schlawe PG
Schrimm G
Wongrowitz G

Egin HKaS
Grag HKaS
Schmerin HKaS
Wollstein HKaS

Momente deutlicher und schärfer markierend, hier durch Form oder Inhalt fast wertlose Aufgaben ausmerzend, dort im Sinne einer gesunden Konzentration Aufgaben aus den verschiedensten Unterrichtszweigen einschleibend.

Beide Schulbücher lassen sich ganz gut neben den alten gebrauchen; doch ist von der Einsicht der Herren Fachlehrer zu hoffen, daß bald, den Forderungen der Gegenwart entsprechend, die immer lauter Einlaß in die Schulen begehren, nur noch diese Neubearbeitungen in Gebrauch genommen werden, zumal zu dem Übergange eine behördliche Genehmigung nicht erforderlich erscheint.

Quedlinburg.

Oberlehrer Habenicht.

Südwestdeutsche Schulblätter.

Zunächst ist zu begrüßen, daß überall Fragen, die vom Schüler ohne Anleitung gar nicht zu beantworten waren, durch andere ersetzt sind, die eine Antwort von seiten des Schülers vernünftigerweise erwarten lassen und dabei geeignet sind, ihn in den Gegenstand einzuführen. Aufgaben, die wegen ihrer Schwierigkeit praktisch wohl nie zu verwerten sind, wurden gestrichen, namentlich bei den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Ebenso sind gestrichen viele eingekleidete Aufgaben, die der Wirklichkeit widersprechen, bei einer großen Anzahl wurde die Einkleidung den realen Verhältnissen angepasst; die Zahlenangaben von vielen Einkleidungen, die den Verhältnissen des bürgerlichen Lebens entnommen sind, wurden entsprechend den seitdem geänderten Verhältnissen umgerechnet.

Für die ausgefallenen Aufgaben sind andere, insbesondere auch aus Geometrie (Planimetrie und Stereometrie), Physik u. getreten.

Was die gesamte Einteilung anlangt, so sind erfreulicherweise als neue Abschnitte zu verzeichnen: Abschnitt XXV B über Gleichungen höheren Grades, die als quadratische Gleichungen gelöst werden können, Abschnitt XXIX B über Maxima und Minima, ferner Abschnitt XXXIII B über arithmetische und geometrische Reihen. Abschnitt XXXVIII über kubische Gleichungen wurde durch Anwendungen vergrößert und Abschnitt XXXIII über Zinseszins- und Renten-Rechnung erhielt ein Schlusskapitel über Versicherungswesen mit Beispielen.

Außer diesen großen Verdiensten der Bearbeiter für den inneren Wert des Buches sei noch erwähnt, daß durch jeweilige Angabe der bisherigen Nummerierung der Aufgaben der Nebeneinandergebrauch der alten und neuen Bearbeitung ermöglicht ist. Auch die vielfach vorgenommene Verbesserung des sprachlichen Ausdrucks ist zu loben. Jedenfalls dürfen die Bearbeiter ihre Hoffnung, daß die Neuausgabe in den beteiligten Kreisen als eine Verbesserung beurteilt werden wird, als erfüllt betrachten.

Was speziell die 2. Auflage der Neuausgabe von der ersten unterscheidet, und — abgesehen von kleineren Verbesserungen und Abänderungen, z. B. Einfügung von 2 Musterfiguren im Anhang 4 (Graphische Darstellungen) — Änderungen, welche durch die neuen, im vergangenen Jahre eingeführten preussischen Lehrpläne unbedingt geboten erschienen. Die eine dieser Änderungen hat den Zweck, für den durch diese Pläne dem Pensum der Prima neu einseitigen wiederholenden Aufbau des arithmetischen Lehrganges die wünschenswerten Unterlagen zu beschaffen; zu diesem Behuf mußten die Einleitungen zu den Abschnitten V (Relative Größen), VII (Division), XIII (Irrationale Größen) teilweise, die zum Abschnitt XVII (Imaginäre Größen) in etwas größerem Umfange umgearbeitet und zu einander in Beziehung gesetzt werden. Die zweite Änderung betrifft die jetzt dem preussischen Lehrplan wieder eingefügten Kapitel „Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung“. Insbesondere erhielt infolgedessen Abschnitt XXXV eine teilweise Umgestaltung des einleitenden Textes und des Aufgabenmaterials, sowie eine bedeutende Vermehrung der Aufgaben.

Die Ausstattung der Neubearbeitung ist in jeder Hinsicht zufriedenstellend.

Karlsruhe.

Holzmann.

Einführungen von Dr. E. Bardeys Aufgabenammlungen,
soweit der Verlagsbuchhandlung bekannt geworden ist, an folgenden Anstalten:

Zeichen-Erklärung:

G = Gymnasium
RG = Realgymnasium
PG = Progymnasium
RPG = Realprogymnasium
ORS = Oberrealschule
RS = Realschule
Sem = Seminar

HKaS = Höhere Knabenschule
HBS = Höhere Bürgerschule
Priv.-PG = Privat-Progymnasium
MiS = Mittelschule
Landw. Sch. = Landwirtschaftliche Schule

Pädag. = Pädagogium
Rekt.-Sch. = Rektoratschule
HaS = Handelschule
Gew.-Sch. = Gewerbeschule
LatS = Lateinschule
HMS = Höhere Mädchenschule
Geb. Sch. = Gelehrente Schule

I. Preußen:

Provinz Ostpreußen.

Allenstein G
Gumbinnen G, RPG

Insterburg G
Königsberg 2 G, RG

Dr. Holland HKaS
Sinn

Provinz Westpreußen.

Berent PG
Culm G
Deuffsch-Krone G, RG
Elbing G, ORS
Dr. Friedland Sem

König G
Köbau PG
Marienburg G
Neumark PG
Neußadt G

Riesenburg RPG
Schweg./W. PG
Strasburg G
Thorn G
Tiegenhof RS

Provinz Brandenburg.

Arnswalde RS
Berlin 9 G, 3 RG, 1 ORS,
RS I—XII
Brandenburg G (Ritter-
Akademie)
Charlottenburg RG, ORS, RS
Eberswalde G
Forst RPG
Friedenau G
Friedeberg G
Gr.-Lichterfelde G, RS
Havelberg RPG

Koepenick RS
Kottbus G, RS
Kudenwalde RPG
Neu-Ruppin G
Pankow RS
Rathenow RPG
Rixdorf RS
Schöneberg G (Prinz Heinrich)
Soran G
Spandau G
Spremberg RPG, RS
Steglitz G

Wittenberge RS
Zällkau G
Angermünde PrKaS
Berlin Mädchen-G., Mitt.
Mil. Pädag., Handelssch.
Krieg Sem
Königs-Wusterhausen HKaS
Gr.-Lichterfelde, Jussim
Soldin HBS
Templin, Privatschule
Zossen, Pädag.

Provinz Pommern.

Belgard G
Demmin G
Dramburg G
Greifenberg G
Greifswald G
Kolberg G
Köslin G

Neustettin G
Pasewalk PG
Putbus G
Pyritz G
Schlawe PG
Stargard G
Stettin G (Stadt)

Stolp G
Stralsund RG
Treptow G
Wolgast RPG
Gollnow HKaS
Swinemünde, Oberschule

Provinz Posen.

Bromberg G, RG, Sem
Erin G
Fraustadt G
Gnesen G
Kempen PG
Naki G
Posen 3 G

Rawitsch G
Rogosen G
Schlawe PG
Schrimm G
Wengrowitz G

Erin HKaS
Graz HKaS
Schwefin HKaS
Wollstein HKaS

Waldenburg G
Wohlan G

Breslau, Maschinenbaukschule,
Pröp.-2nfr.
Cöfel, Pädag.
Cörlitz, Baugewerkschule
Hirschberg, MiS, Inspit. Sutter
Jauer, Handelschule
Kattfcher, Pädag.
Köhn, Pädag.
Kriebau, Pädag.
Muskau, Pädag.
Reichenbach, Pröp.-2nfr.
Carnowitz, Bergschule

Zeig G

Deersheim, Privatschule
Dingelsbdt, Reft.=Sch.
Erfurt HaS
Hettstadt HKnS
Nordhausen MiS
Stauffurg, Höh. Stadtschule
Tangermünde HKnS

Segeberg RPG
Wandsbeck G

Baneran, Erzieh.-Anstalt
Hohenwestedt HKnS
Wesselsburen HKnS

Wunstorf Sem

Bramsche, Höh. Stadtschule
Brumeröder MiS
Diffen, Reft.-Sch.
Freiburg, Reft.-Sch., Priv.-Sch.
Hannover, Hilpert's Institut,
Gildemeisters Instit., Reuters
Instit., Kersens jüd. Lehrz.-
Instit., Jüd. Sem., Hand-
werker- u. Kunstgewerbesch.
Melle, Pröp.-Sch.
Sulingen, Geh.-Sch.
Werner, Latrin.-Sch.
Wilhelmshaven MiS

Gerndorf Seletta
Gesecke, Reth.=Sch.
Herten, Reth.=Sch.
Hombruch=Barop, Reth.=Sch.
Känen, Reth.=Sch.
Schalksmühle, Reth.=Sch.
Schwerte, Reth.=Sch.
Wadersloh, Reth.=Sch.
Weidenan, Reth.=Sch.

Friedrichsdorf, Instit. Garnier
St. Goarshausen, Instit. Hofmann
Königsstein HKnS
Langen HBS
Schotten HBS

Rheinprovinz.

Barmen RG, RS
 Bedburg G
 Bonn 2 G, ORS
 Boppard G, PG
 Cleve G
 Coblenz G, RG
 Diez RS
 Duisburg RG
 Dören ORS
 Elberfeld, G, RG, ORS, RS
 St. Johann ORS
 Kall PG
 Kreuznach G
 Langenberg RPG

Kennep RPG
 Neuwied G
 Ottweiler Sem
 Prüm G
 Saarbrücken ORS
 Solingen PG
 Trier G
 Weiden G
 Wesel G
 Weylar G

Bendorf HBS
 Calcar HKaS
 Cleve, Landw.-Sch.

Elberfeld, Höh. Masch.-Bauz.
 Inst. Soder
 Garsdonk, Priv.-Anst.
 Godesberg, Pädag.
 Herchen, Pädag.
 Kehl, Helt.-Sch.
 Kira, Höh. Stadtschule
 Königswinter HKaS
 Meiderich HKaS
 Neuwied, Erz.-Anst. d. Bräuer
 Gemeinde
 Wermelskirchen, Höh. Stadtsch.
 Wülfrath, HBS

II. Mitteldeutsche Staaten:**Sachsen (Königr.).**

Annaberg RG, Sem
 Aue RS
 Auerbach Sem
 Bangen G, RS, Sem
 Borna RG
 Chemnitz G, Techn. Staatslehr-
 anstalten, RS
 Crimmitschau RS
 Döbeln RG
 Dresden 4 G, 1 RG, 5 RS
 Frankenberg RG, Sem
 Freiberg G, RS
 Glauchau RS

Grimma G, RS, Sem
 Großenhain RS
 Leipzig 1 G, 5 RS, HS
 Köbau RS
 Meerane RS
 Mittweida RS
 Oelsnitz RS
 Oschatz RS
 Pirna RS, Sem
 Plauen i. V. RS, G
 Reichenbach RS
 Rochlitz RS, Sem
 Schneeberg G, Sem

Stollberg RS
 Waldenburg Sem
 Weiden RS
 Zittau G
 Zschopau Sem
 Zwickau G, RG
 Chemnitz HaS
 Dresden, Chamors Erz.-Anst.
 Leipzig, Mädchen-G
 Mittweida, Technikum
 Radeberg HKaS
 Schneeberg, Gew.-Sch.

Braunschweig.

Braunschweig 2 G, RG
 Gandersheim RPG
 Helmstedt G

Holzminden G
 Serren RS
 Wolfenbüttel G, 2 RS

Ballenstedt, Priv.-Inst.
 Braunschweig, Priv.-Inst.

Anhalt.

Bernburg G, RG
 Dessau G

Köthen G, Sem
 Zerbst G

Altenburg G, RG
 Arnoldsburg RPG
 Baderburg G
 Detmold G
 Eisenach RG
 Frankenhäusen RPG
 Gotha G, RS
 Greiz G, Sem
 Jülmann RS

Koburg RS, Sem
 Lemgo G
 Neustadt a/O RS
 Pögnitz RS
 Pyrmont, Pädag.
 Rudolfsburg G
 Salza RS
 Sondershausen G, RS, Sem
 Weida RS

Weimar G
 Wildungen RS
 Greußen, Lat.-Sch.
 Hamperda, Erzieh.-Anst.
 Kellhan, Erzieh.-Anst.
 Königstein i. C. HKaS
 Stadthagen HBS

III. Norddeutsche Staaten:**Mecklenburg-Schwerin, Mecklenburg-Strelitz, Oldenburg.**

Dobran G
 Grabow RPG
 Jever G
 Neubrandenburg G, RS
 Neustadt G, RS

Oberstein-Idar RS
 Oldenburg G, ORS
 Parchim G
 Rostock G, RG
 Teterow RS

Waren G
 Wismar G
 Bagenow HBS
 Neubrandenburg MS
 Stavenhagen HKaS

Freie Städte.

Albed G, RG, 3 RS
 Bremen G, ORS, 2 RS, HaS,
 Sem
 Bergedorf RS

Capbaren RS
 Hamburg 2G, RG, 13RS, 1Sem
 Rostock RS (Panzin.)

Bremen, Milit.-Vorber.
 Inst. Minerva

IV. Süddeutsche Staaten:

Bayern.

Limberg G
 Bamberg 2 G
 Bayreuth RS
 Bistelsfeld PG
 Donnersberg b. Mannheim RS
 Freising G
 Jach G
 Bernersheim PG
 Somburg/Pf. LatS

St. Ingbert PG
 Kitzingen PG
 Kulmbach RS
 Landsbut G
 Lindau PG, RS
 Kofe G
 Metten G
 Miltenberg LatS
 München G (Eutpolb)

Neustadt a/S. G
 Neu-Ulm RS
 Orlaufens PG
 Schweinfurt G
 Traunstein RS
 Zweibrücken G

Frankenthal, Lehrinstitut
 Gars, Studienanstalt

Württemberg.

Beilfingen, Beallpgram
 Biberach RS
 Cannstatt G
 Eningen G
 Emsingen G
 Esslingen G
 Schw. Omund RG, Sem
 Pöppingen RS

Schw. Hall G, RS
 Heilbronn G, RS
 Kronthal G
 Ludwigsburg G
 Oehringen G
 Ravensburg G, RS
 Reutlingen G
 Rottenburg LatS

Rottweil G, RS
 Stuttgart G (Karls)
 Tübingen G, RS
 Ulm G, RG

Stuttgart HaS, Baugew.-Sch.,
 Mübden-G
 Wilhelmsdorf, Kn.-Penf.

Baden.

Loben HBS
 Baden G, ORS
 Bruch G
 Bruch HBS
 Bruchthal G
 Bruch HBS
 Bruchthal PG
 Bruchthal PG
 Bruchthal HBS
 Bruchthal HBS
 Bruchthal RPG
 Bruchthal Sem
 Bruchthal G, ORS
 Bruchthal G
 Karlsruhe G, ORS, Sem

Kenzingen HBS
 Kitzingen G, ORS
 Kitzingen RS, G
 Kitzingen G, RS
 Kitzingen RS, LatS
 Kitzingen G
 Kitzingen RG, ORS
 Kitzingen RS
 Kitzingen RS
 Kitzingen, Pdb.
 Kitzingen RG
 Kitzingen G, ORS, HHaS
 Kitzingen G
 Kitzingen HBS
 Kitzingen HBS

Schopfheim RS
 Landerbachshofheim G
 Heberlingen RS
 Dillingen RS
 Waldshut HBS
 Weinheim RPG
 Wertheim G
 Wiesloch HBS

Baden HMS
 Karlsruhe, Instit. frecht
 Waldkirch, Pdbns Erz.-Anst.
 Weinheim, Höh. Lehr-Anst.

Bessen.

Mittel RS
 Mitter RS
 Mitter G, Sem
 Mitter HBS
 Mitter RS
 Mitter G
 Mitter 2 G, RG, ORS, RS
 Mitter G u. RS, Sem
 Mitter G, RG

Mittel G, RG, ORS
 Mittel RS
 Offenbach G, ORS
 Oppenheim RS
 Oppenheim HBS
 Oppenheim HBS
 Oppenheim HBS
 Oppenheim HBS
 Oppenheim RS

Wimpfen RS
 Worms G, RS

Bingen, Technikum
 Grünberg HKaS
 Mainz, Institut frecht, Institut
 Schiller
 Offenbach HaS

Elfa-Lothringen.

Sarr RS
 Sarrweiler PG
 Sarrweiler G
 Sarrweiler G
 Sarr PG (Domshule)

Mülhausen G
 Mülhausen, Landw.-Sch.
 Saarburg G
 Saarburg ORS
 Weissenburg G

Zabern G

Straßburg HaS, Kalf. techn.
 Winterth., Instit. Bartholdy

V. Ausland:

Schweiz.

Ort G
 Duros G
 Duros G
 St. Gallen G
 Luzern G

Schaffhausen G
 Schaffers G
 Trogen, Kantonsh.
 Weitingen Sem
 Winterthur G

Dolhagen, Kantonsh.
 Zug G
 Zürich G, Lehrerinnen-Sem

Luxemburg.

Luxemburg G

Holland.

Antwerpen, Deutsche RS

Amerika.

Buenos Aires, Deutsche RS

Afrika. Johannesburg, Deutsche Sch.

Da beide Ausgaben stereotypiert sind, können die Auflagen einer jeden nebeneinander gebraucht werden.

Für Preußen ist besonders zu beachten, daß Anträge auf Einführung stets von 2—3 benachbarten Anstalten möglichst gleichzeitig gestellt werden müssen, um die Genehmigung zu erhalten.

Freiexemplare zur Prüfung behufs event. Einführung

stehen gern zu Diensten. Eine etwaige Einführung werde ich auf Wunsch durch Lieferung von Freiexemplaren an die Sachlehrer bez. Lehrerinnen, an arme Schüler, an die etwa bestehende Unterstützungsbibliothek oder in jeder sonst gewünschten Weise bereitwilligst erleichtern.

Für gütige Mitteilung bemerkter Mängel oder Versehen sind Verfasser und Verleger besonders dankbar, damit sie instand gesetzt werden, durch Beachtung aller von Sachseite gegebenen und noch zu erwartenden Winke und Verbesserungsvorschläge das Unterrichtswerk zu einem immer brauchbareren Lehrmittel zu gestalten.



Bestell-Zettel.

Als **Freiexemplar** zur Prüfung behufs event. Einführung für den Gebrauch im Unterricht erbitte ich mir von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3:

Bardey, methodisch geordnete Aufgabensammlung der Elementar-Arithmetik, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Neue Bearbeitung von F. Piehler, Prof. am Gymnasium zu Nordhausen, und O. Presler, Prof. a. d. Oberrealschule zu Hannover. [VII u. 376 S.] gr. 8. 2. Auflage. 1902. geb. M. 3.20.

Bardey, arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien. Neue Bearbeitung von F. Piehler, Prof. am Gymnasium zu Nordhausen, und O. Presler, Prof. a. d. Oberrealschule zu Hannover. [VIII u. 314 S.] gr. 8. 1901. geb. M. 2.60.

Resultate zu oben genannten Büchern liefere ich an Lehrer der Mathematik, an deren Schule die Aufgabensammlung eingeführt ist. Preis M. 1.60.

Ort, Schule:

Unterschrift:

Das Nichtgewünschte bitte gefl. durchzustreichen!

Dieser Bestellzettel, mit Unterschrift versehen, aber ohne weitere schriftliche Mitteilungen, wird in offenem Briefumschlag als Drucksache für 3 Pfg. befördert.

Im Verlage von **B. G. Teubner** in Leipzig ist erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Bardey, Dr. C., methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. In 2 Ausgaben. gr. 8.

1. Alte Ausgabe. 26. Auflage. [XIV u. 330 S.] 1901. Dauerhaft geb. n. *M.* 3.20.

2. Neue Ausgabe. Besorgt von **F. Piepker**, Professor am Gymnasium zu Nordhausen, und **O. Preßler**, Professor an der Oberrealschule zu Hannover. 2. Auflage. [VII u. 376 S.] 1902. Dauerhaft geb. n. *M.* 3.20.

————— Abschnitt XXII hieraus besonders. gr. 8. n. *M.* — .30.

————— Resultate zu der Aufgabensammlung über alle Teile der Elementar-Arithmetik. Alte Ausgabe. [128 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.60.

————— Neue Ausgabe. [129 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.60.

Die Resultate sind nicht durch den Buchhandel zu beziehen, sondern werden nur unmittelbar von der Verlagsbuchhandlung gegen Einsendung von *M.* 1.60 (in Briefmarken) an beglaubigte Lehrer geliefert.

————— arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien. In 2 Ausgaben. gr. 8.

1. Alte Ausgabe. 12. Auflage. [X u. 269 S.] 1901. Dauerhaft geb. n. *M.* 2.40.

2. Neue Ausgabe. Besorgt von **F. Piepker**, Professor am Gymnasium zu Nordhausen, und **O. Preßler**, Professor an der Oberrealschule zu Hannover. [VIII u. 314 S.] 1901. Dauerhaft geb. n. *M.* 2.60.

————— Resultate nebst Auflösungen und Kommentar zu den arithmetischen Aufgaben. Alte Ausgabe. [125 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.60.

————— Neue Ausgabe. [127 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.60.

Die Resultate sind nicht durch den Buchhandel zu beziehen, sondern werden nur unmittelbar von der Verlagsbuchhandlung gegen Einsendung von *M.* 1.60 (in Briefmarken) an beglaubigte Lehrer geliefert.

————— arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten, neu bearbeitet und mit einer Logarithmentafel versehen von **Dr. F. Hartenstein**. Vierte Auflage. [IV u. 202 S.] gr. 8. 1902. Dauerhaft geb. n. *M.* 2.—

————— Dasselbe. Ausgabe B: ohne Logarithmentafel. Vierte Auflage. [IV u. 170 S.] gr. 8. 1902. Dauerhaft geb. n. *M.* 1.80.

————— Resultate und Auflösungen zu **Dr. C. Bardey's** arithmetischen Aufgaben, bearb. von **Dr. F. Hartenstein**. [59 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.—

Die Resultate sind nicht durch den Buchhandel zu beziehen, sondern werden nur unmittelbar von der Verlagsbuchhandlung gegen Einsendung von *M.* 1 (in Briefmarken) an beglaubigte Lehrer geliefert.

[Barbey, Dr. E.,] fünfstellige Briggs'sche Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 000 nebst den sechsstelligen Logarithmen der Zahlen von 10 000 bis 10 800 für Realschulen und verwandte Anstalten namens: sich zu E. Barbey's Arithmetischen Aufgaben und Lehrbuch der Arithmetik herausgegeben von Dr. F. Hartenstein. [32 S.] gr. 8. 1894. Steif geb. *M* —.30

algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage. [XIII u. 378 S.] gr. 8. 1902. Dauerhaft geb. *M* 8.—

„Eine Sammlung von tausend quadratischen und solchen höheren Gleichungen, die nicht auf quadratische zurückführen lassen, zweckmäßig gruppiert, mit den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung, nur in geringer Zahl mit Zahlenwerten, bei weitem die meisten allgemein behandelt, interessant in der Form der Aufgabe, elegant in der Auflösung, einfach in den Resultaten. Die Kollegen werden Herrn Barbey für die Anregung und Hilfe, die er ihnen bietet, von Herzen dankbar sein und werden aus dem Schatze, der ihnen hier aufgethan ist, ihren Schülern reiche Früchte zu schaffen wissen.“ [Pädagogische Revue]

Von der dritten Auflage an erhalten die Lehrer zugleich ein weiteres Hilfsmittel für den Gebrauch der arithmet. Aufgabensammlung desselben Verfassers, indem darin alle schwierigen quadratischen Gleichungen (nebst den Resultaten und Methoden ihrer Auflösung) vorkommen, welche in der Aufgabensammlung enthalten sind.

zur Formation quadratischer Gleichungen. Zweite unveränderte Ausgabe. [VIII u. 390 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 3.—

„Wir haben in der Anzeige der algebraischen Gleichungen des Verfassers (in der Ztschr. 1880 S. 844) unser Urteil über dasselbe dahin ausgesprochen: gerade ein solcher Pa- scheint uns für die Lehrer an Gymnasien und Realschulen zur eignen Förderung und Belebung des Unterrichts geeignet wie wenige. Wir dürfen dieses Urteil über die neue Arbeit wiederholen; es ist durch die mannigfachen neuen Gesichtspunkte, die es bietet, durch die überaus fruchtbaren Prinzipien, auf denen es beruht, für das Gebiet der quadratischen Gleichungen, welches mit Recht einen breiten Platz auf unseren höheren Lehranstalten einnimmt, von außerordentlichem Werte.“ [W. Erler i. d. Ztschr. f. d. Gymnasialwesen 1894 S. 70]

quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. Zweite, vermehrte Auflage. [IV u. 94 S.] gr. 8. 1887. geh. n. *M* 1.60, in Leinwand geb. *n. M* 2.20

Die in diesem Heftchen enthaltenen gegen 600 quadratischen Gleichungen bilden eine Auszug aus den „algebraischen Gleichungen“ desselben Verfassers und sind bestimmt, den Schülern in die Hand gegeben zu werden, damit sie sich auch selbständig in der Behandlung solcher Aufgaben üben können, und die Resultate sind beigelegt, damit sie sich nicht mit einem unrichtigen Resultate zu begnügen brauchen. Da die Aufgaben nur für die oberen Klassen bestimmt sind, so kann die Kontrolle für den Lehrer keine Schwierigkeit haben. Bei den schwierigeren Gleichungen ist auf jenes größere Buch verwiesen, damit man dort nötigenfalls die Methoden nachsehen kann, welche auf die einfachste und kürzeste Weise zum Resultate führen.

Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. Erster Teil. Aufgaben mit einer Unbekannten. 2. Auflage bearbeitet von F. Piehler, Professor am Gymnasium zu Korbhausen. [VI u. 95 S.] gr. 8. In Leinwand geb. *M* 2.60

Die Neubearbeitung der ursprünglich von Dr. E. Barbey verfaßten Anleitung zur Lösung eingekleideter algebraischer Aufgaben geht über den Umfang des Buches in seiner früheren Fassung in doppelter Weise hinaus, insofern sie sich weder auf die Aufgaben ersten Grades noch auf die mit nur einer Unbekannten beschränkt. Nach einem einleitenden Abschnitt „Allgemeine Gesichtspunkte für den Gleichungsansatz“ folgen 183 Musterbeispiele aus den verschiedenen Aufgabengebieten, geteilt in 9 Haupt- und 44 Unter-Abschnitte, die durchschnittlich 8, zum Teil auch weniger oder mehr, bis zu 5 Aufgaben umfassen. Den Anfang machen die Aufgaben, bei denen es sich um Bestimmung von reinen Zahlen und von der Anzahl abzählbarer Gegenstände handelt, dann folgen die Aufgaben, bei denen die zu bestimmenden Größen auf Einheiten zurückgeführt werden müssen, die vier letzten Hauptabschnitte bringen Aufgaben aus der reinen und angewandten Arithmetik, der Raumlehre, der Mechanik und der Physik.

Das Buch soll sowohl dem Selbstunterricht, wie dem Gebrauch im praktischen Schulunterricht dienen.

ferner erschienen im Verlage von **B. G. Teubner** in Leipzig:

Cantor, Hofrath Prof. Dr. M., in Heidelberg, politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. [X u. 136 S.] gr. 8. 1898. In Leinw. geb. \mathcal{M} 1.80.

Eichhorn, Dr. W., Oberlehrer an der Kaiser Wilhelm-Realschule zu Göttingen, arithmetische Regelhefte mit Wiederholungstafeln. In 4 Heften. gr. 8. Steif geb.

- Heft 1. Quarta (Quinta): Rechnen als Vorstufe der Mathematik. In dauerhaftem Umschlag. [40 S.] 1900. \mathcal{M} —.40.
- Heft 2. Untertertia: Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Gleichungen. In dauerhaftem Umschlag. [33 S.] 1900. \mathcal{M} —.40.
- Heft 3. Obertertia: Proportionen, Potenzen, Wurzeln, Gleichungen. In dauerhaftem Umschlag. [42 S.] 1900. \mathcal{M} —.40.
- Heft 4. Untersekunda: Logarithmen, Ketten, Zinseszins- und Rentenrechnung. In dauerhaftem Umschlag. [35 S.] 1900. \mathcal{M} —.50.

Erlar, Dr. W., weil Professor am Kgl. Pädagogium Züllichau, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten. Fünfte Auflage besorgt von Dr. L. Huebner, Professor am Gymnasium zu Schweidnitz. Mit 30 Figuren im Text. [VI u. 60 S.] gr. 8. 1898. kart. \mathcal{M} 1.20.

Ganter, Dr. H., Prof. a. d. Kantonschule in Aarau, u. Dr. F. Rudio, Prof. am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit vielen Textfiguren und zahlreichen Übungsbeispielen. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinw. geb.

- I. Teil. Die analytische Geometrie der Ebene. 5. verb. Aufl. [VIII u. 180 S.] 1902. \mathcal{M} 3.—
- II. — Die analytische Geometrie des Raumes. 3. Aufl. [X u. 184 S.] 1902. \mathcal{M} 3.—

Girard, Martin, Königl. Baugewerkschul-Lehrer, Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. 2 Teile. gr. 8. 1897. kart. \mathcal{M} 3.40.

- I. Teil. Lehre von den ebenen Figuren. Mit 276 Fig. im Text u. 287 der Baupraxis entlehnten Aufgaben. [VIII u. 99 S.] In Lnw. kart. \mathcal{M} 2.40
- II. — Körperlehre. Mit 64 Textfiguren [VIII u. 65 S.] kart. \mathcal{M} 1.—

Henrici, Julius, Gymnasial-Professor in Heidelberg, u. P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 3 Teile. gr. 8. geb. \mathcal{M} 9.—

- I. Teil. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbild. ohne Maßänderung. Mit 123 Fig. in Holzschn. 3. Aufl. [VIII u. 144 S.] 1897. geb. \mathcal{M} 2.40.
- II. — Abbildung in verändertem Maße. Berechnung der Größen der ebenen Geometrie. Mit 138 Fig. in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. 2. Auflage. [IX u. 248 S.] 1896. geb. \mathcal{M} 3.30.
- III. — Die Gebilde des körperlichen Raumes. Abbildung von einer Ebene auf eine zweite. (Kegelschnitte.) Mit 131 Fig. im Text. 2. Auflage. [XII u. 192 S.] 1901. geb. \mathcal{M} 3.30.

Hochheim, Dr. Adolf, Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 2. verb. Aufl. 2 Teile. gr. 8. 1894. geh. \mathcal{M} 3.20, geb. \mathcal{M} 4.40. A. Aufgaben. [IV u. 86 S.] geh. \mathcal{M} 1.60, geb. \mathcal{M} 2.20, B. Auflösungen. [106 S.] geh. \mathcal{M} 1.60, geb. \mathcal{M} 2.20.

Heft II. Die Kegelschnitte. Abteilung I. 2. Aufl. 2 Teile. gr. 8. 1898. geh. \mathcal{M} 3.—, geb. \mathcal{M} 4.20. A. Aufgaben. [IV u. 81 S.] geh. \mathcal{M} 1.40, geb. \mathcal{M} 2.—. B. Auflösungen. [96 S.] geh. \mathcal{M} 1.60, geb. \mathcal{M} 2.20.

Heft III. Die Kegelschnitte. Abteilung II. 2 Teile. gr. 8. 1886. geh. \mathcal{M} 2.80, geb. \mathcal{M} 4.—. A. Aufgaben. [67 S.] geh. \mathcal{M} 1.20, geb. \mathcal{M} 1.80. B. Auflösungen. [94 S.] geh. \mathcal{M} 1.60, geb. \mathcal{M} 2.20.

Holzmüller, Prof. Dr. Gustav, method. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. (Im engsten Anschluß an die Neuen Lehrpläne.) gr. 8. In Zw. geb.

Allgemeine Ausgabe A. In 3 Teilen. gr. 8. In Zw. geb.

I. Teil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Realschulen reichend. 3. Doppel-Aufl. Mit 142 Fig. im Text. [VIII u. 239 S.] 1898. M. 2.40.

II. Teil, für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. 2. Ausgabe. Mit 210 Figuren im Text. [VIII u. 223 S.] 1897. M. 3.—

III. — Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Realschulen und höherer Hochschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschul-Mathematik. Mit 160 Figuren im Text. [VIII u. 224 S.] 1895. M. 2.30

Ausgabe B, für Gymnasien. In 2 Teilen. gr. 8. In Zw. geb.

I. Teil, im Anschluß an die preussischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Untersekunda reichend. Mit 138 Figuren im Text. [VIII u. 228 S.] 1896. M. 2.40.

II. — im Anschluß an die preussischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Entlassungsprüfung reichend. Mit 126 Figuren im Text. [VIII u. 279 S.] 1896. M. 3.—

Begleitwort des Verfassers hierzu, nur für Lehrer bestimmt. Hefert die Verlagshandlung auf Wunsch unentgeltlich.

Klein, F., Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearb. v. F. Täger. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren und 2 lithogr. Tafeln. [V u. 66 S.] gr. 8. 1895. geh. M. 2.—

Mansion, Dr. Paul, Professor an der Universität Gent, Elemente der Determinanten mit vielen Übungsaufgaben. 3. vermehrte Auflage. [VI u. 103 S.] gr. 8. 1900. geh. M. 2.60.

Müller, Heinrich, Oberlehrer am Königl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Mit zahlreichen Textfiguren. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil: Die Unterstufe. 1. Auflage. 1899. [VIII u. 153 S.] M. 2.50.

2. Auflage in 2 Ausgaben:

Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien. 1902. [VIII u. 137 S.] M. 1.60

Ausgabe B. Für Reale Anstalten u. Reformschulen. 1902. [VIII u. 199 S.] M. 2.20

II. Teil: Die Oberstufe. 1. Auflage. 1899. [X u. 216 S.] M. 3.20.

2. Auflage in 2 Ausgaben:

Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien. 1902. [XII u. 311 S.] M. 3.40

Ausgabe B. Für Reale Anstalten und Reformschulen. Unter Mitwirkung von H. Hoyer. I. Abteilung: Planimetrie, Algebra, Trigonometrie und Stereometrie. 1902. [VIII u. 223 S.] M. 3.80.

II. Abteilung: Synthetische und analytische Geometrie der ersten und zweiten Ordnung. Darstellende Geometrie. 1902. [VIII u. 179 S.] M. 2.40

Ausgabe C. Für Seminare u. Präparandenanstalten. Bearb. von R. Baltus u. W. Ratwald. gr. 8. 1902. [VIII u. 214 S.] In Zw. geb. M. 2.20

Sonder-Abdruck aus „Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen“:

Die Lehre von den Koordinaten und Kegelschnitten. Mit zahlreichen Textfiguren. [III u. 52 S.] gr. 8. kart. n. M. 1.—

— und **M. Rutnewsky**, Oberlehrer an der XII. Realschule in Berlin, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. In 2 Teilen.

Ausgabe A. Für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. I. Teil. [VIII u. 315 S.] gr. 8. 1900. In Weinwand geb. M. 2.80.

II. Teil: Für die oberen Klassen der Gymnasien. [VIII u. 347 S.] gr. 8. 1902. In Weinwand geb. M. 3.20.

Ausgabe B. Für Reale Anstalten und Reformschulen. I. Teil. [VIII u. 289 S.] gr. 8. 1900. In Weinwand geb. M. 2.60.

II. Teil: [VIII u. 360 S.] gr. 8. 1902. In Weinwand geb. M. 3.10

Ausgabe C. Für Seminare und Präparandenanstalten. Bearbeitet von R. Baltus und W. Ratwald. gr. 8. 1902. [VIII u. 336 S.] In Zw. geb. M. 3.—

— die Elementar-Planimetrie. Ein methodisches Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht. 2. Auflage. 1902. [VIII u. 187 S.] Preis kart. M. 2.40.

Reidt, Dr. Friedrich, Professor am Gymnasium u. dem Realgymnasium zu Hamm, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie u. Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. \mathcal{M} 7.—, geb. \mathcal{M} 8.60.

I Teil. Trigonometrie. 4., verb. Aufl. [X u. 250 S.] 1894. geh. \mathcal{M} 4.—, geb. \mathcal{M} 4.80.

II. — Stereometrie. 4., verb. Aufl. bearb. v. A. MUCK. [VIII u. 194 S.] 1897. geh. \mathcal{M} 3.—, geb. \mathcal{M} 3.80.

Resultate der Rechnungsaufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. \mathcal{M} 2.80, geb. \mathcal{M} 4.10.

I Teil. Trigonometrie. 4. Aufl. [78 S.] 1894. geh. \mathcal{M} 1.80, geb. \mathcal{M} 2.50.

II. — Stereometrie. 4. Aufl. bearb. v. A. MUCK. [58 S.] 1897. geh. \mathcal{M} 1.—, geb. \mathcal{M} 1.60.

Richter, Dr. Albert, Professor am Gymnasium und an der Realschule zu Wandsbek, arithmetische Aufgaben für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. [X u. 149 S.] gr. 8. 1898. geh. \mathcal{M} 1.40, geb. \mathcal{M} 1.80.

Resultate und Erläuterungen dazu. [IV u. 104 S.] gr. 8. 1898. geh. \mathcal{M} 1.50.

(Werden nur direkt an Lehrer verabfolgt.)

trigonometrische Aufgaben für Gymnasien, Realgymnasien u. Oberrealschulen, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. [VIII u. 41 S.] gr. 8. 1898. geh. \mathcal{M} —.60, geb. \mathcal{M} —.90.

Resultate und Erläuterungen dazu. [III u. 40 S.] gr. 8.] 1898. —.80.

(Werden nur direkt an Lehrer verabfolgt.)

Rudio, Dr. F., die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Siehe: Gantner und Rudio.

Säringger, E. und Dr. W. Esel, Oberlehrer am kgl. Gymnasium zu Chemnitz, Aufgabensammlung für den Rechen-Unterricht in den Unterklassen der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. 2. verbesserte Auflage. 3 Hefte. gr. 8. 1899. kart.

I. Heft. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen einfach und mehrfach benannten Zahlen. [IV u. 91 S.] \mathcal{M} 1.—

II. — Bruchrechnung. [104 S.] \mathcal{M} 1.20.

III. — Schlussrechnung. Prozent-, Zins- und Diskontorechnung. [70 S.] \mathcal{M} —.80.

(Resultate hierzu nur durch die Verlagsbuchhandlung.)

Schilke, Dr. phil., Oberlehrer am Gymnasium zu Saarburg i. L., Sammlung planimetrischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. [IV u. 54 S.] 1890. gr. 8. geb. \mathcal{M} 1.—

Schotten, Dr. Heinrich, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. In 3 Bänden. I. Band. [IV u. 370 S.] gr. 8. 1890. geh. \mathcal{M} 6.—, geb. \mathcal{M} 7.—

II. Band. [IV u. 410 S.] gr. 8. 1893. geh. \mathcal{M} 8.—, geb. \mathcal{M} 9.— (III. Band in Vorbereitung.)

Schubert, Dr. Hermann, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg, fünfstellige Tafeln und Gegen-tafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. [VI u. 157 S.] gr. 8. 1897. In Leinwand geb. \mathcal{M} 4.—

Schülke, Dr. A., Gymn.-Professor in Osterode, O.-Pr., Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik, Volkswirtschaftslehre für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. [X u. 194 S.] Mit 45 Fig. im Text. 1902. In Leinwand geb. \mathcal{M} 2.20.

————— vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tafeln. Für den Schulgebrauch zusammengestellt. Dritte verbesserte Auflage. [II u. 18 S.] gr. 8. 1900. Steif geh. \mathcal{M} —.60.

————— trigonometrische Tafel. 2. Aufl. [1 Bl.] gr. 8. 1896. \mathcal{M} —.15

Schüller, Werner Jos., Seminarlehrer in Boppard am Rhein, ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Schulen und Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. In engster Verknüpfung mit der Geometrie zur Verknüpfung der Zahlbegriffe, Theorien, Operationen, Lehrsätze und Auflösung von Aufgaben systematisch bearbeitet. Mit 54 Figuren im Text. Zweite, um die Logarithmen vermehrte, wohlfeile Ausgabe. [XXVI u. 478 S.] gr. 8. 1897. Dauerhaft geb. \mathcal{M} 2.50.

Schuster, Dr. M., Professor an der Oberrealschule zu Oldenburg, geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Planimetrie — Stereometrie — ebene und sphärische Trigonometrie. Nach konstruktiv-analytischer Methode bearb.

Ausgabe A. Für Vollenstalten. In 3 Teilen:

1. Teil: Planimetrie. [VIII u. 147 S.] gr. 8. Mit 2 lithogr. Tafeln. gr. 8. 1899. In Leinwand geb. \mathcal{M} 2.—

Auflösungen dazu \mathcal{M} —.60. (Nur an Lehrer vom Verlage)

2. Teil: Trigonometrie. [VII u. 112 S.] Mit 1 lithogr. Tafel. gr. 8. 1903. In Leinwand geb. \mathcal{M} 1.60.

Auflösungen dazu unter der Presse.

3. Teil: Stereometrie. [VII u. 80 S.] Mit 1 lithogr. Tafel. gr. 8. 1901. In Leinwand geb. \mathcal{M} 1.40.

Auflösungen dazu \mathcal{M} 1.40. (Nur an Lehrer vom Verlage)

Ausgabe B. Für Progymnasien und Realschulen. [VII u. 112 S.] Mit 2 lithogr. Tafeln. gr. 8. 1900. In Leinwand geb. \mathcal{M} 1.60.

Ausgabe C. Für Mittelschulen. Bearb. unter Mitwirkung von Dr. Bieler, Rektor der städt. Knabenmittelschule zu Kottbus. [VIII u. 88 S.] Mit 1 lithogr. Tafel. gr. 8. 1901. In Leinwand geb. \mathcal{M} 1.40.

Sellenthin, Dr. Bernhard, Oberlehrer an der Kaiserlichen Marine-Schule zu Kiel, mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Auf Veranlassung der Kaiserl. Inspektion des Bildungswesens der Marine bearbeitet. Mit 324 Figuren im Text. [XI u. 450 S.] 1902. gr. 8. geb. \mathcal{M} 8.40

Vollprecht, Prof. Dr. H., Rektor des Realgymnasiums zu Zwickau, das Rechnen, eine Vorbereitung zur allgemeinen Arithmetik. Regeln und Formen des Rechnens, Vergleiche mit der allgemeinen Arithmetik und Hinweise auf Geometrie und Physik für Lehrer und Schüler der mittleren und unteren Klassen der höheren Lehranstalten. [IV u. 44 S.] gr. 8. 1902. geb. \mathcal{M} —.50.

Wehner, Dr. Hermann, Oberlehrer am Realgymnasium mit Realschule zu Plauen i. V., Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen. Mit 38 in den Text gedruckten Figuren. [V u. 65 S.] gr. 8. 2. verbess. Aufl. 1901. kart. \mathcal{M} 1.—

Weinnoldt, Dr. Ernst, Professor an der Kaiserlichen Marine-Akademie und -Schule zu Kiel, Leitfaden der analytischen Geometrie. Auf Veranlassung der Kaiserlichen Inspektion des Bildungswesens der Marine bearbeitet. Mit 62 Figuren im Text. [VI u. 80 S.] gr. 8. 1902. geb. \mathcal{M} 1.60.

eben erschienen:



DYNAMIK DER KURBELGETRIEBE MIT BESONDERER BERÜCKSICH- TIGUNG DER SCHIFFSMASCHINEN

VON DR. PHIL. H. LORENZ, DIPL. INGENIEUR, PROFESSOR AN DER
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN. MIT 66 TEXTFIGUREN. [V u. 156 S.]

1901. geh. n. M. 5.—

Die vorliegende Schrift behandelt ein Gebiet der technischen Mechanik und Maschinenlehre, welches in den zahlreichen Lehrbüchern dieser Disziplinen meines Wissens bisher noch keine seiner praktischen Bedeutung entsprechende Darstellung gefunden hat. Durch die erst in jüngster Zeit in Technikerkreisen als unzulänglich erkannte geometrische Bewegungslehre (Kinematik) war die schon von Poncelet und Redtenbacher angebahnte dynamische Behandlung des Kurbelmechanismus in den Hintergrund gedrängt worden. Hieran vermochte auch die bedeutungsvolle Arbeit Radingers „Über Dampfmaschinen mit hoher Umlaufgeschwindigkeit“ schon darum nichts zu ändern, weil sie die für stationäre Dampfmaschinen und Lokomotiven hinreichende Voraussetzung konstanter Winkelgeschwindigkeiten der Welle aus der Kinematik übernahm.

Erst die Aufgaben, welche der moderne Schiffsmaschinenbau stellte, forderten eine breitere dynamische Grundlage, auf der für willkürliche Annahmen kein Platz mehr übrig blieb. Das Prinzip von D'Alembert* wurde die Energiegleichung reichen in der That zur praktischen Lösung der Probleme hin und sind darum auch in der vorliegenden Arbeit eingehend verwendet worden. Aus dem ersteren ergeben sich, wie die Ableitung zeigen wird, zwanglos die allgemeinen Bedingungsgleichungen, welche dem Schlick'schen Massenausgleich zu Grunde liegen, während die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit sich mit Hilfe der Arbeitsgleichung leicht verfolgen lassen. Dabei bietet sich hinreichend Gelegenheit, die Berechtigung älterer Methoden zu prüfen.

Dem rein dynamischen Charakter dieser Schrift entsprechend habe ich, ohne ganz auf graphische Darstellungen zu verzichten, der analytischen Behandlung bei meinen Untersuchungen den Vorzug gegeben, wodurch sich auch der vielleicht auffallende Formelreichtum erklärt. Ich hätte denselben allerdings leicht durch Weglassung mancher Be-

* Leser, welche mit den Lagrange'schen Gleichungen der Dynamik vertraut sind, werden vielleicht mit Interesse die dem Kurbelgetriebe gewidmeten Kapitel der eleganten Arbeit von K. Heun: „Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik“ im IX. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig 1900, welche während des Druckes dieser Schrift erschien, mit unserer Darstellung vergleichen.

weise und Ausrechnungen einschränken können, doch schien mir es um so weniger im Interesse der Leser zu liegen, als ich mich in den periodischen Reihen eines trotz seiner Fruchtbarkeit den Ingenieuren kaum geläufigen Hilfsmittels bedienen musste. Die damit erzielten Resultate dürften dieses Verfahren im Verein mit einer ganz elementaren Darstellung, welche durch Zahlenbeispiele noch ergänzt wird, zu rechtfertigen. Ich bin übrigens überzeugt, dass dieselbe Betrachtungsweise, welche uns einen Einblick in die periodischen Schwankungen des Drehmoments der Welle und deren Torsionsschwingungen während der Rotation gewährt, auch für das Studium anderer Vorgänge nützlich erweisen dürfte, und würde mich freuen, wenn meine Arbeit einige Leser nach dieser Richtung hin zu selbständigen Untersuchungen anspornen sollte. Habe ich doch selbst bei der Bearbeitung einzelner der hier behandelten Probleme den grossen Nutzen anderweitiger Anregungen erfahren, wofür ich in erster Linie Herrn O. Schlieff in Hamburg und der Stettiner Maschinenbau-Aktiengesellschaft Vulkan, welche mir durch Beteiligung an Probefahrten wertvolle Einblicke in praktische Verhältnisse ermöglichten, zu Dank verpflichtet bin.

Solche Probleme sind in den letzten Jahren Gegenstand lebhafter Diskussion in Fachzeitschriften gewesen. Dass ich die hierbei erzielten positiven Ergebnisse unter vollständiger Quellenangabe aufgenommen habe, wird man wohl ebenso billigen wie den Verzicht auf jede Polemik an dieser Stelle. Dies verbot schon die Bestimmung der Arbeit: Einführung in das Gebiet für Ingenieure und reifere Studierende der Maschinentechnik, denen ohnehin mit noch nicht abgeschlossenen Untersuchungen schwerlich gedient wäre.

Schliesslich habe ich noch mit Dank die Unterstützung zu erwähnen, die mir durch meinen Assistenten, Herrn Ingenieur Cattani, beim Lesen der Korrekturen zu teil wurde.

Göttingen.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	
Kap. I. Die Massenwirkungen und ihr Ausgleich.	
1. Die Bewegungen im Schubkurbelgetriebe	
2. Die Massendrücke am Schubkurbelgetriebe	
3. Die Ausgleichung der Massendrücke bei mehrkurbligen Maschinen	
4. Diskussion der Ausgleichsbedingungen	
5. Analytische Behandlung der Vierkurbelmaschine	
6. Symmetrisch angeordnete Vierkurbelmaschinen	
7. Graphische Behandlung der Vierkurbelmaschine	
8. Die Bewegungen im Balanciergetriebe	
9. Die Massendrücke in Balanciergetrieben	

Kap. II. Der Energieaustausch.	Seite
10. Die kinetische Energie im Kurbelgetriebe	73
11. Die potentielle Energie im Kurbelgetriebe	84
12. Die Arbeit der treibenden Kraft	88
13. Der Ausgleich der Schwankungen im Drehmoment mehrkurbli- ger Maschinen	97
14. Die Widerstandsarbeit	109
15. Die Änderungen der Winkelgeschwindigkeit bei gegebener Widerstandskurve	114
16. Die Änderungen der Winkelgeschwindigkeit bei einem von ihr abhängigen Nutzwiderstande	126
17. Der Einfluss elastischer Formänderungen	133
18. Vergleich mit der praktischen Erfahrung	147
Sachregister	155
Namenregister	156

Sachregister.

- | | |
|--|---|
| <p>Admission, A.-druck 88, 107.
 Arbeit, A.-gleichung 12, 115.
 Ausgleich, Ausgleichung, siehe Massen-
 ausgleich.
 Ausgleichsbedingungen 28.
 Ausschublinie 89.
 Bahndruck 5.
 Bahngleichungen 4.
 Balancier, B.-getriebe 3, 57.
 Beharrungszustand 3, 127.
 Beschleunigung 3, 10, 15, 16, 61, 66.
 Bewegung im Balanciergetriebe 57.
 Bewegung im Schubkurbelgetriebe 13.
 Centrifugalpumpe 79.
 Centrifugalregulator 126.
 Cylinder (Dampf-C.) 3.
 C.-Abstand 41.
 D'Alembertsches Prinzip 3.
 Doppelverhältnis 34.
 Drehkraftdiagramm 100.
 Drehmoment (Drehkraft) 3, 89, 126.
 Drehung 75.
 Dreikurbelmaschine 31, 101.
 Dynamik 3.
 Eigenschwingung 136.
 Eisenbahnzug 80.
 Elastizität 149.
 Energie, E.-Gleichung 12, 115, 134.
 Erschütterungen 7.
 Erzwungene Schwingung 136.
 Expansion, E.-linie 89, 103.
 Formänderung (F.-arbeit) 128, 134.
 Främ 1, 3.
 Fundamentplatte 1, 3.
 Fünfkurbelmaschine 55.</p> | <p>Gegengewicht 20, 31, 71.
 Geradföhrung 1.
 Geschwindigkeit 11, 14, 16, 60, 63.
 Gewichtsenegie (Gewichtswirkung) 12,
 84, 121.
 Gleitbahn 1.
 Gleitstücke 1, 2.
 Graphische Behandlung 51.
 Graphische Integration 118, 131, 150.
 Harmonische Analyse 93.
 Hookesches Gesetz 139.
 Hubpumpen 73.
 Hydrodynamik 114.
 Indikator und I.-Diagramm 88.
 Integrierender Faktor 129.
 Isochronismus 147.
 Kinetische Energie 12, 73.
 Kippmoment 46.
 Kolben, Kolbenstange 1.
 Kolbendruck (K.-Diagramm) 88.
 Kolbenpumpe 79.
 Kompression 89.
 Kondensator (K.-Luftpumpe) 71, 86, 87.
 Kreuzkopf 1, 13.
 Kritische Geschwindigkeit 147.
 Kurbel (K.-Zapfen, K.-Welle) 1, 133.
 Kurbelgetriebe 1.
 Kurbelkreis 1, 43, 100.
 Kurbelschleife (K.-Getriebe) 2, 14, 23, 96.
 Leitkurve 67, 74.
 Lenker 57.
 Lokomotive 3, 80.
 Longitudinalschwingung 7.
 Massenausgleich 9, 21, 97, 121.
 Massendruck, M.-wirkung 3, 18, 27.</p> |
|--|---|

Mechanischer Wirkungsgrad 109.
 Mehrkurbelmaschine 3, 21, 121.
 Momentgleichungen 8.
 Multiplikator 5.
 Nutzwiderstand (N.-arbeit) 109, 126.
 Pendelung 9.
 Periodische Funktion (P.-Reihe) 10, 17, 92, 135.
 Perspektivische Lage 34.
 Phasenverschiebung 10.
 Planimetrieren 89, 118, 151.
 Polygon 28, 52, 100.
 Potentielle Energie 12, 84, 121.
 Prinzip der virtuellen Verschiebungen 3, 4.
 Probiervorfahren 55.
 Propeller (P.-schub) 81, 114, 150.
 Regulierung und Regulator 125.
 Reibung (R.-Widerstand) 109.
 Resonanz 10, 139.
 Schiff (S.-körper) 3, 36, 80, 148.
 Schiffsmaschine 97, 100, 149.
 Schräkungswinkel 28.
 Schraube siehe Propeller.
 Schreibapparat 147.
 Schubelastizität (S.-Modul) 134.
 Schubkurbelgetriebe 2, 13.
 Schwebung 139.
 Schwerpunkt 6, 68.
 Schwingung 3, 13, 109, 128, 150.
 Schwinghebel siehe Balancier.
 Schwungrad (S.-Explosion) 1, 119, 154.
 Starres System 6, 68.
 Stennergestänge 71.
 Steuerung, Steuerschieber 44.
 Stoss (S.-Wirkung) 128.
 Tangentialdruck (T.-Diagramm) 89.
 Torsion (T.-Moment) 134.
 Torsionsschwingung 13, 136.
 Totpunkt und Totlage 13, 30.
 Translation 75.
 Transmissionsdampfmaschine 79.
 Transversalschwingung 10, 109.
 Treibende Kraft 88.
 Umdrehungsdauer 115.
 Unempfindlichkeit des Regulators 125.
 Ungleichförmigkeitsgrad 117.
 Variation 7.
 Vektor 39.
 Verdrehungswinkel 140.
 Verzögerung 3.
 Vibration 10.
 Vierkurbelmaschine 33.
 Virtuelle Verschiebungen 3.
 Welle (W.-brüche) 1, 133, 149, 153.
 Widerstand (W.-moment) 3, 12, 114.
 Winkelbeschleunigung 15, 127.
 Winkelgeschwindigkeit 15, 74.
 Wirkungsgrad 109.
 Zweikurbelmaschine 101.

Bestell-Zettel.

Bei der

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit ein Exemplar des im Verlage von
B. G. Teubner in Leipzig soeben erschienenen Werkes [zur Ansicht]:

**Lorenz. Dr. phil. H.. Dynamik der Kurbelgetriebe mit
besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen.**

Mit 66 Textfiguren. gr. 8°. 1901. [V u. 156 S.] geh. n. **5.-**

Unterschrift:

Ort, Datum, Wohnung:

Soeben erschien:

GEOMETRIE DER DYNAMEN.

DIE ZUSAMMENSETZUNG VON KRÄFTEN
UND VERWANDTE GEGENSTÄNDE DER GEOMETRIE

BEARBEITET

VON

E. STUDY.

MIT 44 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND EINER TAFEL.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Aus dem Vorwort.

In der vorliegenden Schrift wird die Frage nach der constructiven Darstellung und Zusammensetzung von Dynamen, d. i. von Systemen von Kräften, die an einem starren Körper angreifen, als Ausgangspunkt genommen für Untersuchungen geometrischen (und also rein theoretischen) Inhalts.

Im *ersten Abschnitt* wird gezeigt, dass die aus Lehrbüchern der Mechanik allgemein bekannten Sätze über Streckensysteme ein Glied (und zwar nicht durchaus in jeder Hinsicht das einfachste) bilden in einer Kette verwandter Constructionen, die hier zum ersten Male vollständig und mit ausgeführten Beweisen vorgelegt werden. Die verwendeten Hilfsmittel sind die der Elementargeometrie; Jeder wird der Darlegung folgen können, der mit guten Schulkenntnissen einige Übung im geometrischen Denken verbindet, solche, wie sie etwa durch Beschäftigung mit der sogenannten synthetischen oder der darstellenden Geometrie erworben werden kann.

Der *zweite Abschnitt* bringt eine algebraische Begründung derselben Theorie. Die Abfassung ist hier etwas kürzer, besondere Kenntnisse aber werden vom Leser ebenfalls nicht verlangt. Wem die projective Geometrie in ihrer analytischen Gestalt geläufig ist, der wird gut vorbereitet sein zum Studium auch dieses Abschnittes, dessen Inhalt zum Theil wohl geradezu als eine Ergänzung zu den vorhandenen Lehrbüchern der analytischen Geometrie wird betrachtet werden können.

Der *dritte Abschnitt* behandelt hauptsächlich die linearen Systeme von Dynamen. Im Zusammenhange damit werden die Anfänge einer neuen Art von Liniengeometrie entwickelt. Den Schluss bilden Anwendungen auf Kinematik. Diese weitergehenden Untersuchungen haben auf einem verhältnissmässig engen Raum untergebracht werden müssen: Wir wenden uns mit ihnen nur an geübtere Geometer, solche, die mit den Hilfsmitteln der modernen Analysis und namentlich mit der Handhabung des Gruppenbegriffs genügend vertraut sind. Doch wird ein Theil des Vorgetragenen (z. B. § 29, §§ 36—40) wohl ebenfalls nicht schwer zugänglich sein.

Dem Verfasser sind Betrachtungen von wesentlichem Nutzen gewesen, die sich auf gewisse Operationen mit Zahlenpaaren, gewöhnlich sogenannten complexen Grössen, beziehen. Da es scheint, dass von dem Grundgedanken dieser Ueberlegungen auch ohne Eingehen auf Einzelheiten und in allgemein verständlicher Weise sich Rechenschaft geben lässt, so wollen wir dieses noch versuchen.

Andere complexe Grössen als die gemeinen können, wie bereits Gauss angedeutet hat, nur begrenzte Gebiete nützlicher Anwendung finden. Sie dienen dann, wie in der Theorie der conformen Abbildung schon die gemeinen complexen Grössen selbst, und wie (in geringerem Maasse) auch die Quaternionen, nicht zur Erweiterung irgend eines Systems geometrischer Begriffe, sondern zur Abkürzung des Calculs, zur Verschmelzung von mehreren häufig zusammen auftretenden Gleichungen in eine einzige. Diese Vorthelle sind also formaler Natur, und sie mögen daher leicht gering angeschlagen werden. Die erwähnte Zusammenfassung kann aber sehr suggestiv sein: Es können dadurch Gesetzmässigkeiten hervortreten, die sonst nicht so leicht bemerkt werden würden und deren Untersuchung dann Thatfachen zum Vorschein bringt, die durchaus nicht mehr formal sind. Eben diesen Umstand hat der Verfasser z. B. die Auffindung mehrerer der im ersten Abschnitt angegebenen geometrischen Constructionen zu danken, die dann, *aber auch erst dann*, natürlich sehr wohl mit anderen Hülfsmitteln abgeleitet werden konnten.

Wir wollen nun den Fall setzen, dass ein Geometer, der nicht Besseres zu thun wüsste, auf den Gedanken verfiel, zu einer Erweiterung des Systems der ebenen und räumlichen Geometrie statt der gemeinen complexen Grössen oder Zahlenpaare deren Ausartung, nämlich die ebenfalls aus zwei Einheiten $1, \epsilon$ abgeleiteten Grössen zu verwenden, deren Rechnungsregeln durch die Gleichung $\epsilon^2 = 0$ (an Stelle von $i^2 = -1$) bezeichnet sind*). Dieser Geometer würde dann, bei gehöriger Ausgestaltung, zu einem System abstracter Begriffe kommen, das sich, wie die sogenannte Geometrie im imaginären Gebiet, auf Mannigfaltigkeiten von vier und sechs Dimensionen bezöge. An Stelle der ∞^4 oder ∞^6 imaginären Punkte würden ∞^4 und ∞^6 , sagen wir „ideale Punkte“ treten. Der Operation des Verbindens zweier Punkte durch eine gerade Linie z. B. würde eine verwandte abstracte und analytisch auszuführende Operation entsprechen u. s. w.: Zahlreiche Uebereinstimmungen mit dem System der imaginären Geometrie würden

*) Man vergleiche den Artikel über complexe Grössen in der Mathematischen Encyclopädie, Nr. 9, S. 166. Oder auch Kap. X in der Theoretischen Arithmetik von Stolz und Gmeiner (Leipzig, 1902).

auftreten, aber es müssten auch nicht minder zahlreiche und dabei sehr tiefgreifende Unterschiede sich zeigen. Ein Nutzen der ganzen Betrachtung würde unmittelbar nicht zu erkennen sein; ja Mancher dürfte sie wohl so öde und steril finden wie nur möglich.

Wir glauben nun nachweisen zu können, dass der fragliche Nutzen dennoch vorhanden ist, dass nämlich *den bezeichneten Begriffssystemen eine Realität in der Erscheinungswelt entspricht*. Der fingirte Geometer würde thatsächlich zwei geometrische Disciplinen, die *Liniengeometrie* und die *Kinematik*, eine Strecke weit entwickelt haben, nicht gerade in der Richtung, in der sie bisher ausgestaltet worden sind — in diesem Falle würde seine Bemühung grösstentheils entbehrlich sein — wohl aber in einer solchen, die als eine natürliche, ja vielleicht sogar nothwendige Weiterbildung vorhandener Ansätze gelten kann. Man kann nämlich eindeutig-umkehrbar den idealen Punkten der erweiterten ebenen Geometrie die ∞^4 geraden Linien im Raume und denen der erweiterten räumlichen Geometrie die ∞^6 Lagen eines starren Körpers zuordnen. Der idealen Verbindungslinie zweier idealer Punkte wird dann im ersten Falle zugeordnet die gemeinsame Normale der entsprechenden Geraden; und im zweiten entspricht z. B. der idealen Verbindungsebene dreier idealer Punkte jene schöne von Herrn C. Stephanos gefundene Figur, nämlich die Lage des starren Körpers, aus der drei gegebene durch Umwendungen um gerade Linien hervorgehen. Das Auftreten von Grenzfällen, in denen diese Constructionen unbestimmte Ergebnisse liefern, wird in der Theorie unseres Geometers ebenfalls schon vorgemerkt sein, und er wird dafür auch die im zweiten Beispiel schon nicht mehr bekannten analytischen Kriterien zur Hand haben, sammt einer genauen Einsicht in die Art des Unbestimmtwerdens. Und manche bei anderen Untersuchungen gefundene Figuren werden sich alsbald von neuen Seiten zeigen — so das schon bei den verschiedensten Gelegenheiten zum Vorschein gekommene Cylindroid, das nun die Bedeutung eines Grundbegriffs der Liniengeometrie erhält, oder auch jene merkwürdigen Paare von Strahlencongruenzen, deren jede aus allen gemeinsamen Normalen von Strahlen der anderen besteht. Und zu diesen Figuren werden eine Fülle neuer Gestalten treten, die alle in den Formeln schon bereit liegen und nur aus der Puppenhülle der Abstraction hervorzukommen brauchen, um geometrische Eigenschaften zu offenbaren. —

Wie aus diesen noch etwas formlosen Gedanken präzise mathematische Probleme und Sätze gebildet werden können, wo und warum sodann die geschilderte Methode ihre Schranken findet, und durch welche weiter reichende Methode sie deshalb zu ergänzen ist, das muss in dem

Buche selbst nachgelesen werden. Wir haben uns dort in der Hauptsache auf die Erweiterung der ebenen Geometrie beschränkt, und zwar haben wir auch von dieser nur die projective betrachtet; denn die so entstehende Art von Liniengeometrie hat besonders einfache Beziehungen zu unserem eigentlichen Thema, der Geometrie der Dynamen, und unterscheidet sich darin, wie es scheint, von anderen Arten der Liniengeometrie, die demselben Process ihre Entstehung verdanken. Doch sind, in einem Anhange, die verwandten Betrachtungen über Kinematik wenigstens noch skizzirt worden. — Von der soeben geschilderten Art der Exposition sind wir in einer Hinsicht abgewichen. Wir haben nämlich nicht erst eine abstracte Theorie entwickelt, um nachträglicher Realisirbarkeit zu zeigen, sondern wir haben den analytischen Apparat von vorn herein in organische Verbindung mit den zugehörigen Constructionen gebracht. —

Die projective Geometrie umfasst bekanntlich in gewissem Sinne ausser der Euklidischen, auch die *Nicht-Euklidische Geometrie*. Auf diese letzte ist daher das besprochene Erweiterungsprincip ebenfalls anwendbar. Die Uebertragung aus der Nicht-Euklidischen Geometrie bekannter Schlüsse auf die gewöhnliche Liniengeometrie und Kinematik hat für die mitgetheilten Untersuchungen eine ganz besondere Bedeutung, so dass dem Buche auch recht wohl der Nebentitel „Anwendungen der Nicht-Euklidischen Geometrie“ hätte gegeben werden können, wenn das nicht zu irrigen Annahmen über das Maass der im Ganzen vom Leser zu verlangenden Kenntnisse führen müsste. Den sämtlichen Constructionen unseres ersten Abschnittes gehören daher, als das werthvollste Resultat aber erscheint dem Verfasser die im Anhang vorgetragene Anwendung der Nicht-Euklidischen Geometrie auf die Kinematik. In dieser umfassenderen und wegen ihrer Beziehungen zur Erscheinungswelt besonders wichtigen Disciplin finden Untersuchungen, die von scharfsinnigen Mathematikern zu ganz anderen Zwecken angestellt worden sind, eine wohl ziemlich unerwartete und dennoch ganz unmittelbare Verwerthung. —

Von demselben Verfasser erschien im gleichen Verlag:

Methoden zur Theorie der ternären Formen.

[XII u. 210 S.] gr. 8. 1889. geh. n. *M* 6.—

Eine Darstellung der Grundlagen der sogenannten symbolischen Methoden der Invariantentheorie, die, nach Ansicht des Verfassers, bei vielen speciellen Problemen der projektiven Geometrie das geeignetste, jedenfalls das eleganteste analytische Hilfsmittel bilden. Die Theorie der von Clebsch und Gordan angegebenen Reihenentwicklungen wird weitergeführt und der Zusammenhang mit den Begriffsbildungen der Lie'schen Gruppentheorie ausführlich erörtert. Die mitgetheilte Theorie der Differentialgleichungen der Invarianten, die in einen einzigen Ausdruck zusammengefasst werden, geht wesentlich hinaus über Untersuchungen, die später von S. Lie und u. Scheffers in deren „Vorlesungen über continuirliche Gruppen“ (Leipzig 1893) veröffentlicht worden sind.

Die Beschränkung auf ternäre Formen wurde gewählt, weil die entsprechenden Untersuchungen über quaternäre und höhere Formen sich in einem zu unvollkommenen Zustande befanden, um eine zusammenfassende Darstellung zu gestatten (wie es übrigens noch heute der Fall ist).

Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen.

(Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften,
Bd. XX, Nr. II. 1893.)

[148 S.] Lex.-8. 1893. geh. n. *M* 5.—

In einem ersten Abschnitt wird aus sphärischen Dreiecken eine Anzahl von endlichen und unendlichen Gruppen discreter Substitutionen abgeleitet. Es wird eine Eintheilung aller sphärischen Dreiecke in zwei Classen vorgenommen, die bereits Gauss bekannt, aber wieder in Vergessenheit gerathen war.

Der zweite und dritte Abschnitt handeln von Darstellungen gewisser goniometrischer Functionen der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks durch eindeutige Functionen unabhängiger Parameter also von der sogenannten Uniformisirung der Formeln der sphärischen Trigonometrie).

Im zweiten Abschnitt werden unter Anderem die Cosinus der Seiten und Winkel eindeutig ausgedrückt durch die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution und damit durch die zugehörigen

Euler'schen Parameter. Daraus ergibt sich eine Abbildung der sphärischen Dreiecke auf den Punktraum, in deren Theorie die sogenannten desmischen Tetraeder und die Kummer'sche Configuration auftreten, ferner eine in der Ebene ausführbare Construction der Winkel aus gegebenen Seiten und umgekehrt.

Im dritten Abschnitt wird die von Lagrange gefundene Darstellung sphärischer Dreiecke durch elliptische Functionen auf orthogonale Substitutionen übertragen, im Rahmen der Weierstrass'schen Theorie auf eine elegantere Form gebracht, und ausserdem verallgemeinert. Der Zusammenhang zwischen den Additionstheoremen der Functionen ζu , $\zeta_1 u$, $\zeta_2 u$, $\zeta_3 u$ wird, auf Grund gruppentheoretische Ueberlegungen, zum ersten Male vollständig dargelegt. Die dreigliedrigen (Weierstrass'schen) Additionstheoreme — 256 an der Zahl — werden auf 16 Familien von je 16 vertheilt, und alle zusammen werden durch ein übersichtlich gebautes System von linearen Gleichungen dargestellt. Zu jeder der 16 Familien gehört ein System von Additionstheoremen des Jacobi'schen Typus, das aus den genannten linearen Gleichungen durch elementare Eliminationen hervorgeht.

Eine Berichtigung und verschiedene Ergänzungen finden sich in Leipz. Ber. 1895, S. 553, und Amer. Journal of Mathematics, Bd. 16 (1894), S. 156.



Bestell-Zettel.

Bei _____ Buchhandlung

in _____ bestellt der Unterzeichnete hiermit aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig [zur Ansicht]:

E. Study, Geometrie der Dynamen. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 21.— In Halbfranz geh. n. *M.* 23.—

Auch in 2 Lieferungen:

— — — I. Lieferung geh. n. *M.* 7.60.

— — — II. Lieferung geh. n. *M.* 13.40.

— — — Methoden zur Theorie der ternären Formen. [XII u. 210 S.] gr. 8. 1889. geh. n. *M.* 6.—

— — — Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. [148 S.] Lex.-8. 1893. geh. n. *M.* 5.—

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Das Nichtgewünschte bitte durchzustreichen.

Soeben erschien:

B. G. TEUBNER'S SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND IV, 2.

THEORETISCHE ARITHMETIK

VON

DR. OTTO STOLZ
PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT INNSBRUCK.

UND

DR. J. A. GMEINER
A. O. PROF. A. D. DEUTSCHEN UNIVERSITÄT PRAG.

ZWEITE ABTHEILUNG.
DIE LEHREN
VON DEN REELLEN UND VON DEN COMPLEXEN ZAHLEN.

ZWEITE UMGEARBEITETE AUFLAGE
DER ABSCHNITTE V—VIII, X, XI DES I. UND I, II, V DES II. THEILES
DER VORLESUNGEN UEBER ALLGEMEINE ARITHMETIK VON O. STOLZ.



MIT NEUNZEHN FIGUREN IM TEXT.

Arithmetik hat hier die nämliche Bedeutung wie früher „allgemeine“ Arithmetik (Arithmetica universalis oder speciosa); es ist also damit die Lehre vom Rechnen mit den durch Buchstaben (species) dargestellten reellen und gemeinen complexen Zahlen gemeint. Das Beiwort „universalis“ hat indess in der letzten Zeit einen anderen Sinn angenommen, indem Sylvester u. A. unter „universal“ Algebra die Lehre von den Grössen und Zahlen im weitesten Sinne dieser Worte verstehen. Dem gegenüber ist die ehemalige „allgemeine“ Arithmetik zur „gewöhnlichen“ oder „gebräuchlichen“ geworden.

Wir wollen aber die reellen und gemeinen complexen Zahlen nicht bloss für sich, sondern als Unterarten allgemeinerer Begriffe der Grösse und des complexen Zahlensystemes aus beliebig vielen Einheiten, betrachten. Demnach werden auch diese Gegenstände der Untersuchung bilden und zwar soll dieselbe bis dahin geführt werden, wo die Zahlenarten der gewöhnlichen Arithmetik sich von ihnen abzweigen.

Auf eine Einleitung über den Grössenbegriff folgt zunächst die Lehre von den natürlichen, hierauf die Lehre von den rationalen Zahlen. Die letztere wird sowohl nach dem analytischen, als auch nach dem synthetischen Verfahren dargelegt. Besondere Aufmerksamkeit haben wir hier, wie auch später, der bisher etwas vernachlässigten Theorie des Rechnens mit den Decimalzahlen geschenkt.

Die Arithmetik ist erst eine selbständige Wissenschaft geworden, seitdem es gelungen ist, die Lehre von den irrationalen Zahlen ohne den Beistand der Geometrie zu entwickeln. Wir haben sie im VII. Abschnitte nach G. Cantor und Ch. Méray dargestellt, weil das von diesen Gelehrten ersonnene Verfahren die vollständige Durchführung derselben am leichtesten gestattet. Dabei wird dann auch gezeigt, dass die Verhältnisse der geraden Strecken den Cantor'schen reellen Zahlen gleichgesetzt werden dürfen.

An den Abschnitt über die irrationalen Zahlen schliesst sich einerseits die Lehre von den reellen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen als die am nächsten liegende Anwendung dieser Zahlen, andererseits die Lehre von den unendlichen Reihen mit reellen Gliedern. Pflegen wir ja eine irrationale Zahl als Summe von unendlich vielen rationalen Zahlen anzusehen.

Das System der reellen Zahlen wird durch Hinzufügung neuer Zahlen zu dem der gemeinen complexen Zahlen erweitert. Damit ist die gewöhnliche Arithmetik abgeschlossen; denn unter den Systemen von complexen Zahlen aus mehr als zwei Einheiten befindet sich kein einziges, wofür die nämlichen Rechnungsregeln wie für die gemeinen complexen Zahlen ohne Ausnahme gelten. Beim Beweise dieser Behauptung gelangen wir zum Satze, dass selbst wenn wir von diesen Regeln die Commutativität des Products aufgeben, doch nur ein Zahlensystem möglich ist: die Quaternionen.

Die gemeinen complexen Zahlen lassen sich geometrisch durch die Vektoren in der Ebene darstellen und es entsprechen den vier Rechnungsarten mit denselben gewisse planimetrische Constructionen. Die trigonometrische Form ihrer Ergebnisse ist wiederum für die Arithmetik von Wichtigkeit, indem man mit Hilfe derselben leicht die m^{ten} Wurzeln aus einer gemeinen complexen Zahl ermitteln kann.

Nunmehr erhebt sich von selbst die Frage nach der Erklärung der Potenz für complexe Werthe der Basis und des Exponenten. Wir

knüpfen sie nach einem von Cauchy angedeuteten und von Schlömilch wirklich durchgeführten Verfahren unmittelbar an die Lehre von der absoluten Potenz an. — Den Schluss des Werkes bilden die grundlegenden Sätze über die unendlichen Reihen mit complexen Gliedern.

Das von den soeben erwähnten Gegenständen gebildete Gebiet lässt sich dadurch kennzeichnen, dass zur Behandlung derselben der Begriff der stetigen Function nicht erforderlich ist. Freilich muss dann auf eine nach allen Seiten erschöpfende Entwicklung des Begriffs der complexen Potenz verzichtet werden.

Der Inhalt des Werkes deckt sich zum grössten Theile mit dem der Abschnitte I—VIII, X Nr. 1—12, XI Nr. 2—6 des ersten und der Abschnitte I, II, V Nr. 1—5 des zweiten Theiles der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ von O. Stolz. Diese Abschnitte erscheinen hier in einer neuen Bearbeitung. Insbesondere sind am II.—V. des ersten und am I. des zweiten Theiles bedeutende Aenderungen vorgenommen worden. Im letztgenannten Abschnitte, welchem der X. des vorliegenden Werkes entspricht, wurden die Untersuchungen von Weierstrass und Dedekind über die complexen Zahlen mit „Einheiten durch den oben angezogenen Satz von Frobenius über die Quaternionen ersetzt. Neu hinzugekommen ist der XII. Abschnitt nebst dem darauf sich beziehenden Theile des VIII. Nr. 12—19 des X. und der XII. Abschnitt sind von Gmeiner ausgearbeitet. Sämmtliche Abschnitte mit Ausnahme des I. und V. sind mit einschlägigen Übungen versehen, welche manchmal zur Fortführung der vorhergehenden Lehren dienen können.

Wir beabsichtigen auch die in diesem Buche nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ in neuer Auflage als ein eigenes Werk unter dem Titel: „Einleitung in die Functionentheorie nach Weierstrass“ herauszugeben.

Will der Leser bloss einen systematischen Aufbau der Arithmetik kennen lernen, so kann er den 5. und 6. und, falls er der ebenen Trigonometrie mächtig ist, auch den 11. Abschnitt übergehen. Der 5. Abschnitt erörtert nämlich im Rahmen einer allgemeineren Untersuchung die Eigenschaften des Systemes der geraden Strecken und der 11. beschäftigt sich mit dem Rechnen mit den Vektoren in der Ebene, wobei die Grundformeln der Trigonometrie sich ergeben. Während diese beiden Abschnitte eigentlich in die moderne Geometrie einschlagen, behandelt der 6. einen Gegenstand der alten Geometrie, die Euclid'sche Verhältnisslehre. Diese Lehre, obwohl an sich heutzutage entbehrlich, verdient als das klassische Muster der Grössenbildung, von deren Grundsätzen auch wir uns leiten lassen, einen Platz in unserm Werke.

Innsbrück und Prag.

Stolz. Gmeiner.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Einleitung. Begriff der Grösse und Zahl.

	Seite
1. Begriff der Grösse	1
2. Gleiche und ungleiche Grössen	2
3. Beispiele von Grössensystemen	3
4. Die Verknüpfungen der Grössen, namentlich in der Arithmetik	4
5. Die grössere und die kleinere Grösse	5
6. 7. Die Zahlen	7
8. Regeln über die Unterdrückung von Klammern	8
9. Eigene Bezeichnungen für gewisse Ausdrücke	10
10. Das Hauber'sche Theorem über die Umkehrbarkeit der Sätze	10

II. Abschnitt.

Die natürlichen Zahlen.

1. 2. Begriff der natürlichen Zahlen	12
3. Addition der natürlichen Zahlen	14
4. Subtraction der natürlichen Zahlen	17
5. Berechnung der Aggregate	19
6. 7. Multiplication der natürlichen Zahlen	21
8. Division der natürlichen Zahlen	24
9. Die Potenz	25
10. Die Zahlensysteme. Einführung der Null	27
11. Die vier Rechnungsarten mit den dekadischen Zahlen	28
12. Hilfsätze aus der Zahlentheorie	31
Uebungen zum II. Abschnitt	34

III. Abschnitt.

Analytische Theorie der rationalen Zahlen.

1. Die Thesis	37
2. Associatives und commutatives Gesetz der Thesis	39
3. 4. Die Lysis oder die Umkehrung der Thesis	40
5. Ungleichungen	44
6. Distributive Formeln	45
7. 8. Ableitung neuer Grössen aus den ursprünglich vorgelegten durch Paarung derselben. Für die neuen Grössen ist auch die Lysis stets möglich und eindeutig	47
9. Der Modulus der Thesis und die reciproke (inverse) Grösse	54
10. Ungleichungen für die Grössen-Paare	57

Analytische Schöpfung des Systems der rationalen Zahlen.

11. I. Aufstellung der absoluten gebrochenen Zahlen	57
12. II. Addition und Subtraction der absoluten rationalen Zahlen	59
13. III. Einführung der Null und der negativen Zahlen	61
14. IV. a) Multiplication der rationalen Zahlen	64
15. IV. b) Division der rationalen Zahlen	67
16. Bemerkung zur Erklärung der grösseren rationalen Zahl	69
17. Die Wurzeln. — Das bisher befolgte Verfahren der Zahlenbildung wird aufgegeben	70

IV. Abschnitt.

Synthetische Theorie der rationalen Zahlen. Die systematischen Brüche.

1. 2. Die absoluten gebrochenen Zahlen	74
3. Die relativen oder algebraischen ganzen Zahlen	77
4. Die relativen rationalen oder die algebraischen gebrochenen Zahlen	80
5. Darstellung der rationalen Zahlen durch die Zahlenlinie	82

Inhalt.	V
	Seite
6. Die systematischen Brüche	85
7. Die vier Rechnungsarten mit den Decimalbrüchen.	86
8. Einschliessung einer rationalen Zahl, welche sich nicht in einen systematischen Bruch verwandeln lässt, zwischen zwei systematische Brüche von beliebig vielen Stellen	88
9. Der zu einem periodischen, beliebig weit fortsetzbaren systematischen Bruch gehörige erzeugende Bruch	90
10. Dieser Bruch als Grenzwert eines systematischen Bruches bei ins Unendliche wachsender Stellenzahl.	91
Uebungen zum III. und IV. Abschnitt	93
1. Ueber die absoluten und gemeinen Brüche	93
2. Ueber die absoluten systematischen Brüche.	95
3. Ueber die relativen rationalen Zahlen	97

V. Abschnitt.

Stetige Systeme einer Dimension von absoluten und von relativen Grössen.

1. Absolute Grössen im engeren und weiteren Sinne	99
2. Folgerungen aus den Forderungen 1)—15)	103
3. Commensurable und incommensurable absolute Grössen im engeren Sinne	105
4. Das System der absoluten Strecken und seine Stetigkeit	107
5. Andere Beispiele von eigentlichen absoluten Grössen aus der Geometrie	109
6. Die Grössenvergleichung bei den griechischen Geometern (die Grundlage der sogenannten Exhaustionsmethode)	111
7. Stetiges System einer Dimension von absoluten Grössen	113
8. Ergänzung eines unstetigen Systems von absoluten Grössen zu einem stetigen System	116
9. Relative Grössen	117

VI. Abschnitt.

Theorie der Verhältnisse nach Euclid.

Ableitung der reellen Zahlen aus denselben.

1. Das arithmetische Verhältniss	120
2. Das geometrische Verhältniss. Gleichheit zweier Verhältnisse	121
3. Das grössere Verhältniss	123
4. Sätze über Proportionen und Ungleichungen. Erste Gruppe	125
5. Zweite Gruppe	127
6. Die vierte Proportionale zu drei gegebenen Grössen	128
7. Das zusammengesetzte Verhältniss	129
8. Die geometrischen Verhältnisse als Zahlen	130
9. Das Rechnen mit den geometrischen Verhältnissen	131
10. Beziehung der Verhältnisszahlen zu den reellen Zahlen der Arithmetik	132
11. Verhältnisse der stetigen relativen Grössen	133
Uebungen zum VI. Abschnitt	135

VII. Abschnitt.

Arithmetische Theorie der irrationalen Zahlen nach G. Cantor und Ch. Méray.

Die reellen Zahlen.

1. Arithmetische Theorie der irrationalen Zahlen	138
2. Der rationale Grenzwert einer Function von n bei $\lim n = +\infty$	139
3. Allgemeine Sätze über die Grenzwerte (und zwar zunächst die rationalen) der Functionen von n	141
4. 5. Convergente Functionen von n , das Convergenzprincip	144
6. Aufstellung der irrationalen Zahlen. Vergleichung der reellen Zahlen untereinander	150
7. Addition der reellen Zahlen	155
8. Subtraction der reellen Zahlen	156
9. Multiplication der reellen Zahlen	158
10. Division der reellen Zahlen	159
11. Stetigkeit des Systems der reellen Zahlen	160

VI

Inhalt.

Seite

12. Der allgemeine Begriff der eindeutigen Function von x und ihres endlichen Grenzwertes bei $\lim x = +\infty$	161
13. Nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass eine Function von x bei $\lim x = +\infty$ einen endlichen Grenzwert hat	163
14. Verallgemeinerung der Sätze über die Grenzwerte der Functionen von x bei $\lim x = +\infty$ in Nr. 3 und des 7. Satzes in Nr. 5	166
15. Die obere und untere Grenze (Schranke) von unbegrenzt vielen Zahlen f_n ($n = 0, 1, \dots$)	167
16. Die obere und untere Grenze (Unbestimmtheitsgrenze) einer Function f bei $\lim x = +\infty$, welche dabei keinen unendlichen Grenzwert hat	167
17. Unvollständige Decimalzahlen	17
18. Die Verhältnisse der relativen Strecken als reelle Zahlen	172
Uebungen zum VII. Abschnitt	177

VIII. Abschnitt.

Reelle Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

1. 2. Ganze positive Potenzen. Ungleichungen dafür	185
3. Potenzen der Binome. Der binomische Satz	187
4. Potenzen der Polynome. Der polynomische Satz	188
5. Die Wurzeln	189
6. Sätze über die absoluten Wurzeln	191
7. Die numerische Berechnung der m^{ten} Wurzeln aus einer absoluten Decimalzahl a	19
7*. Verbesserung der in Nr. 7 ermittelten Näherungswerte der m^{ten} Wurzeln aus a	197
8. Erweiterung des Potenzbegriffes auf rationale Exponenten	199
9. Ungleichungen für Potenzen mit rationalen Exponenten	200
10. Potenzen mit irrationalen Exponenten	204
11. Bestimmung der eindeutigen Function $f(x)$ durch die Functionalgleichung $f(x)f(y) = f(x+y)$ und Nebenbedingungen	204
12. Die Logarithmen	21
13. Allgemeine Eigenschaften der Logarithmen	21
14. Eine analytische Darstellung der Exponentialfunction e^x	214
15. Eine analytische Darstellung des natürlichen Logarithmus	219
Uebungen zum VIII. Abschnitt	221

IX. Abschnitt.

Die unendlichen Reihen mit reellen Gliedern.

1. Convergente und divergente Reihen	227
2. Die zur Convergenz einer unendlichen Reihe nothwendige und hinreichende Bedingung	230
3. Allgemeine Sätze über die unendlichen Reihen	231

Reihen mit positiven Gliedern.

4. Convergenz- und Divergenzkennzeichen	234
5. Sätze über diese Reihen	235
6. Hilfssatz über die Doppelreihen	239
7. Weitere Sätze über die Reihen mit positiven Gliedern	241

Reihen, welche sowohl positive als auch negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten.

8. Alternirende Reihen	243
9. Absolute und relative Convergenz der Reihen mit positiven und negativen Gliedern in unbegrenzter Anzahl	247
10. Sätze über absolut convergente Reihen	251
11. Hilfssatz über die Doppelreihen	252
12. Ueber die Grenzwerte einiger unendlicher Producte aus positiven Factoren	255

Inhalt.

VII

	Seite
13. Ein Satz über ganze Potenzreihen	257
14. Entwicklung der Exponentialfunction e^x in eine ganze Potenzreihe	258
15. Summirung der binomischen Reihe für die Werthe des Argumentes x zwischen -1 und $+1$	260
16. Die binomische Reihe für $x = -1$ und $x = +1$	263
17. Entwicklung der m^{ten} Wurzel aus einem Binom in eine ganze Potenzreihe	264
18. Die logarithmische Reihe	265
19. Weitere Potenzreihen für Logarithmen	267
20. Berechnung der gemeinen Logarithmen der Zahlen von 10^6 bis 10^7 auf sieben Stellen nach Koralek	268
Uebungen zum IX. Abschnitt	270

X. Abschnitt.

Analytische Theorie der complexen Zahlen.

1. Die Hamilton'schen Zahlenpaare	277
2. Complexe Zahlen mit zwei Einheiten. Ihre Addition und Subtraction	277
3. Einführung neuer Einheiten	279
4. Die grössere von zwei ungleichen complexen Zahlen	280
5. Multiplication der complexen Zahlen mit zwei Einheiten	280
6. I. Hauptfall. Die Multiplication ist distributiv, associativ und commutativ. a) Es ist ein Modulus vorhanden	282
7. b) Es ist kein Modulus vorhanden	286
8. II. Hauptfall. Die Multiplication ist zwar distributiv und associativ, jedoch nicht commutativ	286
9. Die gemeinen complexen Zahlen	288
10. Die Quadratwurzel aus einer solchen Zahl. Die Kubikwurzel lässt sich daraus algebraisch nicht ziehen	289
11. Der absolute Betrag einer gemeinen complexen Zahl	291
12. Complexe Zahlen mit n Einheiten. Addition und Subtraction derselben	293
13. Multiplication der complexen Zahlen mit n Einheiten	296
14. Division der complexen Zahlen mit n Einheiten	297
15. Zahlensysteme mit n Einheiten, die eine associative Multiplication zulassen	301
16. Associative Zahlensysteme mit n Einheiten, die eine vollständige Division zulassen; insbesondere solche, in denen ein Product nur zugleich mit einem Factor verschwinden kann	304
17. Die Hamilton'schen Quaternionen. Ihre Multiplication	310
18. Die beiden Divisionen der Quaternionen	314
19. Der absolute Betrag (Tensor) einer Quaternion	316
Uebungen zum X. Abschnitt	317

XI. Abschnitt.

Geometrische Theorie der gemeinen complexen Zahlen.

1. Literarisches	321
2. Die Strecken in der Euclid'schen Ebene nach Grösse und Lage (Vektoren)	322
3. Addition und Subtraction derselben	323
4. Die Strecken in einer und in parallelen Geraden	325
5. Systematische Darstellung der Strecken der Ebene	327
6. Multiplication der Strecken der Ebene	332
7. Darstellung der gemeinen complexen Zahlen durch die Vektoren in der Ebene	337
8. Division der Strecken der Ebene	338
9. Conjugirte Gleichungen unter den Strecken	340
10. Die trigonometrischen Functionen	341
Uebungen zum XI. Abschnitt	345
1. Planimetrische Aufgaben	345
2. Aufgaben aus der Trigonometrie und analytischen Geometrie	349

XII. Abschnitt.

Complexe Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

	Seite
1. Producte, Potenzen und Quotienten von complexen Zahlen in trigonometrischer Form	352
2. Die Wurzeln aus complexen Zahlen	354
3. Die m^{ten} Einheitswurzeln	356
4. Sätze über die allgemeinen Wurzeln	357
5. Die natürliche Potenz e^x	361
6. Die natürlichen Logarithmen	365
7. Sätze über die natürlichen Logarithmen	366
8. Die allgemeine Potenz	370
9. Sätze über die allgemeinen Potenzen	373
Uebungen zum XII. Abschnitt.	377

XIII. Abschnitt.

Unendliche Reihen mit complexen Gliedern.

1. Grenzwert einer complexen Function von z bei $\lim z = +\infty$. . .	381
2. Convergente und divergente Reihen	382
3. Die zur Convergenz einer unendlichen Reihe nothwendige und hinreichende Bedingung	383
4. Allgemeine Sätze über die unendlichen Reihen	385
5. Absolute und relative Convergenz	386
6. Sätze über die absolut convergenten Reihen	387
7. Entwicklung des Hauptwerthes e^z in eine ganze Potenzreihe. Erklärung der Function $\cos x$ und $\sin x$ für complexen Werthe von x . . .	389
8. Schluss	392
Uebungen zum XIII. Abschnitt	392
Berichtigungen und Nachträge.	395
Sachenverzeichniss	397

Bestell-Zettel.

Bei der

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig [zur Ansicht]:

Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik. Zweite umgearbeitete Auflage. gr. 8. I. Abth. [IV u. 98 S.] 1901.
 In Leinwbd. geb. n. \mathcal{M} 3.—

— II. Abth. [XI u. 402 S.] 1902. In Leinwbd.
 geb. n. \mathcal{M} 8.—

— In 1 Band in Leinwbd. geb. n. \mathcal{M} 10.60.

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Soeben erschien:

HERMANN GRASSMANN'S
GESAMMELTE
MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE.

AUF VERANLASSUNG DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

UND UNTER MITWIRKUNG DER HERREN:

**JACOB LÜROTH, EDUARD STUDY, JUSTUS GRASSMANN,
HERMANN GRASSMANN DER JÜNGERE, GEORG SCHEFFERS**

HERAUSGEGEBEN

VON

FRIEDRICH ENGEL.

ZWEITER BAND: ZWEITER THEIL:
**DIE ABHANDLUNGEN ZUR MECHANIK
UND ZUR MATHEMATISCHEN PHYSIK.**

HERAUSGEGEBEN

VON

JACOB LÜROTH UND FRIEDRICH ENGEL.

MIT 51 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Vorbemerkungen.

Als ich im Jahre 1896 den zweiten Theil des ersten Bandes dieser Ausgabe der Oeffentlichkeit übergab, ahnte ich nicht, dass sich das Erscheinen des zweiten Bandes so über die Maassen verzögern würde. Der Druck der ersten Abtheilung dieses Bandes, die die Abhandlungen über Geometrie und Analysis enthalten sollte, wurde zwar schon im Oktober 1899 begonnen, machte jedoch aus Ursachen, die zu beseitigen nicht in meiner Macht stand, die ich aber hier nicht auseinandersetzen will, nur äusserst langsame Fortschritte. Unter diesen Umständen war gar nicht abzusehen, wann die Abhandlungen über Mechanik, die Lüröth mir schon 1893 druckfertig zugesandt hatte, an die Reihe kommen würden. Ich bedaure daher nur, dass ich nicht schon längst auf den Ausweg verfallen bin, den mir Lüröth Anfang 1902 vorgeschlagen hat und den ich jetzt gewählt habe, nämlich die Abhandlungen über Mechanik zusammen mit denen über mathematische Physik besonders paginirt als zweiten Theil des zweiten Bandes herauszugeben. Der erste Theil des zweiten Bandes, Geometrie und Analysis, wird hoffentlich in nicht allzuferner Zeit nachfolgen.

Während Lüröth in dem vorliegenden Theile Alles zusammengestellt hat, was Grassmann über Mechanik veröffentlicht hat und was aus dem Nachlass zur Veröffentlichung geeignet erschien, habe ich mich, was die mathematische Physik angeht, auf die bereits gedruckten Arbeiten beschränkt und den Nachlass nur in den Anmerkungen soweit verwerthet, als es zur Erläuterung der gedruckten Arbeiten und zur wirklichen Ausführung einiger darin bloss angedeuteter Betrachtungen erforderlich war. Alles übrige, was der Nachlass noch sonst Mittheilenswerthes über mathematische Physik enthält, verspare ich auf den dritten Band.

Meinen Kollegen H. Hirt in Leipzig, J. Sommer in Bonn, E. v. Weber in München verdanke ich einige Nachweisungen, die mir sonst nur schwer erreichbar gewesen wären. Einen Beitrag von O. Külpe in Würzburg habe ich auf S. 254 verwerthet. Allen Genannten möchte ich auch hierdurch meinen Dank für ihre Unterstützung aussprechen.

Leipzig.

Friedrich Engel.

Inhaltsverzeichnis

zum zweiten Theile des zweiten Bandes.

II. Abtheilung.

Analytische Mechanik,

herausgegeben von Jacob Lüroth.

	Seite
I. Grundriss der Mechanik (für den Unterricht in Prima). Programm, Stettin 1867	3—45
II. Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre. Mathematische Annalen Bd. 12 (1877)	46—72
IIa. Selbstanzeige der Abhandlung: Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre. Königsbergers Repertorium Bd. II (1879)	72—74
Aus dem Nachlass:	75—110
III. Drehungen um einen Punkt (Neubearbeitet 1877)	75—81
IV. Bewegung eines auf einer festen Fläche gleitenden festen Körpers	81—82
V. Einige Schwerpunktsbestimmungen	82—83
VI. Darstellung der Statik nach Lagrange	83—88
VII. Statisches Schwimmen	88—91
VIII. Bestimmung der Kraft zu einer gegebenen Bahn	91—93
IX. Bewegung auf einer sich gleichmässig drehenden Curve	93—95
X. Zur Theorie des Foucault'schen Pendels (1853)	95—96
XI. Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre. Zweite Abhandlung (1877)	97—101
XII. Trägheitsmoment	101—105
XIII. Bewegung durch einen Stoss (1839 und 1842)	105—107
XIV. Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte	107—110
Bemerkung des Herausgebers	111—112

III. Abtheilung.

Mathematische Physik,

herausgegeben von Friedrich Engel.

I. Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Krystallbildung. Programm, Stettin 1839	115—146
II. Neue Theorie der Elektrodynamik. Poggendorffs Annalen Bd. 64 (1845)	147—160
III. Zur Theorie der Farbenmischung. Poggendorffs Annalen Bd. 89 (1853)	161—173
IV. Uebersicht der Akustik und der niedern Optik. Programm, Stettin 1854	174—202
Akustik	174—189
Optik	189—202
V. Zur Elektrodynamik. Crelles Journal Bd. 83 (1877)	203—210

	Seite
Va. Selbstanzeige der Abhandlung: Zur Elektrodynamik. Koenigsbergers Repertorium Bd. 2 (1879)	211—212
VI. Bemerkungen zur Theorie der Farbenempfindungen. Anhang zu W. Preyers Elementen der reinen Empfindungslehre, Jena 1877	213—221
VII. Ueber die physikalische Natur der Sprachlaute. Wiedemanns Annalen Bd. 1 (1877)	222—240
Verzeichniss der wichtigsten Stellen, an denen die vorliegende Ausgabe von den Originaldrucken abweicht . .	241—243
Zu den Abhandlungen über Mechanik	243
Anmerkungen zu den Abhandlungen über mathematische Physik	244—259
Handschriftliche Bemerkung Grassmanns zu der Arbeit „Neue Theorie der Elektrodynamik“	248
Auszug aus einem 1852 gehaltenen Vortrage Grassmanns über die Farbenlehre	252
Handschriftliche Notiz Grassmanns „Zur Theorie der Farbmischung“, 1876	252—254
Auszug aus einem 1854 gehaltenen Vortrage Grassmanns über die physikalische Natur der Sprachlaute	257—259
Sachregister zu den Abhandlungen über Mechanik und mathematische Physik	260—264
Namenregister	264
Druckfehler und Berichtigungen	265—266



Bestell-Zettel.

Bei

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:

Herm. Grassmanns Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke. Herausgegeben von Fr. Engel.
3 Bände. gr. 8. geh.

- Bd. I, 1: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Mit einem Bilde Grassmanns in Holzschnitt und 85 Fig. im Text. [XV u. 435 S.] 1894. n. M. 12.—
- I, 2: Die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Fig. im Text. [VIII u. 511 S.] 1896. n. M. 16.—
- II, 1: Erscheint im Januar 1903.
- II, 2: Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Fig. im Text. [VIII u. 266 S.] 1902. n. M. 14.—
- III: In Vorbereitung.

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Das nicht Gewünschte bitte gefl. durchzustreichen.

Dr. E. Wrobel

7. Die Prüfung werden zwei Exemplare zur Ansicht gestellt, auch liefert solche
1000. Buchhandlung

- Braunmühl, Professor Dr. A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II. Hälfte: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. [XI u. 264 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 11. —
- Buohrer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektor-Analyse. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 2.40.
- Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. I. Teil. [X u. 336 S.] n. \mathcal{M} 16. —; II. Teil. [IV u. 294 S.] n. \mathcal{M} 14. —
- Cauber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung. Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 368 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. \mathcal{M} 24. —
- Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. HERMANN FLEISCHER in Göttingen. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 8. — In Leinwand geb. n. \mathcal{M} 9. —
- Föppl, Prof. Dr. Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. \mathcal{M} 44. —
I. Band. Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1902.) 2. Aufl. [XIV u. 612 S.] geb. n. \mathcal{M} 19. —
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1902. geb. n. \mathcal{M} 12. —
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. \mathcal{M} 14. —
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1902.) 2. Aufl. 1903. [XV u. 608 S.] geb. n. \mathcal{M} 15. —
- König, Julius, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 18. —; geb. n. \mathcal{M} 20. —
- Kruse, Dr. Adolf, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. \mathcal{M} 24. —
- Schenk, Dr. ing. Julius, Festigkeitsberechnung größerer Drehmaschinen. Mit 48 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 168 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 1.60.
- Schreiber, Dr. K., die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 128 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 3.50.
- Die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Carl-Friedrichs-Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebräuchlichen Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 56 Abbildungen im Text. [XII u. 248 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 6. —; geb. n. \mathcal{M} 6.80.
- Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. BOLLMANN und E. ZEHNEN. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 6. —
- Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 21. —; geb. n. \mathcal{M} 22. —
- Wölffing, Dr. Ernst, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil. Heine. Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über bibliographische Hilfsmittel der Mathematik. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Herausgegeben von MORITZ CANTOR. Heft XVI, 1.) [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 16. —; geb. n. \mathcal{M} 15. —

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.



ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1866 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1866–1896) UND M. CANTON (1896–1903).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

BEIRATH

ADOLF MEYER, ADOLF VON BACH, G. HADAMARD, R. HELMHOLTZ, F. KLERN,
C. LIEBIG, H. A. LORENZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEIDEMANN, H. WEISS.

HINLEITUNGSBEIHEFT

1903

B. WEHMKE UND C. RUNGE
H. WEISS

49. BAND 2. HEFT.

GESAMT 10 HEFEN IN FERTIG UND DREI DOPPELJAHRE IN VORBEREITUNG.

Erschienen am 22. September 1903



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 8.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 32 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

	Seite
Über die günstigsten Punktlagen beim „Einschneiden“. Von Otto Eggert in Berlin. Mit 18 Figuren im Text und einer Doppeltafel in Lithographie (Taf. IV)	146
Geometrisches über einige Abbildungen der Kugel in der Kartentheorie. Von A. Weiler in Zürich. Mit 21 Figuren im Text	169
Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels. Von Anton Grünwald in Prag-Bubentz. Mit 16 Figuren auf 2 lithogr. Doppeltafeln (V u. VI)	211
Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. Von J. Horn in Clausthal	246
Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Diometrie. Von F. Ludwig in Greiz	269
Kleinere Mitteilungen	277
Bücherschau	279
Study, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Von Wirtinger	279
Veröffentlichung des Königl. Preussischen Geodätischen Instituts. Astronomisch-geodätische Arbeiten erster Ordnung. Bestimmung der Längswinkel aus Potsdam—Pulkowa im Jahre 1901. Von W. Ebert	283
Gassfeldt, Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen und die Entwicklung der hierfür maßgebenden mathematisch-geometrischen Begriffe. Von E. W. Wirtz	283
Ganther, Astronomische Geographie. Von C. W. Wirtz	285
v. Dillmann, Astronomische Briefe. Von C. W. Wirtz	285
Schubert, Neuer einfacher Kalender zur Bestimmung des Wochentages für jedes beliebige Datum nach und vor Christi Geburt. Von C. W. Wirtz	285
Neue Bücher	288
Eingelaufene Schriften	288

Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren: Fr. Berger, A. Börsch, P. Bräuer, K. Doshismann, E. Gaus, L. Grätz, G. Hamel, H. Heilmann, E. Heun, W. Hart, A. Kempe, O. Erach, A. Ludin, R. Mehmke, O. Mohr, R. Nothe, C. Runge, Joh. Schnöckel, Fr. Schar, A. Sommerfeld, P. Stückel, S. Wellisch, C. W. Wirtz, A. Wirtinger.

Soeben erschien:

VORLESUNGEN
ÜBER
PROJEKTIVE GEOMETRIE

VON

FEDERIGO ENRIQUES,
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BOLOGNA.

DEUTSCHE AUSGABE

VON

Dr. HERMANN FLEISCHER.

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT

VON

FELIX KLEIN

UND 187 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Zur Einführung.

Italien ist seit zwei Jahrzehnten das eigentliche Zentrum fortschreitender Arbeiten auf dem Gebiet der projektiven Geometrie. Dies ist in Fachkreisen bekannt genug, und in der Tat bildet die italienische Sprache für die Verbreitung theoretischer Kenntnisse kein ernstliches Hindernis. Aber die italienischen Forscher sind längst nach praktischer Seite weitergegangen: sie haben es nicht verschmäht, aus ihren Forschungen pädagogische Folgerungen zu ziehen. Die sehr bemerkenswerten Lehrbücher für Hoch- und Mittelschulen, welche solcherweise entstanden sind, können den weiten Kreisen, für die sie Interesse haben, nur durch geeignete Übersetzungen zugänglich gemacht werden. Und daß dies geschieht, erscheint gerade in Deutschland um so erwünschter, als unsere Lehrbuchliteratur den Kontakt mit der vorwärts drängenden Forschung gar zu sehr verloren hat. Übersetzer und Verlagshandlung, welche uns hier eine deutsche Übertragung der projektiven Geometrie von Enriques vorlegen, dürfen also von vornherein vielseitiger Zustimmung sicher sein.

Es erübrigt, daß ich über den besonderen Inhalt des Buches einiges Empfehlende sage. Es fehlt ja bei uns nicht an anregend geschriebenen Werken, die zur Einführung in die projektive Geometrie geeignet sind, aber ich kenne keines, welches den systematischen Aufbau dieser Disziplin in einer dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechenden Form in so durchsichtiger und gleichzeitig so vollständiger Weise darböte, wie das vorliegende. Dabei ist die Darstellung überall anschaulich und doch völlig streng, wie man es nach den scharfsinnigen Untersuchungen über die Grundlagen der projektiven Geometrie, welche in früheren Aufsätzen des Verfassers niedergelegt sind, nicht anders erwarten wird. Besonders bemerkenswert ist die Behandlung des Metrischen: die klare Herausarbeitung seiner Begründung durch das „Absolute“, — daher die Betonung, daß dieses Absolute gegeben sein muß (in der Ebene etwa durch einen Kreis

mit bekanntem Mittelpunkt), wenn es sich um die projektive Lösung metrischer Aufgaben handelt —, die Herleitung von Kreiskonstruktionen aus Kegelschnittkonstruktionen, die Untersuchung metrischer Dinge in der unendlich fernen Ebene etc. etc.

Es ist nicht zu zweifeln, daß Enriques' Buch sich in der deutschen Übertragung ebenso zahlreiche Freunde erwerben wird, wie im italienischen Original. Vielleicht gestattet der Erfolg, den ich erwarte, recht bald, daß demnächst auch die interessanten Studien, welche Enriques vor kurzem über Fragen der Elementargeometrie veröffentlicht hat¹⁾, dem deutschen Publikum in Übersetzung vorgelegt werden.

Göttingen.

F. Klein.

1) Questioni riguardanti la geometria elementare. Bologna, Zanichelli, 1900, von denen z. Z. eine deutsche Ausgabe von H. Fleischer für den Verlag von B. G. Teubner besorgt wird.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1
Erstes Kapitel.	
Fundamentale Sätze.	
§ 1. Geometrische Grundgebilde	5
§ 2. Uneigentliche Elemente	8
§ 3. Erste Gruppe von fundamentalen Sätzen der projektiven Geometrie	12
§ 4. Projizieren und Schneiden	14
§ 5. Die natürliche cyklische Anordnung der Elemente eines Gebildes erster Stufe	16
§ 6. Projektiver Charakter der natürlichen cyklischen Anordnung eines Gebildes erster Stufe	24
Zweites Kapitel.	
Gesetz der Dualität. — Einleitende Sätze.	
§ 7. Gesetz der Dualität im Raume	28
§ 8. Beispiele für die Dualität im Raume	32
§ 9. Gesetz der Dualität in den Gebilden zweiter Stufe.	35
§ 10. Satz von den perspektiven und den homologen Dreiecken und korre- lative Sätze	42
§ 11. Satz von den perspektiven und den homologen Vierecken und korre- lative Sätze	48
Drittes Kapitel.	
Harmonische Gruppen.	
§ 12. Harmonische Gruppen von vier Punkten und von vier Ebenen . . .	51
§ 13. Vertauschungen unter den Elementen einer harmonischen Gruppe . .	53
§ 14. Harmonische Gruppen von vier Strahlen eines Büschels	55
§ 15. Erhaltung der harmonischen Gruppen in der durch Projektionen und Schnitte hergestellten Beziehung zwischen zwei Gebilden erster Stufe	58
§ 16. Eine fundamentale Frage	61
§ 17. Metrische Eigenschaften der harmonischen Gruppen	65
Viertes Kapitel.	
Das Axiom der Stetigkeit und seine Anwendungen.	
§ 18. Das Axiom der Stetigkeit	68
§ 19. Geordnete Beziehungen	71
§ 20. Ein Paar, das zwei andere harmonisch trennt	77

Fünftes Kapitel.

Der Fundamentalsatz der Projektivität.

§ 21. Der Fundamentalsatz. Gedankengang des Beweises	80
§ 22. Erster Hilfssatz	83
§ 23. Zweiter Hilfssatz.	84
§ 24. Der v. Staudtsche Fundamentalsatz. Gedankengang des Beweises . .	84
§ 25. Beweis des v. Staudtschen Fundamentalsatzes	84

Sechstes Kapitel.

Projektivität zwischen Gebilden erster Stufe.

§ 26. Projektive windschiefe Linien	87
§ 27. Perspektive Gebilde in der Ebene	89
§ 28. Projektive Gebilde in der Ebene	92
§ 29. Ähnliche Punktreihen und gleiche Strahlenbüschel	94
§ 30. In einander liegende projektive Gebilde	98
§ 31. Doppelemente einer Projektivität zwischen in einander liegenden Gebilden erster Stufe	100
§ 32. Direkte und inverse Kongruenz zwischen in einander liegenden Punkt- reihen und eigentlichen Büscheln einer Ebene	102
§ 33. Gruppen von vier projektiven Elementen	106
§ 34. Doppelverhältnis von vier Elementen eines Gebildes erster Stufe . .	112
§ 35. Projektive Transformierte einer Projektivität. Absolute Invariante	119

Siebentes Kapitel.

Involution in Gebilden erster Stufe.

§ 36. Involution	122
§ 37. Sinn einer Involution	124
§ 38. Hyperbolische Involutionen	127
§ 39. Satz vom Viereck	130
§ 40. Metrische Eigenschaften der Involution in der Punktreihe	132
§ 41. Involutionen im Büschel	136
§ 42. Hinweis auf die zyklischen Projektivitäten	139

Achstes Kapitel.

Projektivitäten zwischen Gebilden zweiter Stufe.

§ 43. Definitionen	140
§ 44. Fundamentalsatz	143
§ 45. Bestimmung der Projektivität zwischen Gebilden zweiter Stufe . .	144
§ 46. Perspektive Gebilde zweiter Stufe	150
§ 47. Homologie	151
§ 48. Involution	157
§ 49. Doppelemente einer ebenen Kollineation	158
§ 50. Besondere ebene Kollineationen vom metrischen Standpunkte aus .	160
§ 51. Polarität in der Ebene	171
§ 52. Von einer Polarität erzeugte Involution konjugierter Elemente in einem Gebilde erster Stufe	172

	Seite
§ 53. Klassifikation der ebenen Polaritäten	176
§ 54. Die orthogonale Polarität im Bündel	179
§ 55. Erweiterung des Gesetzes der Dualität in den Gebilden zweiter Stufe	183

Neuntes Kapitel.

Die Kegelschnitte.

§ 56. Definitionen	187
§ 57. Eigenschaft von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt .	193
§ 58. Durchmesser der Kegelschnitte	196
§ 59. Achsen der Kegelschnitte	198
§ 60. Satz von v. Staudt	199
§ 61. Satz von Steiner: projektive Erzeugung der Kegelschnitte	201
§ 62. Besondere metrische Fälle der projektiven Erzeugung eines Kegelschnitts. Kreis und gleichseitige Hyperbel	205
§ 63. Bestimmungstücke für einen Kegelschnitt	207
§ 64. Sätze von Pascal und Brianchon	216
§ 65. Satz von Desargues	223

Zehntes Kapitel.

Projektivität zwischen Kegelschnitten.

§ 66. Definition. Fundamentalsatz	229
§ 67. Projektivität auf einem Kegelschnitt. Satz des Apollonius	233
§ 68. Involution	238
§ 69. Äußere und innere Punkte, Sekanten und äußere Gerade	241
§ 70. Reelle und ideelle Durchmesser. Scheitel	245
§ 71. Homologe Kegelschnitte. Anwendungen. Flächeninhalt der Ellipse	247

Elftes Kapitel.

Bestimmte Aufgaben.

§ 72. Allgemeines. Aufgaben ersten Grades	253
§ 73. Aufgaben zweiten Grades.	256
§ 74. Mit Lineal und Zirkel lösbare Aufgaben	264
§ 75. Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, die zwei gegebene gemeinsame Elemente haben.	269
§ 76. Aufgaben dritten Grades. Bestimmung der Doppelpunkte einer ebenen Kollineation. Achse einer Kongruenz im Bündel	274

Zwölftes Kapitel.

Eigenschaften der Brennpunkte der Kegelschnitte.

§ 77. Brennpunkte.	281
§ 78. Leitlinien. Winkeleigenschaften der Brennpunkte	285
§ 79. Streckeneigenschaften der Brennpunkte	288
§ 80. Konstruktion mit Hilfe der Brennpunkte	292

Dreizehntes Kapitel.

Die metrischen Eigenschaften der Kegel zweiten Grades.

§ 81. Die Achsen der Kegel zweiten Grades	296
§ 82. Kreisschnitte und Fokalachsen des Kegels zweiten Grades	299
§ 83. Achsen und Fokalachsen des Zylinders zweiten Grades	304
§ 84. Kreisschnitte des Zylinders	306

Vierzehntes Kapitel.

Projektivität zwischen Gebilden dritter Stufe.

§ 85. Definitionen	309
§ 86. Fundamentalsatz	310
§ 87. Bestimmung der Projektivität zwischen Gebilden dritter Stufe	313
§ 88. Homologie	321
§ 89. Einachsige und zweiachsige Kollineation	324
§ 90. Besondere Kollineationen vom metrischen Standpunkte aus	327
§ 91. Kongruenzen	330
§ 92. Erweiterung des Gesetzes der Dualität im Raume	335

Anhang.

I. Gruppen von Projektivitäten	337
II. Abstrakte Geometrie	343
III. Transformationen des Raumes, die Kugeln in Kugeln verwandeln	346
IV. Projektive Koordinaten	349
V. Imaginäre Elemente	354
VI. Historisch-kritische Notiz über die Entstehung der Fundamentalbegriffe der projektiven Geometrie	357

Sachregister	369
------------------------	-----

**Bestell-Zettel.**

Bei

Buchhandlung in

bestelle ich hiermit ein Exemplar des im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig soeben erschienenen Werkes [zur Ansicht]:

Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie.

Deutsche Ausgabe von H. FLEISCHER. Mit einem Einführungswort von FELIX KLEIN und 187 Figuren im Text.

[XIV u. 374 S.] gr. 8. geh. n. M. 8.—. geb. n. M. 9.—.

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Das Nichtgewünschte bitte gefl. durchzustreichen.



Soeben erschien:

GRUNDLINIEN DES WISSENSCHAFTLICHEN RECHNENS

VON

DR. HEINRICH BRUNS,

PROFESSOR DER ASTRONOMIE AN DER UNIVERSITÄT ZU LEIPZIG.

[VI u. 159 S.] gr. 8. 1903. Geh. *M* 3.40, in Leinw. geb. *M* 4.—

Der Verfasser hatte bei den Übungen in seinem Seminar für „wissenschaftliches Rechnen“ schon vor längerer Zeit damit begonnen, den Teilnehmern die zur Vorbereitung erforderlichen mathematischen Entwicklungen autographiert in die Hand zu geben, um dadurch Zeit für die Beschäftigung mit besonderen Aufgaben zu gewinnen. Diese Aufzeichnungen werden hier in etwas erweiterter Gestalt der Öffentlichkeit übergeben, da es sich um Dinge handelt, für die es bisher an einer handlichen Zusammenstellung fehlte, und die überdies außerhalb des Kreises der berufsmäßigen Rechner keineswegs so bekannt sind, wie sie es bei ihrer erprobten Nützlichkeit verdienen.

Die Darstellung ist, da es sich in erster Linie um einen Leitfaden für den akademischen Unterricht handelt, auf die zum Verständnis unentbehrlichen Entwicklungen beschränkt: der Lehrer ist ohnehin genötigt, bei der Auswahl und Erläuterung der jedesmal zu stellenden Aufgaben auf die Vorbildung der Zuhörer Rücksicht zu nehmen.

Inhalt.

Einführung.	Seite
§ 1—3. Geschichtliches	1
§ 4. Gliederung der Rechentechnik	3
§ 5—6. Hilfsmittel; Maschinen	4
§ 7. Tafeln	7
§ 8. Gliederung der Darstellung	9
I. Differenzen und Summen.	
§ 9—11. Das Differenzenschema; Erweiterung durch die Spalten; erzeugende Funktionen	11
§ 12. Das Umklappen des Schemas	14
§ 13—14. Das Schema einer Verbindung; Zwischengrößen; Fehlerschema	14
§ 15. Verhalten der Tafeldifferenzen	16
§ 16—17. Bezeichnung von <i>Gauß</i> ; Haupt- und Zwischentabellen; Beispiel	17
§ 18—19. Analytische Darstellung der Differenzen; Bereich der Gültigkeit	20
§ 20—21. Ganze Funktionen	23
§ 22. Kontrolle durch Differenzen	26
§ 23. Zweifelhafte Abrundung	27
II. Interpolation bei Tafeln.	
§ 24. Aufgabe	29
§ 25. Formel von <i>Lagrange</i>	29
§ 26—29. Die Formel <i>J</i> ; die Korrektur; die Konvergenz	31
§ 30—32. Die Formeln <i>N, G, G', G'', S, B</i>	37
§ 33. Zusammenhang mit der Formel von <i>Lagrange</i>	41
§ 34—39. Vergleichung und Benutzung von <i>N, G, S, B</i>	42
§ 40. Interpolation in die Mitte	50
§ 41—42. Interpolation bei Tabulierungen	51
§ 43—47. Wirkung der Abrundungsfehler	54
III. Numerische Differentiation.	
§ 48. Grundformel	62
§ 49—51. Gebrauchsformeln	63
IV. Numerische Integration: Summenmethode.	
§ 52. Allgemeine Bemerkungen	68
§ 53—55. Die Hauptformeln und die Bestimmung der Koeffizienten	69
§ 56. Bestimmung der Konstanten	73
§ 57—58. Beispiel	75
§ 59. Allgemeine Bemerkungen	78
§ 60—62. Die Integration von Differentialgleichungen	80
§ 63. Die Summenmethode bei Tabulierungen	86
V. Numerische Integration: Viereckverbesserung.	
§ 64. Aufgabe	89
§ 65—66. Trapezverbesserung	90
§ 67. Rechteckverbesserung	93
§ 68. Vergleichung mit der Summenmethode	94

VI. Numerische Integration: Mittelwertmethoden.

	Seite
§ 69—70. Allgemeine Form der Aufgabe	95
§ 71—72. Gewichte für den Fall einer Potenzreihe	98
§ 73—74. Gewichte von <i>Cotes</i> ; Regel von <i>Simpson</i>	100
§ 75—77. Lösung von <i>Gauß</i>	103
§ 78—81. Fall einer trigonometrischen Reihe	107

VII. Trigonometrische Reihen.

§ 82—84. Rechnung mit einem regelmäßigen Vieleck	114
§ 85—86. Vereinfachungen und Kontrolle	118
§ 87—88. Zusammensetzung von Vielecken	121
§ 89. Hilfssatz über lineare Systeme	124
§ 90—91. Das unregelmäßige Vieleck	126
§ 92. Schlußkontrollen	129
§ 93—97. Verfahren nach <i>Tschebyschef</i>	129
§ 98. Einfluß der Abrundungsfehler	136

VIII. Rekursionsformeln.

§ 99. Dreigliedrige Formen	139
§ 100. Rechnung nach vorwärts	140
§ 101—103. Rechnung nach rückwärts	143
§ 104. Ausnahmefälle	147

IX. Interpolation im weiteren Sinne.

§ 105—106. Aufgabe	149
§ 107. Methode der kleinsten Quadrate	152
§ 108—110. Verfahren von <i>Cauchy</i>	155

**Bestell-Zettel.**

Bei

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B. G. Teubner
in Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:

Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens.
[VI u. 159 S.] gr. 8. 1903. Geh. *M* 3.40, in Leinw. geb.
M 4.—

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Vorlesungen über numerisches Rechnen

von **J. Lüroth**,

Professor an der Universität Freiburg i. Br.

[VI u. 194 S.] gr. 8. 1900. geh. *M.* 8.—

Der Verfasser versucht in dem vorliegenden Buche, dem Lehrer oder dem Studierenden der Mathematik oder dem angehenden praktischen Rechner eine Auswahl der wichtigsten Methoden und Hilfsmittel für das numerische Rechnen vorzuführen. Er beschränkt sich aber dabei auf die Mittel zur Erzielung großer Genauigkeit. Von dem Inhalt des Werkes geben die folgenden Kapitelüberschriften eine Vorstellung: Allgemeine Bemerkungen, die direkten Operationen, die Rechenmaschinen, die Division, das Rechnen mit ungenauen Zahlen, die Fehler bei Benutzung mathematischer Tafeln von kleiner Stellenzahl, die Benutzung von Tafeln mit mehr als sieben Stellen, Hilfsmittel zur Berechnung von Logarithmen mit mehr als sieben Stellen, die Ausziehung der Wurzeln, die trinomischen Gleichungen.

Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens

von **M. Cantor**,

Professor.

2. Aufl. [X u. 155 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. *M.* 1.80.

„Das Werk behandelt in überaus feiner, klarer Weise alles, was der Lehrer an Fortbildungsschulen, Handwerker- und Fachschulen seinen Schülern vorzutragen hat. Wenn die oft überaus dürftigen Notizen in den bez. Rechenbüchern nicht genügen, so wird das Werk von Cantor mit Genuß lesen. Behandelt werden unter anderem: Zinsrechnung, Normalzinsfuß, Kontokorrente nach den verschiedenen Methoden, Kurszettel, Wertpapiere, Hypotheken, Wechsel, Arbitragen, Zinsseszinsen, Amortisierung von Anleihen etc. etc. Ferner findet sich vieles von allgemeinem Interesse, z. B. Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine eingehende Darstellung des Versicherungswesens der verschiedensten Art, Sterblichkeitstabellen u. v. a. Auch der nicht algebraisch geschulte Leser wird die politische Arithmetik mit Gewinn durcharbeiten, da der Verfasser sich stets bemüht hat, das in arithmetischer Form Entwickelte durch ein Zahlenbeispiel auch für diesen verständlich zu machen.“ (Schulblatt d. Provinz Sachsen 1900 Nr. 36.)

Repertorium der höheren Mathematik

(Definitionen, Formeln, Theoreme, Literaturnachweise)

von **Ernesto Pascal**,

ord. Prof. an der Universität zu Pavia.

Autorisierte deutsche Ausgabe von A. SCHEPP in Wiesbaden.

In 2 Teilen.

I. Teil: **Die Analysis.** [XII u. 638 S.] 8. 1900. Biegs. in Leinw. geb. *M.* 10.—

II. Teil: **Die Geometrie.** [X u. 712 S.] 8. 1902. Biegs. in Leinw. geb. *M.* 12.—

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser im Stande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann.

Für den Studierenden der Mathematik soll es ein „Vademecum“ sein, in welchem er kurz zusammengefaßt, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will.

Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht.

Soeben erschien:

ENCYKLOPÄDIE
DER
ELEMENTAR-MATHEMATIK.

EIN HANDBUCH FÜR LEHRER UND STUDIERENDE.

VON

HEINRICH WEBER

PROFESSOR IN STRASSBURG

UND

JOSEF WELLSTEIN

PROFESSOR IN GIESSEN.

IN DREI BÄNDEN.

I. ELEMENTARE ALGEBRA UND ANALYSIS. II. ELEMENTARE GEOMETRIE.
III. ANWENDUNGEN DER ELEMENTAR-MATHEMATIK.

ERSTER BAND.

ELEMENTARE ALGEBRA UND ANALYSIS.

BEARBEITET VON **H. WEBER.**



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Das Werk, dessen erster Band soeben erschienen ist, richtet sich in erster Linie an die Lehrer, die darin Anregung finden sollen, ihren Unterrichtsstoff auszuwählen und, namentlich in den höheren Klassen zu vertiefen, sodann aber auch an Studierende, die eine Anlehnung an die Elemente und Auffrischung und Ergänzung früher erworbener Kenntnisse suchen.

Durch das Zusammenwirken mehrerer Gelehrter hoffen die Herausgeber, die möglichste Vollständigkeit zu erreichen. Der erste Band umfaßt den algebraisch-analytischen Teil. Der zweite Band, der unter der Presse ist, wird die Geometrie nach ihren verschiedenen Seiten behandeln. Ein dritter Teil, dessen Druck gleichzeitig mit dem zweiten in Angriff genommen werden soll, wird die Anwendungen bringen, deren Stoff aus der darstellenden Geometrie, der Mechanik, Physik und Wahrscheinlichkeitsrechnung entnommen ist. Die Vorarbeiten sind so weit gediehen, daß die Vollendung des ganzen Werkes im nächsten Jahre erwartet werden darf.

H. Weber.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Buch.

Grundlagen der Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Natürliche Zahlen.

	Seite
§ 1. Einheiten, Mengen	3
§ 2. Verknüpfung, Mächtigkeit	4
§ 3. Zahlen und Zählen	7
§ 4. Der Satz von der vollständigen Induktion	11
§ 5. Größenordnung in der Zahlenreihe	12
§ 6. Die Kardinalzahlen. Ziffernsysteme	15

Zweiter Abschnitt.

Die Rechenoperationen.

§ 7. Addition	18
§ 8. Multiplikation	20
§ 9. Produkte von Summen	24
§ 10. Potenzierung	26
§ 11. Subtraktion. Negative Zahlen.	29
§ 12. Rechnen im Bereich der ganzen Zahlen	31
§ 13. Multiplikation	34

Dritter Abschnitt.

Division und Einführung der Brüche.

§ 14. Division und Teilbarkeit der Zahlen	37
§ 15. Größter gemeinschaftlicher Teiler. Relative Primzahlen. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache	39
§ 16. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen	43
§ 17. Brüche	48
§ 18. Rechnen mit Brüchen	52
§ 19. Rechnen mit Dezimalbrüchen	57
§ 20. Gekürzte Dezimalzahlen	59

Vierter Abschnitt.

Irrationalzahlen.

§ 21. Quadratwurzeln	62
§ 22. Irrationalzahlen	64
§ 23. Obere und untere Grenze	69
§ 24. Rechnen mit Irrationalzahlen	71
§ 25. Unendliche Dezimalbrüche	76
§ 26. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche	78

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisse.

	Seite
§ 27. Meßbarkeit	82
§ 28. Verhältnisse	84
§ 29. Physikalische Maße	87
§ 30. Inkommensurable Größen	92
§ 31. Proportionen	94

Sechster Abschnitt.

Potenzen und Logarithmen.

§ 32. Wurzeln	98
§ 33. Allgemeine Theorie der Potenzen	100
§ 34. Logarithmen	103
§ 35. Die Neperschen Logarithmen	105
§ 36. Die Briggschen Logarithmen	108
§ 37. Interpolation	111
§ 38. Anwendungen	115

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen ersten Grades.

§ 39. Gleichungen ersten Grades mit einer und mit zwei Unbekannten	117
§ 40. Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten	119
§ 41. Homogene Gleichungen	124
§ 42. Anwendungen	126

Achter Abschnitt.

Quadratische Gleichungen und imaginäre Zahlen.

§ 43. Quadratische Gleichungen	131
§ 44. Imaginäre Zahlen	133
§ 45. Quadratwurzeln aus imaginären Zahlen	136
§ 46. Funktionen zweiten Grades	138
§ 47. Geometrische Darstellung imaginärer Zahlen	141

Neunter Abschnitt.

Permutationen und Kombinationen.

§ 48. Permutationen	149
§ 49. Gerade und ungerade Permutationen	151
§ 50. Komposition der Permutationen	153
§ 51. Darstellung der Permutationen durch Cyklen	158
§ 52. Permutationsgruppen	161
§ 53. Kombinationen ohne Wiederholung	165
§ 54. Kombinationen mit Wiederholung	168

Zehnter Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

§ 55. Der binomische Lehrsatz	171
§ 56. Arithmetische Reihen	174

	Seite
§ 57. Arithmetische Reihen höherer Ordnung	176
§ 58. Geometrische Reihen	178
§ 59. Zins- und Rentenrechnung	180

Zweites Buch.

Algebra.

Elfter Abschnitt.

Algebraische Gleichungen.

§ 60. Ganze Funktionen und ihre Wurzeln	185
§ 61. Division ganzer Funktionen	187
§ 62. Größter gemeinschaftlicher Teiler	191
§ 63. Reduzible und irreduzible Funktionen	193

Zwölfter Abschnitt.

Hauptsätze der Algebra.

§ 64. Symmetrische Funktionen	200
§ 65. Die Potenzsummen	203
§ 66. Fundamentalsatz von der Wurzelexistenz	208

Dreizehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen ersten Grades.

§ 67. Zahlenkongruenzen	214
§ 68. Die Potenzreste	218
§ 69. Periodische Dezimalbrüche	221
§ 70. Diophantische Gleichungen	228

Vierzehnter Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen zweiten Grades.

§ 71. Der Satz von Wilson	234
§ 72. Quadratische Reste	237
§ 73. Die Pythagoräischen Dreiecke	240
§ 74. Der große Fermatsche Satz	242
§ 75. Zerlegung von Zahlen in die Summe zweier Quadrate	244
§ 76. Zerlegung großer Zahlen in Primfaktoren	250
§ 77. Vollkommene Zahlen	252

Fünfzehnter Abschnitt.

Kettenbrüche.

§ 78. Entwicklung von Irrationalzahlen in Kettenbrüche	256
§ 79. Genäherte Darstellung irrationaler Zahlen durch rationale Brüche	259
§ 80. Kettenbrüche für Quadratwurzeln	260
§ 81. Die Pellische Gleichung	264

Sechzehnter Abschnitt.

Algebraische Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen.

	Seite
§ 82. Dreiteilung des Winkels	267
§ 83. Die Cardanische Formel	270
§ 84. Die imaginären Wurzeln	272
§ 85. Die Diskriminante der kubischen Gleichung	273
§ 86. Trigonometrische Auflösung kubischer Gleichungen	274
§ 87. Auflösung der Gleichung vierten Grades	275
§ 88. Die Diskriminante der biquadratischen Gleichung	277
§ 89. Die Gruppe der Gleichung vierten Grades	280
§ 90. Zwei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten	285

Siebzehnter Abschnitt.

Genäherte Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen.

§ 91. Der Sturmsche Lehrsatz	289
§ 92. Regula falsi	295
§ 93. Anwendung auf ein Beispiel	296
§ 94. Entwicklung der reellen Wurzeln in Kettenbrüche	300

Achtzehnter Abschnitt.

Kreisteilung.

§ 95. Einheitswurzeln	302
§ 96. Algebraische Bestimmung der Einheitswurzeln	306
§ 97. Das regelmäßige Siebzehneck	314

Neunzehnter Abschnitt.

Unmöglichkeitbeweise.

§ 98. Konstruktion mit Zirkel und Lineal	317
§ 99. Eine kubische Gleichung ist nicht durch Quadratwurzeln lösbar	319
§ 100. Reduktion einer Funktion durch ein Radikal. Der casus irreducibilis der kubischen Gleichung	321
§ 101. Die Gleichung fünften Grades ist im allgemeinen nicht durch Radikale lösbar	327

Drittes Buch.

Analysis.

Zwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen.

§ 102. Reihen mit positiven Gliedern	333
§ 103. Unendliche geometrische Reihen	336
§ 104. Weitere Beispiele divergenter und konvergenter Reihen	337
§ 105. Kennzeichen der Konvergenz	339
§ 106. Die Basis des natürlichen Logarithmensystems	344

Einundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

	Seite
§ 107. Allgemeine Definition der Summe einer unendlichen Reihe	351
§ 108. Unbedingte und bedingte Konvergenz	354
§ 109. Der Abelsche Satz von der Stetigkeit der Potenzreihen	359
§ 110. Reihen mit komplexen Gliedern	361
§ 111. Potenzreihen. Konvergenzkreis	363
§ 112. Rechnen mit unendlichen Reihen	366

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

**Unbegrenzt konvergente Reihen für die Exponentialfunktion
und die trigonometrischen Funktionen.**

§ 113. Reihe für die Exponentialfunktion	370
§ 114. Die trigonometrischen Funktionen als Reihensummen	374

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Die Binomialreihe.

§ 115. Die Binomialreihe für negative ganzzahlige Exponenten	379
§ 116. Stetigkeit der Binomialreihe	382
§ 117. Summe der Binomialreihe	384
§ 118. Die Binomialreihe an der Grenze der Konvergenz	388

Vierundzwanzigster Abschnitt.

Logarithmische Reihen.

§ 119. Logarithmische Reihen	393
§ 120. Cyklometrische Reihen	395
§ 121. Die Funktion $\arctg x$	397
§ 122. Trigonometrische Reihen	399

Fünfundzwanzigster Abschnitt.

Unendliche Produkte.

§ 123. Konvergenz eines unendlichen Produktes	405
§ 124. Darstellung des Sinus durch ein unendliches Produkt	406
§ 125. Unendliches Produkt für den Kosinus	410
§ 126. Die Bernoullischen Zahlen	412

Sechszwanzigster Abschnitt.

Transcendenz von e und π .

§ 127. Die Derivierten einer ganzen Funktion	418
§ 128. Eigenschaften der Exponentialfunktion	420
§ 129. Transcendenz von e	423
§ 130. Transcendenz von π	427

Zusätze.

§ 131. Kongruenzen höheren Grades	433
§ 132. Existenz von Primitivwurzeln einer Primzahl	434
§ 133. Algebraische Bestimmung der Einheitswurzeln	436

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Repertorium der höheren Mathematik

(Definitionen, Formeln, Theoreme, Literaturnachweise)

von **Ernesto Pascal**,

ord. Prof. an der Universität zu Pavia.

Autorisierte deutsche Ausgabe von A. SCHEPP in Wiesbaden.

In 2 Teilen.

- I. Teil: **Die Analysis.** [XII u. 638 S.] 8. 1900. Biegs. in Leinw. geb. \mathcal{M} 10.—
II. Teil: **Die Geometrie.** [X u. 712 S.] 8. 1902. Biegs. in Leinw. geb. \mathcal{M} 12.—

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raume die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser im stande ist, sich in ihr zu orientieren und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann.

Einem Mathematiker in einem Gebiet, auf dem er nicht zu Hause ist, zur augenblicklichen Orientierung zu dienen, kommt in sehr geschickter Weise ein Werk nach: E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik I—II, Leipzig 1900—02, welches eine Übersicht über die Hauptlehren der höheren Mathematik gibt und bei welchem die geschickte Auswahl der mitgetheilten Sätze und Resultate nicht genug gelobt werden kann.

Wölffing, Mathematischer Bücherschatz. I. (1903). S. XXVII.

Das Buch wird ihm auf solchen Gebieten, mit denen er weniger vertraut ist, ein sehr schätzbares Hilfsmittel sein, und wir können aus eigener Erfahrung bestätigen, daß die darin gemachten Literaturangaben höchst nützlich sind.

Literar. Zentralblatt. 1901. Nr. 35.

Der Nutzen eines derartigen Repertoriums wird aber jedem einleuchten, der zur Orientierung schon oft vergebliche oder langwierige Spürversuche gemacht hat. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathematik. Bd. 31 für 1900.



Bestell-Zettel.

Bei

Buchhandlung in

bestelle ich hiermit ein Exemplar des im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig soeben erschienenen Werkes [zur Ansicht]:

Weber und Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden.

- I. Band: Elementare Algebra und Analysis. [XVI u. 446 S.]
gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. \mathcal{M} 8.—
II. — Elementare Geometrie. 1904. [Unter der Presse.]
III. — Anwendungen der Elementarmathematik. 1904. [U. d. Pr.]

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

 Das nicht Gewünschte bitte gefl. durchzustreichen.

Über die günstigsten Punktlagen beim „Einschneiden“.

Von OTTO EGGERT in Berlin.

(Mit einer Doppeltafel in Lithographie.)

Seit fast drei Jahrhunderten werden die einfachen trigonometrischen Punktbestimmungen durch „Vorwärtsabschneiden“, „Seitwärtsabschneiden“ und „Rückwärtseinschneiden“ von allen Geodäten praktisch ausgeübt. Fast ebenso alt ist wohl das Bestreben, sich über die Einflüsse der Messungsfehler in der Anwendung dieser Methoden bei verschiedener Lage der in Betracht kommenden Messungspunkte Rechenschaft zu geben, und einzelne Beziehungen sind wohl bald nach der Erfindung der Messungsmethoden erkannt worden. Die Untersuchungen ergaben jedoch selten übereinstimmende, häufig sogar sich widersprechende Resultate, je nach den Voraussetzungen, von denen man ausging, oder auch nach dem Genauigkeitsmaß, das zur Anwendung gelangte. Erst die Entwicklung der Fehlertheorie, und namentlich die Einführung der Fehlerellipse gaben geeignete Mittel, einwandfreie Untersuchungen über die beste Ausnutzung der drei Methoden anzustellen. Die Arbeiten von Helmert und Jordan¹⁾ sind auf diesem Gebiet grundlegend gewesen.

In der erstgenannten Abhandlung wird in dem hier in Betracht kommenden Teil vorzugsweise die Vergleichung der Genauigkeit der einzelnen Methoden bei Aufwendung gleicher Mühe auf Grund der Fehlertheorie durchgeführt, während Jordan die Genauigkeit verschiedener Fälle der einzelnen Methoden mit einander vergleicht.

Wenn es auch nie möglich sein wird, allgemeine Gesetze aufzustellen, die im stande sind, die Fragen der Praxis erschöpfend zu beantworten, so gibt es doch sehr viele praktische Fälle, in denen die gefundenen Gesetze mit Vorteil angewendet werden können.

1) Helmert, Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XIII 1868. S. 73 u. ff. Jordan, Über die Genauigkeit einfacher geodätischer Operationen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XVI. 1871. S. 397 u. ff. Vgl. auch Handbuch der Vermessungskunde. 8. Aufl. Bd. I. 1888. S. 296 u. ff.

In der vorliegenden Abhandlung ist die Frage nach der günstigsten Punktlage bei den einzelneren Methoden hauptsächlich Gegenstand der Erörterung.

Da die Untersuchungen von der Fehlerellipse ausgehen, so sollen zunächst auf einfachem Wege die Formeln der Fehlerellipse entwickelt werden.

I. Die Fehlerellipse.

Zur Bestimmung der rechtwinkligen Koordinaten x und y eines Punktes P seien die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -l_1 + a_1x + b_1y \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2x + b_2y \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_nx + b_ny\end{aligned}$$

mit gleichen Gewichten gegeben, worin die λ die Verbesserungen der Beobachtungen l , und die a und b gegebene Koeffizienten sind. Hieraus geht bekanntlich das folgende System der Normalgleichungen hervor:

$$[aa]x + [ab]y - [al] = 0$$

$$[ab]x + [bb]y - [bl] = 0,$$

aus dem die Werte der Unbekannten und deren Gewichte berechnet werden können.

Drehen wir nun das Koordinatensystem rechtsläufig um den Winkel φ , und bezeichnen die Koordinaten des Punktes P im neuen System mit x' und y' , so ist

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

oder in einfacher Form

$$x' = ux + vy$$

$$y' = -vx + uy.$$

Da also x' und y' lineare Funktionen von x und y sind, so erhalten wir für die Gewichte von x' und y' nach der Ausgleichung

$$\frac{1}{g_{x'}} = \frac{u^2}{[aa]} + \frac{(v \cdot 1)^2}{[bb \cdot 1]}$$

$$\frac{1}{g_{y'}} = \frac{v^2}{[aa]} + \frac{(u \cdot 1)^2}{[bb \cdot 1]},$$

worin bekanntlich

$$(v \cdot 1) = v - \frac{[ab]}{[aa]} u$$

$$(u \cdot 1) = u + \frac{[ab]}{[aa]} v$$

ist.

$$\frac{1}{g_x} = \frac{\cos^2 \varphi}{[aa]} + \frac{([aa] \sin \varphi - [ab] \cos \varphi)^2}{([aa][bb] - [ab][ab])[aa]}$$

$$\frac{1}{g_y} = \frac{\sin^2 \varphi}{[aa]} + \frac{([aa] \cos \varphi + [ab] \sin \varphi)^2}{([aa][bb] - [ab][ab])[aa]}$$

oder umgeformt

$$\frac{1}{g_x} = \frac{([bb] - [aa]) \cos^2 \varphi - [ab] \sin 2\varphi + [aa]}{[aa][bb] - [ab]^2}.$$

Ist γ derjenige Wert von φ , für den $\frac{1}{g_x}$ ein Maximum wird, so haben wir zur Bestimmung von γ

$$-([bb] - [aa]) \sin 2\gamma - 2[ab] \cos 2\gamma = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{2[ab]}{[bb] - [aa]}.$$

Wir führen nun für φ eine neue Veränderliche φ' ein, die von der Richtung des Maximums von $\frac{1}{g_x}$ aus gezählt wird, so daß

$$\varphi = \gamma + \varphi'$$

ist. Dann geht $\frac{1}{g_x}$ über in

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_x} &= \frac{([bb] - [aa]) (\cos \gamma \cos \varphi' - \sin \gamma \sin \varphi')^2}{[aa][bb] - [ab]^2} \\ &\quad - \frac{[ab] (\sin 2\gamma \cos 2\varphi' + \cos 2\gamma \sin 2\varphi') + [aa]}{[aa][bb] - [ab]^2} \\ &= \frac{1}{[aa][bb] - [ab]^2} \{ ([bb] - [aa]) (\cos^2 \varphi' - \sin^2 \gamma \cos 2\varphi' - \frac{1}{2} \sin 2\gamma \sin 2\varphi') \\ &\quad - [ab] (\sin 2\gamma \cos 2\varphi' + \cos 2\gamma \sin 2\varphi') + [aa] \}. \end{aligned}$$

Zur Umformung dieses Ausdrucks mit Hilfe des vorstehenden Wertes von $\operatorname{tg} 2\gamma$ haben wir die bekannten goniometrischen Formeln

$$\sin 2\gamma = \frac{\operatorname{tg} 2\gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\gamma}} = \frac{-2[ab]}{\sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}$$

$$\cos 2\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\gamma}} = \frac{[bb] - [aa]}{\sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{1 - \cos 2\gamma}{2} = \frac{\sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2} - ([bb] - [aa])}{2\sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}.$$

Hiermit läßt sich $\frac{1}{g_x'}$ leicht umformen in

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_x'} &= \frac{[bb] + [aa] + \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2} (\cos^2 \varphi' - \sin^2 \varphi')}{2([aa][bb] - [ab]^2)} \\ &= \frac{([bb] + [aa] + \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}) \cos^2 \varphi'}{2([aa][bb] - [ab]^2)} \\ &\quad + \frac{([bb] + [aa] - \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}) \sin^2 \varphi'}{2([aa][bb] - [ab]^2)}.\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}(1) \quad & \frac{[bb] + [aa] + \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}{2([aa][bb] - [ab]^2)} = A^2, \\ & \frac{[bb] + [aa] - \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}{2([aa][bb] - [ab]^2)} = B^2,\end{aligned}$$

so ist die Gleichung

$$(2) \quad \frac{1}{g_x'} = A^2 \cos^2 \varphi' + B^2 \sin^2 \varphi'$$

bekanntlich die Polargleichung der Fußpunktskurve einer Ellipse mit den Halbachsen A und B .

Für $\frac{1}{g_y'}$ läßt sich das Ergebnis sofort hinschreiben, da in (2) nur φ' durch $90^\circ + \varphi'$ zu ersetzen ist.

$$(2^*) \quad \frac{1}{g_y'} = A^2 \sin^2 \varphi' + B^2 \cos^2 \varphi'.$$

Denken wir uns die dem Punkte P nach allen Richtungen hin zukommenden mittleren Fehler als Strecken aufgetragen und durch ihre Endpunkte Normalen gelegt, so schließen alle diese Normalen eine Ellipse ein, die die „mittlere Fehlerellipse“ genannt wird, und deren Halbachsen $A\mu$ und $B\mu$ sind, wenn μ den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bezeichnet. Das Azimut γ der großen Achse ergibt sich aus

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{-2[ab]}{[bb] - [aa]}.$$

Die Größen A und B sind abhängig von den drei Koeffizienten $[aa]$, $[bb]$ und $[ab]$ der Normalgleichungen. Setzen wir

$$\frac{[bb]}{[aa]} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{[ab]}{[aa]} = \beta,$$

so ist

$$\begin{aligned}A^2[aa] &= \frac{\alpha + 1 + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta^2}}{2(\alpha - \beta^2)}, \\ B^2[aa] &= \frac{\alpha + 1 - \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta^2}}{2(\alpha - \beta^2)},\end{aligned}$$

wodurch einerseits die Berechnung der Fehlerellipse erleichtert ist, andererseits aber auch die Möglichkeit gegeben wird, die Größen $AV[\overline{aa}]$ und $BV[\overline{aa}]$ in Tafeln mit den beiden Argumenten α und β zur Darstellung zu bringen. In Fig. 1 (siehe Tafel) ist eine solche Tafel angedeutet unter der Voraussetzung, daß man die Unbekannten x und y aus der Ausgleichung in dm erhält. Ist $[bb] > [aa]$, so ist

$$\frac{[aa]}{[bb]} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{[ab]}{[bb]} = \beta$$

zu setzen, und die Tafel gibt dann die Werte von $AV[\overline{bb}]$ und $BV[\overline{bb}]$.

Bei Benutzung einer solchen Tafel macht die Berechnung der Fehlerellipse weniger Mühe als die der mittleren Fehler in den Koordinaten x und y , die eine Beurteilung der Genauigkeit der Punktbestimmung nur nach zwei Richtungen hin gestatten.

Die Ausdrücke $\frac{\mu}{\sqrt{g_x}}$ und $\frac{\mu}{\sqrt{g_y}}$ geben die gleichzeitigen mittleren Verschiebungen des Punktes P in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen an. Es läßt sich nun die aus diesen beiden mittleren Verschiebungen resultierende mittlere Gesamtverschiebung berechnen. Wir gehen hierzu auf die von C. F. Gauß gegebene Definition des mittleren Fehlers zurück. Bezeichnen wir die in zwei aufeinander senkrechten Richtungen auftretenden wahren Fehler mit ε_1 und ε_2 , so ist der wahre Fehler des Punktes

$$\Delta = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2},$$

und wenn wir nun für ε_1 und ε_2 einen stetigen Verlauf zwischen bestimmten Grenzen $-\varepsilon_I, +\varepsilon_I$ und $-\varepsilon_{II}, +\varepsilon_{II}$, außerhalb deren sie nicht mehr vorkommen sollen, annehmen, so ist für den mittleren Fehler des Punktes nach C. F. Gauß

$$M^2 = \sum_{-\varepsilon_I}^{+\varepsilon_I} \sum_{-\varepsilon_{II}}^{+\varepsilon_{II}} \{ \varphi(\Delta) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \},$$

worin $\varphi(\Delta)$ bekanntlich die Wahrscheinlichkeit von Δ ist. Es ist aber $\varphi(\Delta) = \varphi(\varepsilon_1) \varphi(\varepsilon_2)$, also

$$M^2 = \sum_{-\varepsilon_I}^{+\varepsilon_I} \sum_{-\varepsilon_{II}}^{+\varepsilon_{II}} \{ \varphi(\varepsilon_1) \varphi(\varepsilon_2) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \}.$$

Wenn wir nun von der Annahme des stetigen Verlaufs von ε_1 und ε_2 absehen und ε_1 und ε_2 gleichsam sprunghaft um $d\varepsilon_1$ und $d\varepsilon_2$ wachsen lassen, so können wir für M^2 auch setzen

$$M^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon_1) \varphi(\varepsilon_2) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2,$$

wobei aber berücksichtigt werden muß, daß jetzt $\varphi(\varepsilon_1) \cdot d\varepsilon_1$ und $\varphi(\varepsilon_2) \cdot d\varepsilon_2$ die Wahrscheinlichkeiten dafür bezeichnen, daß ε_1 und ε_2 in den Intervallen ε_1 bis $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ und ε_2 bis $\varepsilon_2 + d\varepsilon_2$ liegen.¹⁾ Gleichzeitig sind die Grenzen der Integrale von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt, was nach der Definition von ε_I und ε_{II} zulässig ist. Demnach ist

$$M^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1^2 \varphi(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2^2 \varphi(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon_1) d\varepsilon_1.$$

Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = \mu^2$$

ist, so bleibt

$$M^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 = \frac{\mu^2}{g_x} + \frac{\mu^2}{g_y}.$$

Aus (2) und (2*) erhalten wir

$$(4) \quad M^2 = \mu^2(A^2 + B^2),$$

woraus ersichtlich ist, daß M von der Richtung der Koordinatenachsen unabhängig und deshalb sehr gut zur Beurteilung der Genauigkeit der Punktbestimmung geeignet ist.

Was nun die Frage nach der günstigsten Punktbestimmung anbetrifft, so kann man zunächst diejenige Bestimmung als die günstigste bezeichnen, in der die Halbachsen der Fehlerellipse möglichst klein sind, was durch das Minimum von M ausgedrückt wird. Zweitens kann man aber auch die Bedingung der nach allen Richtungen hin gleichmäßig guten Bestimmung stellen, die durch eine kreisförmige Fehlerellipse mit möglichst kleinem Radius erfüllt wird. Im folgenden sollen beide Gesichtspunkte erörtert werden, der erstere, weil er einwandfreier ist, der letztere, weil er zu einfachen geometrischen Beziehungen führt.

1) Vgl. Helmert, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig 1872. S. 15.

II. Vorwärtsabschneiden.

Ein Punkt P sei durch Messung zweier Winkel von gleichem Gewicht von zwei gegebenen Festpunkten aus bestimmt. Obgleich keine überschüssigen Messungen vorliegen, können wir doch die Fehlergleichungen zur Gewichtsbestimmung aufstellen. Sie lauten

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1 x + b_1 y$$

$$\lambda_2 = -l_2 + a_2 x + b_2 y,$$

worin x und y die Koordinaten von P , die a und b die bekannten Richtungskoeffizienten bezeichnen. Nach (1) haben wir dann

$$A^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2)^2 + 4(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}}{2(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}.$$

Sind die Azimute der Visierstrahlen von P nach den Festpunkten φ_1 und φ_2 , ihre Längen s_1 und s_2 , so ist bekanntlich

$$a_1 = \frac{\sin \varphi_1}{s_1} \varrho'', \quad b_1 = -\frac{\cos \varphi_1}{s_1} \varrho'',$$

$$a_2 = \frac{\sin \varphi_2}{s_2} \varrho'', \quad b_2 = -\frac{\cos \varphi_2}{s_2} \varrho''.$$

Hiermit geht der Zähler von A^2 über in

$$\frac{\varrho''^2}{s_1^2} + \frac{\varrho''^2}{s_2^2} + \sqrt{\left(\frac{\varrho''^2}{s_1^2} + \frac{\varrho''^2}{s_2^2}\right) - 4\frac{\varrho''^4}{s_1^2 s_2^2} \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

und der Nenner in

$$\frac{2\varrho''^4}{s_1^2 s_2^2} \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2),$$

und hieraus

$$(5) \quad A^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \sqrt{(s_1^2 + s_2^2)^2 - 4s_1^2 s_2^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}}{2\varrho''^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Entsprechend findet sich

$$(5) \quad B^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 - \sqrt{(s_1^2 + s_2^2)^2 - 4s_1^2 s_2^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}}{2\varrho''^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Wir gehen nun nach der umstehenden Figur 2 zu rechtwinkligen Koordinaten über.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \gamma, \quad \sin^2 \gamma = \frac{a^2 y^2}{s_1^2 s_2^2},$$

$$s_1^2 = y^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4}, \quad s_2^2 = y^2 + x^2 + ax + \frac{a^2}{4}, \quad y^2 + x^2 + \frac{a^2}{4} = s^2,$$

$$s_1^2 + s_2^2 = 2s^2, \quad s_1^2 \cdot s_2^2 = s^4 - a^2 x^2,$$

$$A^2 = \frac{(s^2 + \sqrt{s^4 - a^2 y^2})(s^4 - a^2 x^2)}{a^2 y^2 \varrho''^2}.$$

Um Zahlenwerte zu erlangen, setzen wir $a = 1 \text{ km}$ und $\varrho'' = 206\,265$ und erhalten

$$A = \sqrt{(x^2 + \sqrt{x^4 - y^2}) \frac{x^4 - x^2}{y^2}} \cdot 4,85,$$

woraus sich A in mm ergibt.

Setzen wir hierin einen bestimmten Wert von A ein, so stellt die Gleichung die Kurve dar, die alle Punkte mit derselben großen Halb-

achse der Fehlerellipse verbindet. Entsprechend stellt die Gleichung

$$B = \sqrt{(x^2 - \sqrt{x^4 - y^2}) \frac{x^4 - x^2}{y^2}} \cdot 4,85$$

dieselbe Kurve für die kleine Halbachse B dar.

In Fig. 3 (siehe Tafel) sind nach diesen beiden Gleichungen die Kurven für verschiedene Werte von A und B entworfen.

Sehen wir nun denjenigen Punkt als am besten bestimmt an, dessen Fehlerellipse in einen

Kreis übergeht, für den also $A = B$ ist, so finden wir nur einen einzigen Punkt, der dieser Bedingung entspricht, nämlich den, bei dem die gleichlangen Visierstrahlen sich unter einem Winkel von 90° schneiden.

Jordan bezeichnet für das Vorwärtsabschneiden den Winkel von $109^\circ 28'$ als günstigsten Schnittwinkel gleichlanger Visierstrahlen, indem er von der Bedingung der kreisförmigen Fehlerellipse absieht und den Wert von M möglichst klein macht. Aber selbst unter dieser Voraussetzung ist der Jordansche Schnittwinkel von $109^\circ 28'$ nicht unter allen Umständen als der günstigste zu bezeichnen. Nach (5) haben wir nämlich

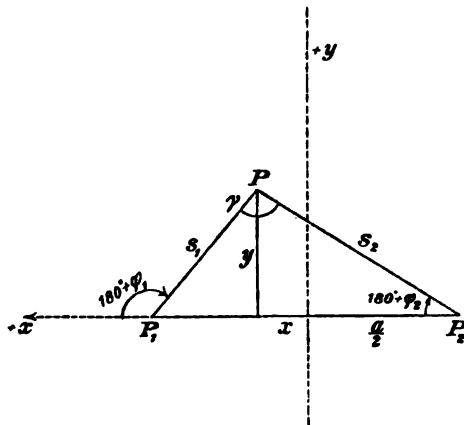
$$A^2 + B^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{\varrho'' \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

und da für den günstigsten Schnitt nur gleiche Längen s_1 und s_2 in Betracht kommen können, so ist nach (4)

$$(6) \quad M = \mu \frac{s\sqrt{2}}{\varrho'' \sin \gamma}.$$

Hieraus sieht man, daß bei konstantem s der Wert von M ein Minimum erreicht, wenn $\gamma = 90^\circ$ wird.

Fig. 2.



Da $s = \frac{a}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}$, so geht (6) über in

$$(7) \quad M = \mu \frac{a}{\varrho'' 2 \sqrt{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Bei konstantem a wird M hiernach sein Minimum erreichen, wenn

$$2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2}$$

wird, woraus folgt

$$\gamma = 109^\circ 28'.$$

Wenn also zwei Festpunkte P_1 und P_2 (Fig. 4) gegeben sind, und der Neupunkt beliebig ausgewählt werden kann, so wird der Punkt P am besten bestimmt sein.

Wenn aber andererseits der Neupunkt P gegeben ist und beliebig viele Festpunkte in gleicher Entfernung s vorhanden sind, so wird P am besten von P'_1 und P'_2 aus bestimmt. Dieser letztere Fall muß z. B. beachtet werden,

wenn in einer Netzskizze zur Bestimmung eines Punktes P eine Anzahl von Visierstrahlen vorliegt, von denen zwei ausgewählt werden sollen, die den Punkt P als Vorwärtsabschnitt am günstigsten bestimmen.

In der Kurventafel Fig. 3 kann man leicht diejenigen Punkte finden, in denen $A^2 + B^2$ einen bestimmten konstanten Wert hat. Verbindet man solche Punkte, so erhält man die von Jordan a. a. O. S. 301 gegebenen Kurven gleich genau bestimmter Punkte.

In Rücksicht auf die späteren Entwicklungen wollen wir noch einen einfacheren Ausdruck für den mittleren Fehler M beim Vorwärtsabschneiden aufstellen. Nach (1) und (4) ist

$$M^2 = \mu^2 \frac{[aa] + [bb]}{[aa][bb] - [ab]^2}.$$

Fassen wir nun die Koeffizienten a und b der beiden Punkte P_1 und P_2 als rechtwinklige Koordinaten zweier Punkte p_1 und p_2 auf, so erhalten wir die nebenstehende Figur 5, die wir als „Abbildung“ des Urbildes Fig. 2 bezeichnen wollen.

Fig. 4.

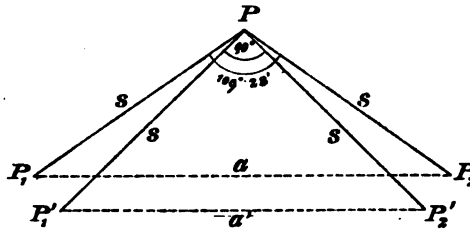
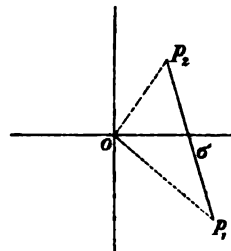


Fig. 5.



Ist Δ der Flächeninhalt des Dreiecks op_1p_2 , so findet sich leicht

$$(8) \quad M^2 = \mu_1^2 \frac{\overline{op_1^2} + \overline{op_2^2}}{4\Delta^2}$$

und für den Fall gleich langer Visierstrahlen, die sich unter einem Winkel von 90° schneiden

$$M = \mu_1 \frac{2}{\sigma},$$

worin μ_1 der mittlere Fehler einer Winkelmessung vom Gewicht 1 ist. Ist μ der mittlere Fehler einer Richtungsmessung, so ist

$$(9) \quad M = \mu \frac{2\sqrt{2}}{\sigma}.$$

III. Rückwärtseinschneiden.

a) Rückwärtseinschneiden mit drei Richtungen.

Auf dem Punkte P seien zur Bestimmung seiner Koordinaten nach drei gegebenen Festpunkten P_1, P_2, P_3 Richtungsmessungen von gleichem Gewicht ausgeführt.

Die drei Fehlergleichungen dieser Richtungen sind dann

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1x + b_1y - s,$$

$$\lambda_2 = -l_2 + a_2x + b_2y - s,$$

$$\lambda_3 = -l_3 + a_3x + b_3y - s,$$

wobei s die Orientierungsunbekannte bezeichnet. Hieraus ergibt sich bekanntlich nach Eliminierung des s

$$\lambda_1 = -l'_1 + \left(a_1 - \frac{[a]}{3}\right)x + \left(b_1 - \frac{[b]}{3}\right)y$$

$$\lambda_2 = -l'_2 + \left(a_2 - \frac{[a]}{3}\right)x + \left(b_2 - \frac{[b]}{3}\right)y$$

$$\lambda_3 = -l'_3 + \left(a_3 - \frac{[a]}{3}\right)x + \left(b_3 - \frac{[b]}{3}\right)y.$$

Um die weitere Entwicklung etwas zu vereinfachen, legen wir die positive Richtung der Abscissenachse in die Richtung (P, P_1) und nehmen $\frac{\overline{PP_1}}{q''} = \frac{s_1}{q''}$ als Längeneinheit an. Es wird dann $a_1 = 0$, $b_1 = -1$ und

$$\lambda_1 = -l'_1 + \frac{1}{3}(-a_2 - a_3)x + \frac{1}{3}(-2 - b_2 - b_3)y$$

$$\lambda_2 = -l'_2 + \frac{1}{3}(2a_2 - a_3)x + \frac{1}{3}(1 + 2b_2 - b_3)y$$

$$\lambda_3 = -l'_3 + \frac{1}{3}(2a_3 - a_2)x + \frac{1}{3}(1 - b_2 + 2b_3)y.$$

Um die günstigste gegenseitige Lage der vier Punkte zu erörtern, betrachten wir zunächst den Fall, in dem die Fehlerellipse in einen Kreis übergeht. Bezeichnen wir die Koeffizienten von x und y im letzten Gleichungssystem mit a' und b' , so ergeben sich aus (1) für $A^2 = B^2$ die Bedingungen

$$[a'a'] - [b'b'] = 0, \quad [a'b'] = 0.$$

Bilden wir aus den vorstehenden Fehlergleichungen die Koeffizienten $[a'a']$, $[b'b']$ und $[a'b']$, so nehmen die Gleichungen (10) die folgende Form an

$$(11) \quad \begin{aligned} [a'a'] - [b'b'] &= a_2^2 + a_3^2 - a_2a_3 - b_2^2 - b_3^2 + b_2b_3 - b_2 - b_3 - 1 = 0, \\ [a'b'] &= a_2 + a_3 - a_2b_2 - a_3b_3 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 = 0. \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Lage der Punkte P , P_1 und P_2 als gegeben ansehen und die Lage des Punktes P_3 den Gleichungen (11) entsprechend aufsuchen.

Hierzu setzen wir der Einfachheit wegen

$$\begin{aligned} a_3 &= \alpha_3 + \frac{a_2}{2} \\ b_3 &= \beta_3 + \frac{b_2 - 1}{2}. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$(12) \quad \begin{aligned} \alpha_3^2 - \beta_3^2 &= -\frac{3}{4}(a_2^2 - b_2^2 - 2b_2 - 1) = k_1, \\ \alpha_3 \cdot \beta_3 &= -\frac{3}{4}(1 + b_2)\alpha_2 = k_2, \end{aligned}$$

und diese beiden Gleichungen geben

$$\begin{aligned} \alpha_3^2 &= \frac{k_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{k_1^2 + 4k_2^2} = \frac{3}{4}(1 + b_2)^2, \\ \beta_3^2 &= -\frac{k_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{k_1^2 + 4k_2^2} = \frac{3}{4}\alpha_2^2, \\ \alpha_3 &= \pm \sqrt{\frac{3}{4}}(1 + b_2), \\ \beta_3 &= \mp \sqrt{\frac{3}{4}}\alpha_2. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung (12) bedingt verschiedene Vorzeichen koordinierter Werte von α_3 und β_3 . Es findet sich endlich

$$(13) \quad \begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{a_2}{2} \pm (1 + b_2)\sqrt{\frac{3}{4}}, \\ b_3 &= \frac{b_2 - 1}{2} \mp \alpha_2\sqrt{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Hiervon können wir sofort eine Anwendung machen, indem wir

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 = 1, \\ \varphi_2 &= 120^\circ \end{aligned}$$

setzen und aus den Gleichungen (13) s_3 und φ_3 ermitteln. Es ist also

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_2 &= \sqrt{\frac{s}{4}}, \\ b_1 &= -1, & b_2 &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und hieraus findet sich

$$\text{I.} \quad a_3 = 2\sqrt{\frac{s}{4}}, \quad b_3 = -1,$$

$$\text{II.} \quad a_3 = -\sqrt{\frac{s}{4}}, \quad b_3 = +\frac{1}{2}$$

und die Werte von s_3 und φ_3 sind

$$\text{I.} \quad s_3 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_3 = 60^\circ,$$

$$\text{II.} \quad s_3 = 1, \quad \varphi_3 = 240^\circ.$$

In der nebenstehenden Fig. 6 sind die den Ergebnissen I und II entsprechenden Punktlagen gezeichnet. Die zweite Figur war zu erwarten,

es zeigt sich jedoch, daß der durch die erste Figur dargestellte Fall des Rückwärtseinschneidens dem andern vollständig gleichwertig ist.

Wir kehren nun noch einmal zu den beiden Gleichungen (13) zurück. Betrachten wir die Größen a_1, b_1, a_2, b_2 als rechtwinklige Koordinaten der Punkte p_1 und p_2 und nehmen

hierzu noch für den Punkt p_3 die Koordinaten $a_1 = 0$ und $b_1 = -1$, so lehren die beiden Gleichungen (13), daß die Punkte p_1 und p_2 mit den beiden Punkten p_3 zwei gleichseitige Dreiecke bilden, die die Seite $p_1 p_2$ gemeinsam haben.

Die Lage des Nullpunktes der a und b hat auf die Genauigkeit der Punktbestimmung keinen Einfluß, da bei der Eliminierung der Orientierungsunbekannten s aus den Fehlergleichungen die a und b auf den Schwerpunkt des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ bezogen werden. Einem gleichseitigen Dreieck $p_1 p_2 p_3$ entsprechen also unendlich viele gleich günstige Punktlagen $P_1 P_2 P_3$.

Ein Fall bietet hier besonderes Interesse. Denken wir uns die beiden Punkte P_1 und P_2 gleich weit vom Neupunkt P entfernt, so daß die Richtungen PP_1 und PP_2 einen Winkel von 60° einschließen, und den Punkt P_3 in beliebiger Richtung unendlich fern liegend, so

Fig. 6.

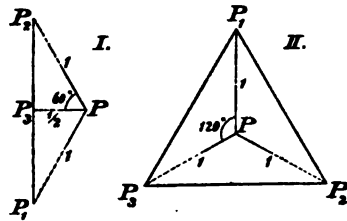
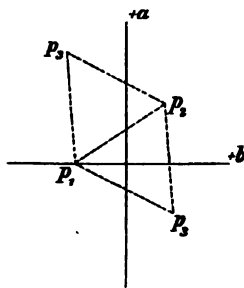


Fig. 7.



fällt p_3 in den Nullpunkt der a und b , und das Dreieck $p_1 p_2 p_3$ ist auch gleichseitig. Die Lage der Punkte P ist also auch eine günstige.

Fig. 8.

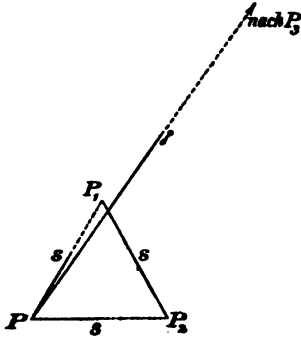
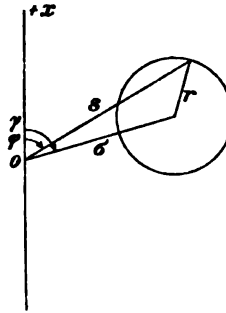


Fig. 9.



Diese Ergebnisse führen uns dazu, das Koordinatensystem der a und b näher zu betrachten und seine Beziehungen zu dem ursprünglichen System der x und y zu untersuchen.

Ein Kreis vom Radius r , dessen Mittelpunkt im System der x und y die Polarkoordinaten σ und γ hat, wird durch die Polargleichung

$$r^2 = s^2 + \sigma^2 - 2s\sigma \cos(\gamma - \varphi)$$

dargestellt, in der s und φ die laufenden Koordinaten sind. Geht der Kreis durch den Nullpunkt 0, so ist

$$s = 2r \cos(\gamma - \varphi)$$

oder

$$s = 2r \sin \gamma \sin \varphi + 2r \cos \gamma \cos \varphi$$

$$\frac{\varphi''}{2r} = \sin \gamma \frac{\sin \varphi}{s} \varphi'' + \cos \gamma \frac{\cos \varphi}{s} \varphi''.$$

Bekanntlich ist

$$a = \frac{\sin \varphi}{s} \varphi'' \quad b = -\frac{\cos \varphi}{s} \varphi''$$

also

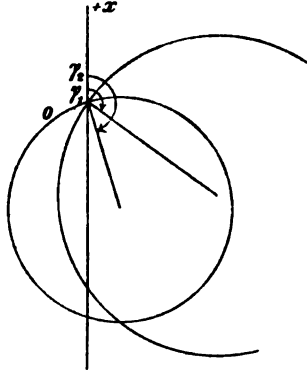
$$(14) \quad \frac{\varphi''}{2r} = a \sin \gamma - b \cos \gamma.$$

Betrachten wir a und b als rechtwinklige Koordinaten, so werden nach Gleichung (14) alle Kreise, die im System x, y durch den Nullpunkt gehen, im System der a und b durch gerade Linien mit den Richtungswinkeln γ dargestellt.¹⁾

1) Eine Transformation der Entfernungen des Neupunktes von den Festpunkten nach reziproken Radien hat Runge angewendet, um die Berechnung des Rückwärtseinschneidens auf die des Vorwärtsabschneidens zurückzuführen. (Zeit-

Zwei Kreise, die durch den Nullpunkt 0 gehen, und deren Mittelpunkte die Richtungswinkel γ_1 und γ_2 haben, schneiden sich unter dem Winkel $\gamma_2 - \gamma_1$. Im System der a und b werden diese Kreise nach dem Obigen durch zwei Geraden dargestellt, die sich ebenfalls unter dem Winkel $\gamma_2 - \gamma_1$ schneiden.

Fig. 10.



Verlegen wir den Nullpunkt 0 der x und y nach P unter gleichzeitiger Parallelverschiebung des Koordinatensystems, und setzen in (14) $\gamma = 90^\circ$, so erhalten wir

$$a = \frac{q''}{2r},$$

d. h. alle Punkte eines Kreises, der die x -Achse im Nullpunkte berührt, haben dasselbe a . Entsprechend finden wir aus (14) für $\gamma = 0$, daß alle Punkte mit gleichem b auf einem Kreise liegen, der die y -Achse im Nullpunkte berührt.

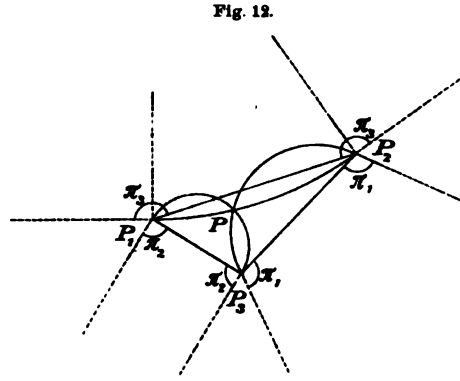
Dies gibt ein einfaches Mittel zur Bestimmung der a und b bei gegebener Skizze des trigonometrischen Netzes. In der Tafel Fig. 11 sind die Kreise für beliebige a konstruiert. Man denke sich diese Tafel auf durchsichtigem Papier gezeichnet und so auf die Netzskizze gelegt, daß die gemeinsame Berührende aller Kreise in die positive Richtung der Abscissenachse und der gemeinsame Berührungspunkt auf den zu bestimmenden Punkt fällt. Stimmen die Maßstabverhältnisse überein, so kann man alsdann für sämtliche gegebenen Punkte die Koeffizienten a unmittelbar ablesen. Dreht man hierauf die Tafel in rechtsläufigem Sinne um 90° , so kann man unmittelbar die b ablesen. (Vgl. Fig. 11 auf der Tafel.)

Es empfiehlt sich, die Hilfstafel für den Maßstab 1 : 10 000 zu konstruieren. Ist die Netzskizze in kleinerem Maßstabe gegeben, so kann dieselbe Tafel benutzt werden, nur sind dann die a und b entsprechend zu verkleinern, für den Maßstab 1 : 40 000 z. B. durch 4 zu dividieren.¹⁾

schr. f. Verm. Bd. XXVIII 1899 S. 313 und Bd. XXIX 1900 S. 581.) Es wird um den Punkt P ein Kreis vom Radius m beschrieben und jede Entfernung s' aus s nach der Gleichung $s : m = m : s'$ berechnet. Für $m = \sqrt{q''}$ ist die Transformation mit der obigen Abbildung durch die a und b identisch.

1) Eine für den praktischen Gebrauch bestimmte Tafel ist inzwischen erschienen unter dem Titel: Hilfstafel zur Berechnung der Richtungskoeffizienten für Koordinatenausgleichungen. Berlin, Paul Parey, 1903.

In Fig. 7 sind die Geraden p_1p_2 , p_2p_3 und p_3p_1 Abbildungen der drei durch P und bezw. durch P_1P_2 , P_2P_3 und P_3P_1 gehenden Kreise. Diese sind bekanntlich die Bestimmungskreise des Punktes P und es ist somit erwiesen, daß diese Kreise sich unter Winkeln von 60° schneiden müssen, um eine günstige Bestimmung des Punktes zu liefern. Es folgt hieraus eine einfache geometrische Konstruktion der günstigsten Lage des Punktes P in Bezug auf 3 Festpunkte P_1 , P_2 und P_3 . Bezeichnen wir in Fig. 12 mit



π_1 , π_2 und π_3 die Winkel, die die Tangenten der Kreise in den 3 Punkten mit den entsprechenden Dreiecksseiten bilden, so ergibt sich leicht

$$\pi_1 = \sphericalangle P_1 + 60^\circ$$

$$\pi_2 = \sphericalangle P_2 + 60^\circ$$

$$\pi_3 = \sphericalangle P_3 + 60^\circ,$$

sodaß die Kreise und hiermit auch der Punkt P sich leicht geometrisch konstruieren lassen.

Eine andere Konstruktion desjenigen Punktes, in dem die Genauigkeit der Bestimmung nach allen Richtungen gleich groß ist, gibt Helmert a. a. O. S. 111.

Der mittlere Fehler der Punktbestimmung wird im Falle der kreisförmigen Fehlerellipse, da $[a'a'] = [b'b']$ und $[a'b'] = 0$ ist,

$$M = \mu \sqrt{\frac{2}{[a'a']}}.$$

Aus (11) und (13) folgt

$$[a'a'] = \frac{2}{3}(a_2^2 + a_3^2 - a_2a_3) = \frac{1}{3}(a_2^2 + (1 + b_2)^2)$$

$$M = \mu \sqrt{\frac{4}{a_2^2 + (1 + b_2)^2}}.$$

Es ist aber $\sqrt{a_2^2 + (1 + b_2)^2}$ gleich der Seite des gleichseitigen Dreiecks $p_1p_2p_3$. Bezeichnen wir diese mit σ , so ist

$$M = \mu \frac{2}{\sigma}.$$

Der mittlere Fehler ist also dem Umfange des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ umgekehrt proportional.

Es soll nun noch diejenige Punktlage untersucht werden, die nach der ersten Definition von Seite 150 als die günstigste angesehen werden muß.

Nach (1) und (4) ist

$$(15) \quad M^2 = \mu^2 (A^2 + B^2) = \mu^2 \frac{[b'b'] + [a'a']}{[a'a'] [b'b'] - [a'b']^2}.$$

Der Nullpunkt der a' und b' ist der Schwerpunkt des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$. Der Zähler in M^2 stellt die Quadratsumme der Entfernungen des Schwerpunktes von den drei Ecken dar; oder, wenn wir mit $[t^2]$ die Quadratsumme der Schwerlinien bezeichnen, so ist der Zähler gleich $\frac{4}{3}[t^2]$. Der Nenner läßt sich leicht umformen:

$$[a'a'] [b'b'] - [a'b']^2 = (a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1)^2 + (a'_2 b'_3 - a'_3 b'_2)^2 + (a'_3 b'_1 - a'_1 b'_3)^2.$$

Hierin ist jedes Glied gleich dem Quadrat des doppelten Flächeninhalts eines durch zwei Ecken und den Schwerpunkt gebildeten Dreiecks. Da diese Dreiecke einander gleich sind, so ist der Nenner gleich $\frac{8}{2 \cdot 3} A^2$, wenn A den Flächeninhalt des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ bezeichnet. Also ist

$$M^2 = \mu^2 \frac{2[t^2]}{6A^2}.$$

Ist $[\sigma^2]$ die Quadratsumme der drei Dreiecksseiten, so ist bekanntlich

$$[t^2] = \frac{3}{4} [\sigma^2],$$

also

$$(16) \quad M^2 = \mu^2 \frac{[\sigma^2]}{4A^2}.$$

C. Runge benutzt in der schon erwähnten Abhandlung (Zeitschr. f. Verm. 1900, S. 585) die von ihm eingeführte Abbildung nach reziproken Radien ebenfalls zur Beurteilung der Genauigkeit der Punktlage und kommt zu dem Ergebnis, daß diejenige Form des Rückwärts-einschnitts die günstigste ist, in der das abbildende Dreieck $p_1 p_2 p_3$ den größten Flächeninhalt hat. Dies stimmt, wie (16) zeigt, nicht mit den Grundsätzen der Fehlertheorie überein. Die Gleichung (16) lehrt, daß M auch noch von der Gestalt des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ abhängig ist, und es ist leicht einzusehen, daß bei gleichem Flächeninhalt verschieden geformter Dreiecke der Wert von M von einem Minimum bis zum Wert ∞ übergehen kann, wobei das Minimum dann eintritt, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Die Gleichung (16) läßt sich noch leicht überführen in

$$(17) \quad M^2 = \mu^2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} \right),$$

worin h_1, h_2, h_3 die drei Höhen des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ sind.

Wenn also auf einem Neupunkte P beliebig viele Richtungen nach Festpunkten gemessen sind, von denen drei zur Bestimmung des Punktes möglichst günstig ausgewählt werden sollen, so ermittelt man für sämtliche Festpunkte mit Hilfe der S. 158 erläuterten Tafel die Koeffizienten a und b , trägt dieselben als rechtwinklige Koordinaten in beliebigem Maßstabe auf und sucht dann drei Punkte zu einem Dreieck zu verbinden, in dem die Quadratsumme der reziproken Höhen ein Minimum ist.

In Fig. 13 (siehe Tafel) ist ein der Praxis entnommener Fall dargestellt, in dem von dem Neupunkte 3 aus nach 5 Festpunkten Richtungen gemessen sind. Zur Bestimmung der drei günstigsten Richtungen sind in der Nebenzeichnung die 5 Festpunkte mit Hilfe der a und b abgebildet. Unter den 10 möglichen Dreiecken kommen die beiden Dreiecke rmw und $rm l$ am meisten in Frage. Prüft man die beiden Dreiecke näher nach Gl. (16) oder (17), so zeigt sich, daß $\triangle rmw$ ein etwas kleineres M liefert, als $\triangle rm l$. Außerdem ist $\triangle rmw$ nahezu gleichseitig, so daß die drei Punkte R, M und W zur Bestimmung des Punktes 3 verwendet wurden.

Ein durch die Punkte $R, 3, L$ und B gehender „gefährlicher Kreis“ ist in der Nebenzeichnung in der geraden Linie rbl augenfällig zu erkennen.

b) Rückwärtseinschneiden mit zwei Winkeln.

Zur Bestimmung des Punktes P seien zwischen drei Festpunkten P_1, P_2 , und P_3 zwei Winkel mit der gemeinsamen Richtung PP_1 gemessen. Bezeichnen wir wieder mit a und b die Richtungskoeffizienten, so lauten bekanntlich die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y \\ \lambda_2 &= -l_2 + (a_3 - a_1)x + (b_3 - b_1)y. \end{aligned}$$

Setzen wir auch hier wieder $a_1 = 0, b_1 = -1$, so ist

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_2 x + (1 + b_2)y \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_3 x + (1 + b_3)y. \end{aligned}$$

Die Lage von P in Bezug auf P_1 und P_2 sei gegeben, und wir wollen nun wieder a_2 und b_2 so bestimmen, daß die Fehlerellipse in einen Kreis übergeht. Die Bedingungen hierfür sind

$$\begin{aligned} [a'a'] - [b'b'] &= a_2^2 - (1 + b_2)^2 + a_3^2 - (1 + b_3)^2 = 0, \\ [a'b'] &= a_2(1 + b_2) + a_3(1 + b_3) = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir $b_3 = \beta_3 - 1$, so ist

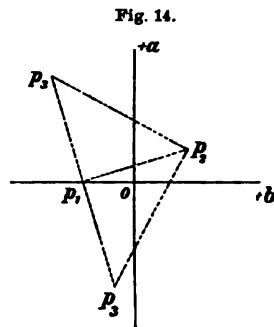
$$a_3^2 - \beta_3^2 = -a_2^2 + (1 + b_2)^2 = k_1,$$

$$a_3 \beta_3 = -a_2 (1 + b_2) = k_2,$$

$$a_3 = \pm (1 + b_2), \quad a_2 = \pm (1 + b_2),$$

$$\beta_3 = \mp a_2, \quad b_3 = \mp a_2 - 1.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Punkte p_1 und p_2 mit den beiden Punkten p_3 zwei rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke mit der gemeinsamen Kathete $p_1 p_2$ bilden. Da die Katheten dieser rechtwinkligen Dreiecke wieder



die Abbildungen der beiden Bestimmungskreise sind, so ist erwiesen, daß bei günstiger Punktlage die Kreise sich unter einem rechten Winkel schneiden müssen, was auch zu erwarten war.

Bei gegebener Lage der drei Punkte P_1 , P_2 , und P_3 ist es leicht, solche Punkte P zu finden, für die die Bestimmungskreise sich unter einem rechten Winkel schneiden. Unter

den unendlich vielen Punkten P , die dieser Bedingung genügen, ist der günstigste, dem die kleinste kreisförmige Fehlerellipse zukommt, zu ermitteln.

Zur Beurteilung der Genauigkeit haben wir wie früher

$$M = \pm \sqrt{\frac{2}{[a'a']}} \mu.$$

$\sqrt{[a'a']} = \sqrt{a_2^2 + (1 + b_2)^2}$ ist aber gleich der Kathetenlänge des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$. Der mittlere Fehler M ist also der Kathetenlänge umgekehrt proportional.

Sehen wir von der Bedingung der kreisförmigen Fehlerellipse ab, so erübrigt sich noch, für den Fall der Messung zweier Winkel eine geometrische Bedeutung von M zu finden. In den Ausdrücken $[a'a']$, $[b'b']$ und $[a'b']$ beziehen sich die Koeffizienten a' und b' auf p_1 als Nullpunkt. In

$$M^2 = \mu^2 \frac{[b'b'] + [a'a']}{[a'a'] [b'b'] - [a'b']^2}$$

ist deshalb der Zähler gleich $\sigma_2^2 + \sigma_3^2$, wo $\sigma_2 = \overline{p_1 p_2}$ und $\sigma_3 = \overline{p_1 p_3}$ ist, und der Nenner entsprechend der Beweisführung S. 160 gleich $4\Delta^2$, also

$$(18) \quad M^2 = \mu_1^2 \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{4\Delta^2}.$$

Unter μ_1 ist der mittlere Fehler der Winkelmessung zu verstehen, während sich μ in (16) auf Richtungsmessungen bezog. Um (18) mit (16) vergleichen zu können, führen wir $\mu_1 = \mu\sqrt{2}$ ein, sodaß (18) übergeht in

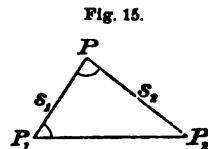
$$(19) \quad M^2 = \mu^2 \frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{4 \Delta^2}.$$

Vergleichen wir (19) mit (16), so ist ersichtlich, daß es von der Figur des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ abhängt, ob die Messung zweier Winkel ein größeres M ergibt, als die Messung der drei Richtungen. Ein Grenzfall tritt ein, wenn das Dreieck $p_1 p_2 p_3$ gleichschenkelig rechtwinklig und σ_1 die Hypotenuse ist. Die Gleichung (19) läßt ferner erkennen, daß es nicht gleichgültig ist, welche beiden Winkel gemessen werden; diese sind vielmehr so zu wählen, daß die ihnen entsprechenden Seiten im Dreieck $p_1 p_2 p_3$ möglichst klein sind. Dies wird auch durch die Forderung bedingt, daß der Schnittwinkel der beiden Bestimmungskreise möglichst dem rechten Winkel gleichkommen soll.

IV. Seitwärtsabschneiden.

In dem Dreieck $P_1 P P_2$ seien die beiden Winkel in P_1 und P gemessen, wobei wieder P der Neupunkt, P_1 und P_2 gegebene Festpunkte sein sollen. Sind wie bisher die a und b die Richtungskoeffizienten, so sind die Fehlergleichungen der beiden gemessenen Winkel bekanntlich

$$\begin{aligned} \lambda_p &= -l_1 + (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y, \\ \lambda_1 &= -l_2 - a_1 x - b_1 y. \end{aligned}$$



Betrachten wir nun wieder in Figur 16a die Abbildung p_1 und p_2 der beiden Punkte P_1 und P_2 , so müssen wir berücksichtigen, daß der Punkt o alle unendlich fernen Punkte P abbildet, daß also die Verbindungslinie $p_1 o$ die Abbildung der Geraden $P_1 P$ ist.

Verschieben wir nun in Figur 16b $p_1 p_2$ parallel nach op'_2 , so entspricht p'_2 ein Punkt P'_2 . Nun denken wir uns in dem Punkte P einen Rückwärtseinschnitt nach den drei Punkten $P_1 P_2 P'_2$ mit zwei Winkeln, die die Richtung PP_2 gemeinsam haben, ausgeführt, dessen Fehlergleichungen nach S. 161 lauten

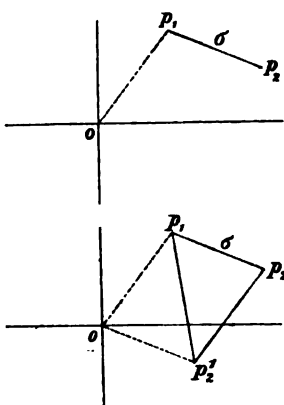
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y, \\ \lambda_2 &= -l_2 + (a'_2 - a_2)x + (b'_2 - b_2)y. \end{aligned}$$

Nach Figur 16 b ist aber

$$a'_2 - a_2 = -a_1 \quad \text{und} \quad b'_2 - b_2 = -b_1.$$

Dieser Rückwärtseinschnitt liefert also dieselben Fehlergleichungen, wie der Seitwärtsabschnitt S. 163, also auch dieselbe Genauigkeit. Nach S. 162 muß für die günstigste Form des Rückwärtseinschneidens mit zwei Winkeln das Dreieck $p_1 p_2 p'_2$ ein gleichschenkelig-rechtwinkliges sein mit dem rechten Winkel in p_2 . Also ist auch

Fig. 16 a u. 16 b.



$op_1 = op'_2$ und $\overline{op_2}^2 = 2\overline{op_1}^2$. Da aber $\frac{op_1}{op_2} = \frac{s_2}{s_1}$, also $s_1^2 = 2s_2^2$, und ferner $\angle P_2 P P_1 = \angle P_1 O P_2 = 45^\circ$ sein muß, so folgt, daß die günstigste Form des Seitwärtsabschneidens dann eintritt, wenn die Punkte $P P_1 P_2$ ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in P_2 bilden.

Dies läßt sich auch auf anderem Wege nachweisen. Wird nämlich in den Punkten P_1 und P_2 ein Vorwärtsabschnitt ausgeführt, so lauten die Fehlergleichungen desselben

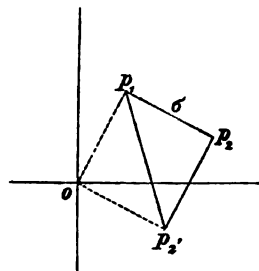
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 - a_1 x - b_1 y, \\ \lambda_2 &= -l_2 - a'_2 x - b'_2 y. \end{aligned}$$

Die Vorzeichen der Richtungskoeffizienten sind hierin so aufzufassen, daß bei rechtsläufiger Winkelmessung $P_1 P'_2$ bzw. $P'_2 P_1$ die linken Schenkel der Winkel sind. Da wieder

$$-a'_2 = a_1 - a_2 \quad \text{und} \quad -b'_2 = b_1 - b_2,$$

so sind diese Fehlergleichungen wieder identisch mit denen des Seitwärtsabschnitts. Für die günstigste Form des Vorwärtsabschnitts muß

Fig. 17.



nach S. 152 das Dreieck $op_1 p'_2$ ein gleichschenkelig-rechtwinkliges mit dem rechten Winkel in o sein. Übertragen wir dies wieder auf die Lage der Punkte $P P_1 P_2$, so ergibt sich auch das vorstehend gefundene Resultat.

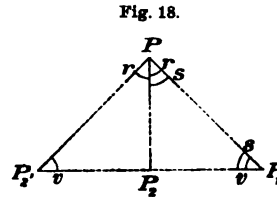
In Figur 17 ist entsprechend 16 b der günstigste Seitwärtsabschnitt und der Hilfspunkt p'_2 abgebildet. Von Interesse ist es nun, zu sehen, welche Lage die Punkte $P_1 P_2 P'_2$ hiernach haben. Figur 18 gibt hierüber Aufschluß, und es sind zugleich mit r , v und s diejenigen Winkel bezeichnet, die bei gleich genauer Bestimmung des Punktes P durch Rückwärtseinschneiden, Vorwärts- oder Seitwärtsabschneiden zu messen sind.

Für die Genauigkeit des günstigsten Seitwärtsabschnitts haben wir nach S. 154 oder 163

$$(20) \quad M = \mu_1 \frac{\sqrt{2}}{\sigma} = \mu \frac{2}{\sigma}.$$

Zur Beurteilung der allgemeinen Form des Seitwärtsabschnitts benutzen wir (18), indem wir wieder auf den schon oben herangezogenen Rückwärtseinschnitt nach $P_1 P_2 P'_2$ zurückgehen. Da $p'_2 p_2 = op_1$ und der Flächeninhalt Δ des Dreiecks $p_1 p_2 p'_2$ dem des Dreiecks $op_1 p_2$ gleich ist, so ist nach (18)

$$(21) \quad M^2 = \mu_1^2 \frac{\sigma^2 + \overline{op_1^2}}{4\Delta^2} = \mu^2 \frac{\sigma^2 + \overline{op_1^2}}{2\Delta^2}.$$



Dasselbe Resultat läßt sich aus (8) ableiten.

Als Abschluß der Untersuchungen über die drei Methoden der einfachen trigonometrischen Punktbestimmung stellen wir noch einmal die den drei Methoden zukommenden mittleren Fehler zusammen:

I. Vorwärtsabschneiden mit 2 Winkeln:

$$M^2 = \mu^2 \frac{\overline{op_1^2} + \overline{op_2^2}}{2\Delta^2}.$$

II. Seitwärtsabschneiden mit 2 Winkeln:

$$M^2 = \mu^2 \frac{\overline{op_1^2} + \sigma^2}{2\Delta^2}.$$

IIIa. Rückwärtseinschneiden mit 2 Winkeln:

$$M^2 = \mu^2 \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\Delta^2}.$$

IIIb. Rückwärtseinschneiden mit 3 Richtungen:

$$M^2 = \mu^2 \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{4\Delta^2},$$

wobei in allen vier Formeln μ den mittleren Fehler einer Richtungsmessung bezeichnet.

V. Mehrfache Punktbestimmung.

In Abschnitt III wurde derjenige Rückwärtseinschnitt mit 3 Richtungen gesucht, dessen Fehlerellipse in einen Kreis überging, und es wurde gefunden, daß in der Abbildung durch die a und b die Punkte ein gleichseitiges Dreieck bildeten. Es liegt nun die Frage nahe, ob beim Rückwärtseinschneiden mit beliebig vielen Richtungen sich auch eine solche einfache geometrische Figur finden läßt.

Es seien n Festpunkte P durch n Punkte p abgebildet. Der Nullpunkt der a und b sei nach dem Schwerpunkt der p verlegt, so daß $[a] = [b] = 0$ ist. Es soll nun ein Punkt p_{n+1} gesucht werden, der die Fehlerellipse zu einem Kreise macht. Durch das Hinzutreten des Ergänzungspunktes werde der Schwerpunkt um α und β in den Koordinatenrichtungen verschoben, und es mögen die Koordinaten a_{n+1} und b_{n+1} des Punktes p_{n+1} von dem neuen Schwerpunkt aus gezählt werden. Die Bedingungen der kreisförmigen Fehlerellipse sind dann

$$\begin{aligned} & (a_1 + \alpha)^2 + (a_2 + \alpha)^2 + \cdots + (a_n + \alpha)^2 + a_{n+1}^2 \\ & = (b_1 + \beta)^2 + (b_2 + \beta)^2 + \cdots + (b_n + \beta)^2 + b_{n+1}^2, \\ & (a_1 + \alpha)(b_1 + \beta) + (a_2 + \alpha)(b_2 + \beta) + \cdots + (a_n + \alpha)(b_n + \beta) + a_{n+1} \cdot b_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} [aa] - [bb] + n\alpha^2 - n\beta^2 + a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 &= 0, \\ [ab] + n\alpha\beta + a_{n+1}b_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

und da

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= n\alpha, \\ b_{n+1} &= n\beta, \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} [aa] - [bb] + n(1+n)(\alpha^2 - \beta^2) &= 0, \\ [ab] + n(1+n)\alpha\beta &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= \frac{[bb] - [aa]}{n(1+n)}, \\ \alpha\beta &= \frac{-[ab]}{n(1+n)}. \end{aligned}$$

Es ist hieraus schon ersichtlich, daß es im allgemeinen möglich sein wird, einen Ergänzungspunkt zu konstruieren, der das Netzbild zu einem günstigen im Sinne der zweiten S. 150 gegebenen Definition gestaltet, daß also die Punkte p keine regelmäßige Figur zu bilden brauchen, wie es bei nur drei Richtungen der Fall war. Andererseits tritt jedoch auch hier stets die kreisförmige Fehlerellipse auf, wenn die Punkte p konzentrisch zum Schwerpunkt liegende reguläre Vielecke bilden.

Es lassen sich nun auf anderem Wege geometrische Bedingungen für die kreisförmige Fehlerellipse aufstellen, und um die Untersuchung zu vervollständigen, wollen wir hierbei nicht nur die auf dem Neupunkt gemessenen, sondern auch die auf den Festpunkten gemessenen Richtungen berücksichtigen.

Wir bezeichnen mit a_i und b_i die Richtungskoeffizienten für die Fehlergleichungen der inneren Richtungen nach Eliminierung der Orientierungsunbekannten, so daß der Nullpunkt der a_i und b_i gleichzeitig der Schwerpunkt s der durch sie dargestellten Punkte p_i ist. Vor der Eliminierung der Orientierungsunbekannten bezogen sich die a_i und b_i auf das ursprüngliche System, in dem der Schwerpunkt s die Koordinaten x und y habe. Sind auf den vorliegenden Festpunkten auch Richtungen nach dem Neupunkt gemessen, so sind die Richtungskoeffizienten für diese Richtungen bezw. $a_i + x$ und $b_i + y$. Nehmen wir für die Fehlergleichungen der äußeren Richtungen das überall gleiche Gewicht g , für die inneren Richtungen das Gewicht 1 an, so sind die Bedingungen der kreisförmigen Fehlerellipse

$$\begin{aligned} & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + g(a_1 + x)^2 + g(a_2 + x)^2 + g(a_3 + x)^2 + \dots \\ & - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - \dots - g(b_1 + y)^2 - g(b_2 + y)^2 - g(b_3 + y)^2 - \dots = 0, \\ & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots \\ & + g(a_1 + x)(b_1 + y) + g(a_2 + x)(b_2 + y) + g(a_3 + x)(b_3 + y) + \dots = 0, \end{aligned}$$

und da

$$[a] = [b] = 0$$

ist, so findet sich

$$\begin{aligned} (1 + g)([aa] - [bb]) + ng(x^2 - y^2) &= 0, \\ (1 + g)[ab] + ngx y &= 0, \end{aligned}$$

worin n die Anzahl der Festpunkte bezeichnet.

Die a_i und b_i stellen, wie schon S. 156 bemerkt ist, je nach Wahl ihres Nullpunktes unendlich viele Punktsysteme P_i dar, die alle gleichwertige Rückwärtseinschnitte liefern. Die beiden vorstehenden Gleichungen zeigen nun, daß man unter den vielen Punktsystemen zwei (bezw. vier) finden kann, die unter Zuhilfenahme der äußeren Richtungen eine kreisförmige Fehlerellipse liefern.

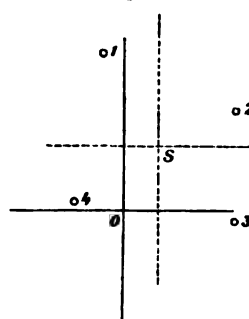
In Fig. 19 sind die Werte

$$\begin{aligned} a_1 &= +5, & b_1 &= -3, \\ a_2 &= +2, & b_2 &= +4, \\ a_3 &= -4, & b_3 &= +4, \\ a_4 &= -3, & b_4 &= -5 \end{aligned}$$

angenommen und hiermit als Koordinaten des Schwerpunktes

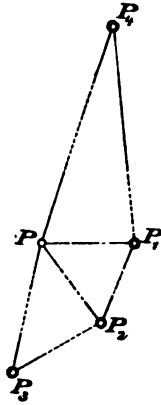
$$x = \sqrt{12}, \quad y = \sqrt{3}$$

Fig. 19.



berechnet worden unter Annahme des Gewichts 0,5 für die äußeren Richtungen. In Fig. 20 sind mit Hilfe der positiven Werte von x und y die entsprechenden Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und der Neupunkt P dargestellt.

Fig. 20.



Bezeichnen wir mit a'_i und b'_i die Koeffizienten der Fehlergleichungen für die inneren und äußeren Richtungen, so ist für die kreisförmige Fehlerellipse

$$(22) \quad \begin{aligned} [b'b'] - [a'a'] &= 0, \\ [a'b'] &= 0. \end{aligned}$$

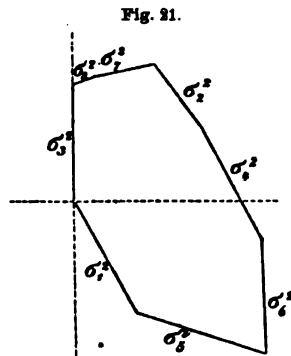
Bezeichnen wir ferner die Abstände der Punkte p' vom Nullpunkt mit σ und ihre Richtungswinkel mit α , so ist für jeden Punkt

$$\begin{aligned} a' &= \sigma \sin \alpha, & b'^2 - a'^2 &= \sigma^2 \cos 2\alpha, \\ b' &= \sigma \cos \alpha, & a'b' &= \frac{1}{2} \sigma^2 \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

also nach (22)

$$(23) \quad \begin{aligned} [\sigma^2 \cos 2\alpha] &= 0, \\ [\sigma^2 \sin 2\alpha] &= 0. \end{aligned}$$

Dies führt dazu, die obige Figur noch einmal umzuwandeln, indem wir von einem beliebigen Punkte ausgehend unter dem Richtungswinkel



$2\alpha_1$ eine Strecke $s_1 = \sigma_1^2$ abtragen, im Endpunkt derselben unter dem Richtungswinkel $2\alpha_2$ die Strecke $s_2 = \sigma_2^2$ anschließen u. s. w., so daß wir aus sämtlichen Strecken einen Polygonzug erhalten. Die Größen $\sigma^2 \cos 2\alpha$ und $\sigma^2 \sin 2\alpha$ sind Projektionen der Polygonseiten auf die Koordinatenachsen, und es folgt somit aus (23), daß die vorstehende Konstruktion ein geschlossenes Polygon ergeben muß. Gleichgültig ist es, in welcher Reihenfolge die Strecken aneinandergefügt werden. Für das Beispiel Fig. 19 u. 20 ist die Fig. 21 konstruiert worden.

Der mittlere Fehler der Punktbestimmung ist wie früher

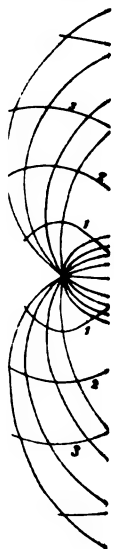
$$M = \pm \mu \sqrt{\frac{2}{[a'a']}}$$

oder da $[a'a'] + [b'b'] = 2[a'a'] = [\sigma^2]$ ist,

$$M = \pm \mu \sqrt{\frac{4}{[\sigma^2]}}.$$

Der mittlere Fehler ist also umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Umfang des Polygons.

Fig. 3.



16

bei
Ri
die



Die
von

oder

Der
aus

Geometrisches über einige Abbildungen der Kugel in der Kartenentwurfslehre.

Von A. WEILER in Zürich.

In dem Nachfolgenden soll in erster Linie dargetan werden, wie man bei den *wahren Kegel-, Cylinder- und azimutalen Projektionen* die Oberfläche der Kugel zunächst auf die der betreffenden Kartenprojektion zu Grunde gelegte Hilfsfläche abzubilden hat. Es wird damit die Rolle, welche diese Hilfsfläche bei der Abbildung spielt, genauer beleuchtet, als es bisher der Fall war.

Das hier streng durchgeführte Verfahren bietet ferner einen deutlichen Einblick in die verschiedenen Abarten für jede einzelne Gattung dieser wichtigen Kartenprojektionen, nämlich für die *mittelabstandstreue*, die *winkel-* und die *flächentreue*. Wo sich in einfacher Art und Weise die Möglichkeit darbietet, wird endlich die Abbildung der in erster Linie in Betracht kommenden Kugelkreise auf die Hilfsfläche geometrisch veranschaulicht. Nach dieser Richtung hin zeichnen sich überall die flächentreuen Projektionen durch ihre einfachen geometrischen Eigenschaften aus.

Die soeben erwähnten wichtigsten Kugelkreise sind im allgemeinen Fall, nämlich bei der schiefachsigen, sowie auch bei der spezielleren transversalen Lage, die Haupt- und die Horizontalkreise. Da ihre Abbildung mit derjenigen der Meridiane und Parallelkreise bei der normalen Lage übereinstimmt, so kann ich mich unbeschadet der Allgemeinheit auf diesen letzteren Fall beschränken. Es wird sich dadurch die Ausdrucksweise etwas einfacher gestalten.

Bezüglich der neueren Bezeichnungsweise und der Literatur verweise ich auf Zöppritz-Bludau, Leitfaden der Kartenentwurfslehre, I. Teil, Leipzig 1899 und auf die einschlägigen Werke von Hammer.

I.

Kegel- und Kegelstumpfprojektionen.

1. Wird die *Erdkugel* in einem gewünschten Verhältnis ähnlich verkleinert, so entsteht der *Globus*, der direkt, in natürlicher Größe, abzubilden ist. Der Radius des Globus sei in der Folge ausnahmslos als *Längeneinheit* gewählt. (Erdoberfläche und Globus können auch, der Wirklichkeit näher kommend, zwei ähnliche Sphäroide sein).

Auf dem Globus G sind die *Pole* P, Q in erster Linie ausgezeichnet. Ihre Verbindungsgerade nennt man die *Erdachse* oder kurz die *Achse*.

Der die Projektion vermittelnde *gerade Kreiskegel* K ist seiner Gestalt und Lage nach zunächst völlig unabhängig; es soll indessen seine Achse mit der Erdachse zusammengelegt werden, dabei sein Scheitel bei S liegen (Fig. 1). Die Gestalt des Kegels ist durch den Winkel γ bestimmt, den die sämtlichen Kegelerzeugenden mit der

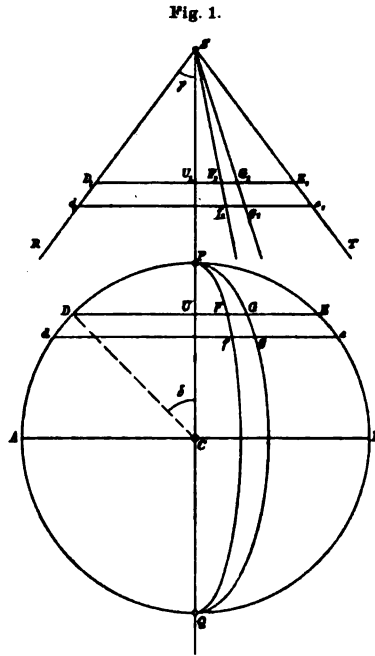
Achse bilden. — In Figur 1 enthält die Zeichenfläche die gemeinsame Achse SPQ des Globus und des Kegels, von letzterem die gegenüberliegenden Erzeugenden RS, ST und vom Globus die gegenüberliegenden Meridiane PAQ, PBQ ; C soll das Zentrum des Globus sein.

Bei den wahren Kegelprojektionen wird jeder *Meridian* als diejenige Kegelerzeugende abgebildet, die mit ihm in derselben Halbebene durch die Achse liegt. Jeder *Parallelkreis* DE des Globus dagegen bildet sich ab als ein Kreis D_1E_1 des Kegels. Der Originalkreis DE ist bestimmt durch den konstanten *Polabstand* $\delta = PCD$ seiner sämtlichen Punkte und der Bildkreis D_1E_1 durch die konstante Länge der Abschnitte auf den Kegelerzeugenden, die durch ihn gebildet werden,

vom Scheitel S aus gemessen, $SD_1 = SE_1 = \dots = m$. (In Figur 1 sind DE, D_1E_1 die Orthogonalprojektionen der eben genannten entsprechenden Kreise des Globus und des Kegels, auf die Zeichnungsfläche. Dasselbe gilt für die entsprechenden Meridiane PD, PF, \dots und Kegelerzeugenden SD_1, SF_1, \dots)

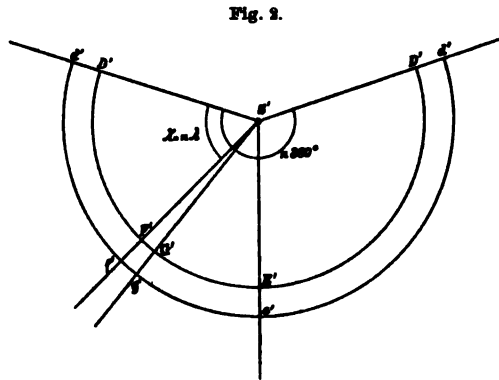
Die Zuordnung der Parallelkreise und ihrer Bilder soll nun eine *eindeutige* sein. Zu jedem Wert δ von 0° bis 180° muß ein bestimmter Wert von m gehören und umgekehrt. Zwischen δ und m besteht eine eindeutige Beziehung, welche man das *Halbmessergesetz* nennt und in üblicher Weise in der Form schreibt

$$(1) \quad m = f(\delta)$$



Sind der Kegel, nämlich sein Winkel γ und das Halbmessergesetz bekannt, so ist die Abbildung des Globus auf den Kegel eine durchaus eindeutige. Dem einzigen Schnittpunkt F eines Parallels DE mit einem Meridian PFQ des Globus entspricht auf dem Kegel der ebenfalls einzige Schnittpunkt F_1 des entsprechenden Kegelparallels D_1E_1 mit der Erzeugenden SF_1 . — Eine Parallelverschiebung des Kegels längs der Achse ist ohne Einfluß auf die Abbildung. Man könnte beispielsweise den Kegel jederzeit soweit fortbewegen, daß er den Globus längs des Parallels vom Polabstand $90 - \gamma$ berührt, allein es würde offenbar im allgemeinen dieser Parallel $\delta = 90 - \gamma$ durchaus nicht mit seinem entsprechenden Kreise des Kegels zusammenfallen, diese Parallelverschiebung also zwecklos sein.

2. (Fig. 1, 2.) Wird die Kegeloberfläche in die Ebene abgewickelt, so entsteht die *Karte*.¹⁾ Der Scheitel S werde nach S' gebracht. Die Abwicklung bildet einen Kreissektor vom Zentrum S' . Jede Erzeugende des Kegels erscheint in der Karte als ein Strahl aus S' , das Bild eines Kugelmeridians, ein *Kartenmeridian*. Irgend ein Kegelkreis D_1E_1 wird als begrenzter Bogen $D'E'D'$ abgewickelt; das Bild des Globusparallels DE ist der *Kartenparallel* $D'E'D'$. Sein Radius ist



$m = f(\delta)$, welcher fortan der *Bildradius* des Parallels δ genannt werden soll. Der entsprechende *Kegelradius*, nämlich der Radius D_1U_1 des Kegelkreises D_1E_1 , ist nach Fig. 1 gleich $m \sin \gamma$. Der Umfang $2\pi m \sin \gamma$ dieses Kegelkreises stimmt mit der Länge des Bogens $D'E'D'$, dessen Radius m ist, überein. Zur Berechnung des Zentriwinkels $D'E'D' = \varphi$ des Sektors, in Graden ausgedrückt, besteht somit die Proportion

$$2\pi m \sin \gamma : 2\pi m = \varphi : 360,$$

woraus sich für φ der Ausdruck ergibt

$$\varphi = \sin \gamma \cdot 360 = n \cdot 360,$$

wobei man $n = \sin \gamma$ als die *Konstante der Kegelprojektion* bezeichnet.

1) Das Globusbild auf dem Kegel und die Karte sind unter sich längen-, flächen- und winkeltreu, was auch bezeichnet werden kann als *überall in den kleinsten Teilen kongruent*.

Im Anschluß an das Vorige soll angegeben werden, *unter welcher Bedingung ein Globusparallel in der Karte längentreu abgebildet wird*. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß sein wirklicher Radius $DU = \sin \delta$ mit dem entsprechenden Kegelradius $D_1 U_1 = m \cdot \sin \gamma$ übereinstimmt, oder daß

$$(2) \quad m \sin \gamma = \sin \delta \text{ oder } m \cdot n = \sin \delta.$$

Die Übertragung der *Parallelkreise* vom *Globus* in die *Karte* ist nun die denkbar einfachste. Sei δ der Polabstand des Parallels, so ist $m = f(\delta)$ der Bildradius, mit dem man um S' den Kartenparallel zu beschreiben hat, nämlich innerhalb des konstanten Winkels $D'S'D' = n \cdot 360^\circ$.

Es erübrigt, dieselbe Übertragung für die *Meridiane* anzugeben. Sei etwa PDQ der Nullmeridian, $S'D'$ sein Kartenbild; PFQ sei der Meridian von der geographischen Länge λ und $S'F'$ sein Bild. Als dann steht der Winkel $D'S'F' = \lambda'$ in einfacher Beziehung zu λ . Die Bogen $D_1 F_1$ auf dem Kegel K und $D'F'$ der Karte haben dieselbe Länge, der erstere $m \cdot \sin \gamma \cdot \lambda$, der letztere $m \cdot \lambda'$, wenn man nämlich λ und λ' in Bogenmaß ausgedrückt denkt. Aus der Gleichsetzung folgt aber $\lambda' = \sin \gamma \cdot \lambda = n \cdot \lambda$. Die Verwendung der Konstanten n für die Zeichnung der Kartenmeridiane ergibt sich hieraus von selbst.

3. (Fig. 1, 2) Alle Parallelkreise und Meridiane der Karte bilden eine Schar konzentrischer Kreisbogen und die allen diesen Bogen gemeinsamen Radien, also zwei sich überall rechtwinklig schneidende Systeme von Linien. Auch die entsprechenden Originalkreise auf dem Globus schneiden sich überall rechtwinklig. Somit sind für jeden Punkt F des Globus, sowie für jeden Bildpunkt F' der Karte die *Hauptrichtungen* bekannt, die Richtungen der stärksten Längenverzerrungen.¹⁾ Auf dem Globus wie in der Karte sind sie überall die Richtungen der Meridiane und Parallelkreise. (Die winkeltreue Karte macht hiervon eine Ausnahme, die Hauptrichtungen bei F und F' werden unbestimmt. Denn alle auf dem Globus von einem Punkte F ausgehenden unendlich kleinen Bogen werden in demselben Verhältnis verändert in der Karte wiedergegeben, die Indicatrix ist an jedem Punkte der Karte ein Kreis.)

Die *Halbachsen der Indicatrix* für den beliebigen Punkt F' der Karte findet man in folgender Weise. Auf dem Globus seien PF , PG zwei unendlich nahe Meridiane und DFE , dfe zwei unendlich benachbarte Parallelkreise, welche zusammen ein unendlich kleines Netzviereck $FGfg$ des Globus begrenzen, das sich als Netzviereck

1) Zöppritz-Bludau, S. 18.

$F_1 G_1 f_1 g_1$ auf dem Kegel und als $F' G' f' g'$ in der Karte abbildet. Bei dem Bildpunkte F' sind nun die Indicatrixhalbachsen gleich

$$(3) \quad h = \frac{F' f'}{F f}, \text{ radial; } k = \frac{F' G'}{F G}, \text{ tangential.}$$

Die beigelegte Bezeichnung *radial* und *tangential* bezieht sich selbstverständlich auf das Parallelkreisbild. — Die größere dieser beiden Halbachsen wird man späterhin üblicher Weise mit a , die kleinere mit b bezeichnen, sobald diese Unterscheidung wünschenswert oder überhaupt möglich ist.¹⁾

Die radial gerichtete Halbachse h der Indicatrix kann man ganz allgemein durch einen Differentialquotienten darstellen. Auf dem Meridian PF hat F den Polabstand δ ; erteilt man δ den unendlich kleinen Zuwachs $d\delta$, so geht F in f über. Da der Radius des Globus als Längeneinheit gewählt wurde, so ist $d\delta$ das Maß des Bogens Ff .

Der Zunahme $d\delta$ von δ entspricht infolge der Gleichung $m = f(\delta)$ die Zunahme dm von m ; es ist $F' f' = dm$ zu setzen. Damit wird nach (3)

$$(4) \quad h = \frac{dm}{d\delta} = f'(\delta).$$

Stets ist der Bogen $F' G'$ gleich $F_1 G_1$, dessen Abwicklung er ist. Damit wird $k = F_1 G_1 : FG$. Die entsprechenden Bogen $F_1 G_1$ und FG der vollen Kreise $D_1 E_1$ und DE haben denselben unendlich kleinen Zentriwinkel (räumlich gleich FUG), sie verhalten sich also einfach wie die Radien dieser Kreise, wie $m \cdot \sin \gamma : \sin \delta$, d. h. es ist

$$(5) \quad k = \frac{m \sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{m \cdot n}{\sin \delta}.$$

Zum Schlusse dieser Einleitung sei noch erwähnt, daß die Parallelkreise der Karte *Linien gleicher Verzerrungen* sind. Denn es hängen h und k nur von δ ab, nicht aber von der geographischen Länge λ .

A. Mittelabstandstreue Projektionen.

4. Es handelt sich hier um Kegelprojektionen, bei denen die *Meridiane längentreu* auf die Kegelerzeugenden abgebildet werden. Somit haben nach (4) diese Projektionen der Differentialgleichung zu genügen

$$(6) \quad dm = d\delta.$$

1) In den vorhandenen Tabellen (für die „echten“ Projektionen) sind bisher die Größen a und b aufgeführt worden, wobei es vorkommt, daß für dieselbe Projektion a bald radial ($a = h$), bald tangential ($a = k$) liegt. Dieser Übelstand bezüglich der Übersichtlichkeit wird beseitigt, wenn man immer die Werte h und k tabuliert. In diesem Falle sind nämlich in den Tabellen nicht nur die *Längen* der Halbachsen, sondern auch ihre *Richtungen* ohne weiteres ersichtlich.

Da m eine gerade Strecke ist, δ aber ein Bogen vom Radius 1, so wird die Integralgleichung geschrieben

$$(7) \quad m = \text{arc } \delta + c,$$

sie enthält eine willkürliche Konstante c .

Sollen die *Parallelkreise* gefunden werden, welche sich *längentreu* abbilden, so setze man nach (2) $m \cdot \sin \gamma = \sin \delta$. Die Gleichung, durch welche die Polabstände der längentreuen Parallelkreise bestimmt sind, lautet somit

$$(8) \quad (\text{arc } \delta + c) \cdot n = \sin \delta.$$

Für relativ große Werte von c wird die Gleichung keine Wurzeln, nämlich zwischen $\delta = 0^\circ$ und $\delta = 180^\circ$, besitzen; es werden alsdann keine längentreuen Parallelkreise vorkommen. Die folgenden Nummern zeigen, daß die Gleichung zwei verschiedene oder gleiche Wurzeln haben kann.

Über die in (7) vorkommende Konstante c wird man am einfachsten so verfügen, daß man einem bestimmten Wert $\delta = \delta'$ einen ebenfalls bestimmten Wert $m = m'$ entsprechen läßt. Es ist alsdann c durch die Gleichung bestimmt $m' = \text{arc } \delta' + c$, und es geht damit (7) über in

$$(9) \quad m = m' + \text{arc } (\delta - \delta')$$

Geometrisch aufgefaßt hat man den Bildradius m' eines bestimmten Parallels δ' willkürlich gewählt, d. h. man hat das Bild $D_1 E_1$ eines Globusparallels DE auf dem Kegel willkürlich festgesetzt. Trägt man alsdann die von DE aus je bis zu den übrigen Parallelkreisen gemessenen Meridianbogen auf den Kegelerzeugenden von $D_1 E_1$ aus im entsprechenden Sinne, polwärts und gegen den Kegelscheitel hin oder je entgegengesetzt ab, so ergeben sich alle übrigen Parallelkreisbilder eindeutig, entsprechend (9).

Soll dieser Parallel δ' zudem *längentreu* abgebildet werden, so ist für m' nach (2) zu setzen $\frac{\sin \delta'}{n}$. Der Radius des Parallels DE oder δ' stimmt mit dem seines Kegelbildes $D_1 E_1$ überein. Man wird in diesem Falle den Kegel durch den Parallel DE gehen lassen, d. h. ihn soweit verschieben, daß er den Globus längs DE durchschneidet. Es deckt sich dann der Parallel DE mit seinem Bilde $D_1 E_1$ auf dem Kegel; *Globus und Kegel haben den Schnittkreis $DE = D_1 E_1$ entsprechend gemein*. Die so spezialisierte Abbildung wird man zweckmäßig bezeichnen als *Projektion des Globus auf den Schnittkegel eines Parallels*. Für jeden Punkt des Schnittparallels DE ist $h = 1$, $k = 1$ infolge der längentreuen Wiedergabe der Meridiane und eben dieses Parallels.

Daraus folgt, daß bei der Abbildung der unendlich nahen Umgebung des Parallels keinerlei Verzerrungen stattfinden, *diese Umgebung wird auf dem Schnittkegel und in der Karte längen-, flächen- und winkeltreu, also in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet.*

Bei dieser bemerkenswerten Projektion bleibt n , also die Gestalt des Schnittkegels, willkürlich, *die Abbildung des Globus geschieht auf einen beliebigen Schnittkegel durch den längentreuen Parallel.* Setzt man in (9) $\frac{\sin \delta'}{n}$ an Stelle von m' , so ergibt sich als Halbmessergesetz

$$(9a) \quad m = \frac{\sin \delta'}{n} + \arccos(\delta - \delta').$$

Unter Hinweis auf das Nachfolgende kann diese Projektion eine Kegel- oder Kegelstumpfprojektion I. oder II. Art sein, andererseits hat sie die in Nr. 5—7 behandelten besonderen Projektionen zu Sonderfällen. — Diese Projektionsart, die auch bei den winkel- und flächentreuen Projektionen vorkommt, bietet den Vorteil, einer an sie gestellten weiteren Bedingung, etwa bezüglich der Verzerrungen, genügen zu können.

Setzt man in (7) $\delta = 0$, so wird $m = c$. Die Konstante c ist gleich dem Bildradius des Poles P , den man mit $m_p = c$ bezeichnet. Für $\delta = 180^\circ$ ergibt sich der Radius des Bildkreises des Poles Q , $m_q = c + \arccos 180^\circ = c + \pi$.

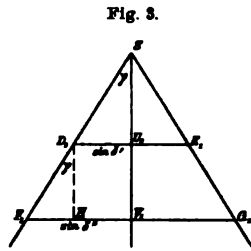
Ist $m_p = c = 0$, so ist der Bildradius des Poles P gleich Null, der Pol wird längentreu als Kegelscheitel S abgebildet. Die Projektion ist eine *Kegelprojektion im engeren Sinne*. Das Kartenbild des ganzen Globus ist ein Kreissektor vom Zentriwinkel $n \cdot 360^\circ$ und dem Radius $m_q = \arccos 180^\circ = \pi$.

Haben m_p und m_q dasselbe Vorzeichen, wobei das negative auszuschließen ist, so beansprucht das Bild des Globus auf dem Kegel einen Kegelstumpf. Das Kartenbild des gesamten Globus ist ein Ringsektor; die Projektion soll als eine *Kegelstumpfprojektion I. Art* bezeichnet werden.

Ist endlich m_q positiv, m_p dagegen negativ (für $0 > c > -\pi$) so fallen die Polbilder auf entgegengesetzte Seiten des Kegelscheitels. Das Bild des Globus auf dem Kegel setzt sich über den Kegelscheitel hinaus auf den Ergänzungskegel fort. Der bestimmte Parallel δ_0 , mit $\arccos \delta_0 = -c$, bildet sich als Kegelscheitel S ab. Läßt man den Ergänzungskegel außer Betracht, so wird bei dieser *Kegelstumpfprojektion II. Art* die Kugelkappe vom Gegenpol Q bis zu dem ausgezeichneten Parallel δ_0 (in der Karte als Kreissektor) abgebildet.

Die Abbildung wird *unstetig*, so oft sich ein Parallelkreis als ein Punkt, oder umgekehrt ein Punkt (Pol) als Linie abbildet. Im ersteren Falle wird k zu Null, im letzteren Fall unendlich, während $h = \frac{d\pi}{d\delta}$ überall den Wert 1 beibehält.

5. Bei der wichtigen Projektion von De l'Isle sollen zwei im Voraus bezeichnete Parallelkreise δ' , δ'' längentreu abgebildet werden.



Es ist in diesem Fall der Kegel leicht zu bestimmen, Fig. 3. Den Parallelkreisen DE , FG des Globus, von den Polabständen δ' , δ'' , entsprechen die Kegelkreise D_1E_1 , F_1G_1 , deren Radien D_1U_1 , F_1V_1 mit denen der längentreuen Parallelkreise ($DU = \sin \delta'$, $FV = \sin \delta''$) übereinstimmen müssen. Die Seitenlänge D_1F_1 der Kegelerzeugenden zwischen D_1E_1 und F_1G_1 ist gleich $\text{arc}(\delta'' - \delta')$. Die Bildradien SD_1 , SF_1 der längentreuen Parallelkreise bezeichne man mit m' , m'' . Es bestehen alsdann die Gleichungen

$$m' \sin \gamma = \sin \delta', \quad m'' \sin \gamma = \sin \delta'', \quad m'' - m' = \text{arc}(\delta'' - \delta'),$$

aus denen sich m' , m'' und $\sin \gamma$ berechnen lassen. Die Resultate können in Fig. 3 unmittelbar abgelesen werden, nämlich

$$(10) \quad n = \sin \gamma = \frac{\sin \delta'' - \sin \delta'}{\text{arc}(\delta'' - \delta')} \left(= \frac{2 \cos \frac{\delta'' + \delta'}{2} \sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\text{arc}(\delta'' - \delta')} \right), \quad m' = \frac{\sin \delta'}{\sin \gamma},$$

$$m'' = \frac{\sin \delta''}{\sin \gamma}.$$

Da m' und δ' sowie m'' und δ'' entsprechende Werte sind, so lautet nach (9) das Halbmessergesetz

$$(11) \quad m = m' + \text{arc}(\delta - \delta') \quad \text{oder auch} \quad m = m'' + \text{arc}(\delta - \delta'').^1)$$

Für den Radius des Bildkreises des Poles $P(\delta = 0)$ erhält man

$$m_p = m' - \text{arc} \delta' = \frac{\sin \delta'}{\sin \gamma} - \text{arc} \delta' = \frac{\sin \delta' \text{arc}(\delta'' - \delta')}{\sin \delta'' - \sin \delta'} - \text{arc} \delta',$$

$$m_p = \frac{\sin \delta' \text{arc} \delta'' - \sin \delta'' \text{arc} \delta'}{\sin \delta'' - \sin \delta'}.$$

1) Die Gleichung (9a) drückt das Halbmessergesetz aus, wenn der eine Parallel δ' längentreu ist. Soll nun auch δ'' längentreu sein, so muß (9a) für $\delta = \delta''$, $m = m'' = \frac{\sin \delta''}{n}$ erfüllt sein. Daraus ergibt sich für n der in (10) angegebene Wert.

Um nachzuweisen, daß diese Projektion eine *Kegelstumpfprojektion I. Art* ist, setzen wir voraus (vgl. etwa Fig. 4), es sei $\sin \delta'' > \sin \delta'$ (für $\sin \delta'' = \sin \delta'$ würde eine Cylinderprojektion entstehen). Unter den beiden Polen wählt man denjenigen als P mit $\delta = 0$, welcher dem Parallel δ' näher liegt als dem Parallel δ'' , so daß also $\text{arc } \delta'' > \text{arc } \delta'$. Dann ist

$$\frac{\text{arc } \delta''}{\sin \delta''} > \frac{\text{arc } \delta'}{\sin \delta'}, \quad \sin \delta' \text{ arc } \delta'' > \sin \delta'' \text{ arc } \delta',$$

in dem Ausdruck für m_p sind Zähler und Nenner positiv und es ist auch m_p positiv.

Den Hilfskegel kann man durch den einen oder den anderen der längentreuen Parallelkreise des Globus hindurch gehen lassen, z. B. durch DE vom Polabstand δ' , Fig. 4. DE fällt dann mit seinem Bilde D_1E_1 zusammen; es wird die Kugel auf den *Schnittkegel* DEF_1G_1 abgebildet. Nach voriger Nummer wird die unendlich nahe Umgebung eines jeden der beiden längentreuen Parallelkreise ohne Verzerrungen, also in den kleinsten Teilen gleich, abgebildet.

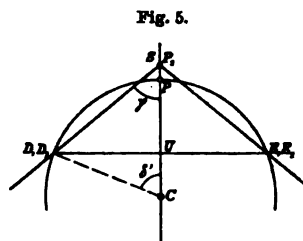
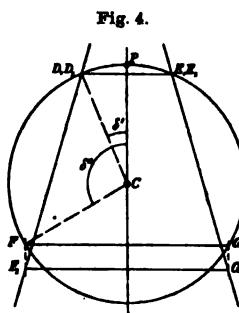
6. Die eben behandelte Projektion von De l'Isle läßt zwei *Sonderfälle* zu in Bezug auf die Lage der längentreuen Parallelkreise.

Setzt man $\delta'' = 0$, so ergeben die Formeln (10) und (11)

$$n = \sin \gamma = \frac{\sin \delta'}{\text{arc } \delta'}, \quad m' = \frac{\sin \delta'}{\sin \gamma}, \quad m'' = 0, \quad m = \text{arc } \delta, \quad (m_p = 0).$$

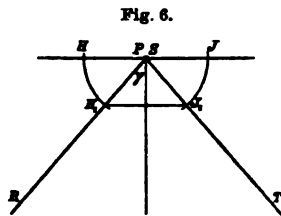
Es handelt sich hier um eine *Kegelprojektion* im engeren Sinne. Der eine längentreue Parallel DE behält seinen Polabstand δ' bei, der andere wird zu einem Punkt, dem Pol P , dessen Bild wieder ein Punkt ist, nämlich der Kegelscheitel S (Punkt S' der Karte, Fig. 2). Den Kegel lege man als *Schnittkegel* des Globus durch den Parallel DE , Fig. 5, so fällt in diesem Falle dieser Kreis mit seinem Kegelbilde zusammen, er entspricht sich selbst. Die Basis des Kegels ist nun der Kreis $DE = D_1E_1$ vom Radius $\sin \delta'$, die Kegelseite SD hat die Länge $\text{arc } \delta'$. Der Kegel ist hierdurch eindeutig bestimmt

Die unendlich nahe Umgebung von DE wird in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet. Dieses ist jedoch nicht mehr der Fall für den anderen längentreuen Parallel, den Pol $\delta = 0$. Es ist nämlich allgemein neben $h = \frac{dm}{d\delta} = 1$, $k = \frac{n \cdot m}{\sin \delta} = \frac{\sin \delta'}{\text{arc } \delta'} \cdot \frac{\text{arc } \delta}{\sin \delta}$ und für $\delta = 0$



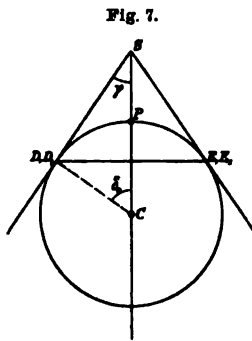
wird $k = \frac{\sin \delta'}{\text{arc } \delta'} = n$. In der Umgebung von S ist also $k < 1$, die unendlich kleinen Parallelkreise um den Pol P werden auf den Kegel bei S verkürzt abgebildet. Die unendlich kleinen gleichschenkligen *Netsdreiecke*, welche auf dem Globus am Pole liegen, behalten bei der Abbildung die Längen ihrer Schenkel bei, dagegen werden ihre Basen (und Winkel am Scheitel) im Verhältnis $1:n$ verkleinert.

Die *Abbildung der Umgebung des Poles* P kann man sich in folgender Weise veranschaulichen. Man lege den Kegel RST als Schnittkegel des Globus durch den Pol, d. h. man verschiebe ihn längs



der Achse, bis sein Scheitel S mit P zusammenfällt, Fig. 6. Es sei nun p vom Durchmesser HI und dem Radius $PH = PI = \rho$ ein Parallel in der Umgebung des Poles; seine Ebene steht auf der Achse senkrecht. Auf dem Kegel trage man $SH_1 = SI_1 = \rho$ ab, so ist der Kegelkreis p_1 vom Durchmesser H_1I_1 das Bild des Parallels p . Der wirkliche Radius von p_1 ist offenbar gleich $\rho \sin \gamma = \rho \cdot n$. Teilt man nun die Umfänge von p und p_1 in dieselbe Anzahl gleicher Teile (z. B. 360) und verbindet man alle Teilpunkte mit $S = P$, so entstehen die von P ausgehenden Meridianbogen und ihre Bilder auf dem Kegel.

7. Um den *zweiten Sonderfall* der Projektion von De l'Isle (Nr. 5) zu erhalten, lasse man die beiden längentreuen Parallelkreise zusammen-



fallen, also δ'' in δ' übergehen und schreibe darauf δ_0 für δ' . — Die Konstante n ist nach (10) zu berechnen. Da

$$\lim \left(\frac{\sin \delta'' - \sin \delta'}{\delta'' - \delta'} \right)_{\delta'' = \delta'} = \cos \delta'$$

so wird $n = \sin \gamma = \cos \delta_0$, $\gamma = 90 - \delta_0$, die Abbildung geschieht auf den *Berührungskegel* dieses sogenannten *Mittelparallels* DE vom Polabstande δ_0 , Fig. 7 (in Fig. 4 ist FG nach DE gerückt). Kegel und Globus haben nunmehr einen unendlich schmalen Flächenstreifen längs

des Parallels DE miteinander gemein. Diese Zone entspricht sich selbst und wird auf dem Kegel kongruent, in der Karte in den kleinsten Teilen kongruent, abgebildet. Der Bildradius des Mittelparallels ist nach Fig. 7 gleich $DS = m_0 = \text{tg } \delta_0$. Da $\text{tg } \delta_0 > \text{arc } \delta_0$, so ist das Bild des Poles P ein Kegelkreis zwischen D_1E_1 und S , die Pro-

jektion also eine *Kegelstumpfprojektion I. Art*. Das Halbmessergesetz lautet

$$m = \operatorname{tg} \delta_0 + \operatorname{arc} (\delta - \delta_0).^1)$$

8. Der eben behandelten Projektionsart mit längentreuen Meridianen steht die *wahre Kegelprojektion* gegenüber, welche alle Parallelkreise längentreu abbildet. Sie ist die direkte Verallgemeinerung der orthographischen Azimutalprojektion. Fig. 1 veranschaulicht diese Projektion, wenn daselbst alle Linien DD_1, dd_1, \dots mit der Achse parallel laufen. Das Halbmessergesetz lautet

$$(12) \quad m = \frac{\sin \delta}{n}, \text{ mit } h = \frac{\cos \delta}{n}, \quad k = 1.$$

Diese Projektion läßt sich stets auffassen als diejenige auf den *Berührungskegel* des Parallels $\delta_0 = 90 - \gamma$ ($n = \cos \delta_0$), dessen Umgebung auf dem Kegel kongruent abgebildet wird.

B. Winkeltreue Projektionen.

9. Bei einer *winkeltreuen* Abbildung müssen für jeden einzelnen Punkt der Karte die Indicatrixhalbachsen h, k einander gleich sein. Durch Gleichsetzen ihrer Ausdrücke in (4) und (5) ergibt sich die diesen Projektionen zu Grunde liegende Differentialgleichung

$$(13) \quad \frac{dm}{d\delta} = \frac{n \cdot m}{\sin \delta}.$$

Ihre Integralgleichung lautet, unter $C = \lg c$ die Integrationskonstante verstanden,

$$(14) \quad m = c \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^n.$$

Diese Formel, das allgemeine Halbmessergesetz der winkeltreuen Projektionen, ergibt für $\delta = 0^\circ$ und $\delta = 180^\circ$ stets $m = 0$, bezüglich $m = \infty$. Es folgt, daß jede winkeltreue Projektion eine *Kegelprojektion* im engeren Sinne ist und daß die Abbildung des ganzen Globus einen ganzen Kegel, von dessen Scheitel bis ins Unendliche, erfordert.

1) Es läßt sich nun leicht die Bedingung angeben, unter welcher die in Nr. 4 aufgestellte Gleichung (8), welche allgemein die längentreuen Parallelkreise bestimmt, eine *Doppelwurzel* hat. Wenn nämlich die Abbildung auf den Berührungskegel eines sich längentreu abbildenden Parallels δ' geschieht, so vereinigen sich die beiden längentreuen Parallelkreise. Man setze also in $(\operatorname{arc} \delta + c) \cdot n = \sin \delta$ ein $\delta = \delta'$, $n = \cos \delta'$, $\operatorname{arc} \delta' = \operatorname{arc} \cos n$ und $\sin \delta = \sin \delta' = \sqrt{1 - n^2}$, so folgt

$$(\operatorname{arc} \cos n + c) n = \sqrt{1 - n^2}.$$

Ist diese Gleichung zwischen n und c erfüllt, so hat die Gleichung (8) eine Doppelwurzel.

Nebenbei bemerkt nimmt die Gleichung (2), $m \cdot n = \sin \delta$, aus welcher die Polabstände δ der längentreuen Parallelkreise zu berechnen sind, die Gestalt an

$$c \cdot n \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}\right)^n = \sin \delta.^1)$$

Um die Verzerrungen zu beurteilen, berechnet man

$$h = k = \frac{dm}{d\delta} = \frac{n \cdot m}{\sin \delta} = n \cdot c \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}\right)^n}{\sin \delta} = \frac{n \cdot c}{2} \frac{\left(\frac{\sin \delta}{\cos \frac{\delta}{2}}\right)^{n-1}}{\left(\cos \frac{\delta}{2}\right)^{n+1}}.$$

Es folgt, daß die Abbildung der Umgebung der Pole unstetig ist. Der Bildradius des Poles Q ist unendlich groß. Für den Pol P , dessen Bild der Kegelscheitel ist, also für $\delta = 0$ wird $h = k = 0$, die Verzerrungen werden ebenfalls unendlich stark. Es ist überhaupt unmöglich, die Umgebung des Poles P auf den Kegel als Umgebung seines Scheitels S , in den kleinsten Teilen *ähnlich* abzubilden, wie hier verlangt wird. Es sei nämlich, Fig. 6 (woselbst nun nicht mehr $PH = SH_1$ sein soll), HI ein dem Pole P unendlich benachbarter Parallel p und $H_1 I_1$ oder p_1 sein Bild auf dem Kegel RST (letzterer als Schnittkegel durch den Pol gelegt). Die von P ausgehenden Meridianbogen zerlegen die Fläche von p in gleichschenklige Netzdreiecke, die bei gleichmäßiger Verteilung der Meridiane kongruent sind. Es seien die Winkel dieser Netzdreiecke bei P gleich α . Nun teile man p_1 in ebensoviele gleiche Teile wie den Parallel p und verbinde die Teilpunkte mit S . Die so entstehenden ebenfalls kongruenten gleichschenkligen Dreiecke sind die Bilder der eben genannten von P ausgehenden. Nun sind die Winkel der Bilddreiecke bei S gleich $\alpha' = n \cdot \alpha$. Es können also in der Tat die Originaldreiecke und ihre Bilder unmöglich *ähnlich* sein, nämlich als gleichschenklige Dreiecke mit verschiedenen Winkeln an den Scheiteln. — Diese Dreiecke, deren *ähnliche* Abbildung unmöglich ist, werden nun dadurch unterdrückt, daß das Verhältnis $SH_1 : PH$ zu Null wird ($h = 0$ für $\delta = 0$).

1) Man kann auch hier die Bedingung dafür, daß diese Gleichung für δ zwei gleiche Werte liefere, in geschlossener Form angeben. Der Fall tritt ein, wenn wieder ein Parallel δ' sich auf seinen *Berührungskegel* selbstentsprechend (längentreu) abbildet. Dasselbe gilt dann ohne weiteres für den unendlich benachbarten Parallel. Obige Gleichung muß also erfüllt sein für $\delta = \delta'$, $\cos \delta' = n$. Es ist dann $\sin \delta' = \sqrt{1 - n^2}$, $\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} = \operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta'}{1 + \cos \delta'}} = \sqrt{\frac{1 - n}{1 + n}}$ und durch Einsetzen folgt die Bedingungsgleichung zwischen c und n

$$c \cdot n \cdot \sqrt{\left(\frac{1 - n}{1 + n}\right)^n} = \sqrt{1 - n^2}, \quad \text{oder} \quad c^2 \cdot n^2 \frac{(1 - n)^{n-1}}{(1 + n)^{n+1}} = 1.$$

Wird der für die Abbildung benutzte Kegel unverändert beibehalten, so bleibt n konstant. Eine Änderung des Parameters c in (14) hat in diesem Fall eine proportionale Änderung der Bildradien sämtlicher Parallelkreise zur Folge, während die Meridianbilder unverändert bleiben. Das gesamte Bild erfährt eine Ähnlichkeitsreduktion; *alle winkeltreuen Abbildungen, welche mit Hilfe desselben Kegels ausgeführt werden, sind ähnlich.*

Die Konstante c hat hier bekanntlich eine einfache geometrische Bedeutung. Für $\delta = 90^\circ$ liefert nämlich die Gleichung (14) $m = c$. Diesen Bildradius des Äquators bezeichnet man mit m_a ; in diesem Falle lautet das Halbmessergesetz der winkeltreuen Projektionen immer noch ganz allgemein

$$(15) \quad m = m_a \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^n, \text{ mit } h = k = m_a \cdot n \cdot \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^n}{\sin \delta}.$$

Um eine einzelne dieser unendlich vielen möglichen Projektionen auf denselben Kegel von beliebigem Winkel γ zu erhalten, wird man für $c = m_a$ je einen bestimmten Wert wählen. Allgemeiner kann man (Fig. 1, 2) einem beliebigen Parallel DE des Globus einen bestimmten Kegelparallel D_1E_1 entsprechen lassen. Die übrigen Parallelkreise wie de, d_1e_1 , entsprechen sich dann eindeutig derart, daß alle unendlich kleinen Netzvierecke wie $FGfg, F_1G_1f_1g_1$ ähnlich sind.¹⁾

10. Über die beiden Konstanten $n = \sin \gamma$ und $c = m_a$ läßt sich so verfügen, daß die Abbildung auf den *Berührungskegel* eines Mittelparallels DE (Fig. 7) geschieht, wobei selbstverständlich der Berührungsparallel sich längentreu abbilden soll. Globus und Kegel haben dann wieder den unendlich schmalen Flächenstreifen längs DE entsprechend gemein, diese unendlich schmale Zone wird auf dem Kegel kongruent abgebildet.

Es ist in diesem Fall weiter $\gamma = 90 - \delta_0$, also $n = \cos \delta_0$; der Bildradius des Parallels δ_0 ist $m_0 = \operatorname{tg} \delta_0$. Nach (15) ist $m_0 = m_a \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right)^n$, somit $m_a \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right)^n = \operatorname{tg} \delta_0$, $m_a = \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right)^n} = \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right)^{\cos \delta_0}}$. Das Halbmessergesetz nimmt die Gestalt an

$$(16) \quad m = m_a \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{\cos \delta_0}, \text{ mit } h = k = \frac{\sin \delta_0}{\sin \delta} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos \delta_0}.$$

1) Die Differentialgleichung (18) drückt nichts anderes aus.

11. Soll nur *ein* Parallelkreis DE vom Polabstand δ' längentreu abgebildet werden, so bleibt der Kegel willkürlich. Man wird ihn zweckmäßigerweise als (beliebigen) *Schnittkegel* des Globus durch jenen Parallel δ' legen; der Scheitel S ist dann ein beliebiger Punkt der Achse CP , Fig. 5. — Bezeichnet man den Bildradius von DE mit $m' = SD_1$, so hat man nach (14) $m' = c \left(\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} \right)^n$. Andererseits ist $DU = m' n = \sin \delta'$. Aus diesen zwei Gleichungen folgt durch Gleichsetzen von m'

$$c = \frac{\sin \delta'}{n \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} \right)^n}.$$

Damit lautet das Halbmessergesetz für diese Art der winkeltreuen Projektion:

$$(17) \quad m = \frac{\sin \delta'}{n} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2}} \right)^n, \text{ mit } h = k = \frac{\sin \delta'}{\sin \delta} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2}} \right)^n.$$

Selbstverständlich wird die unendlich nahe Umgebung des längentreuen Parallels δ' auf dem Kegel und in der Karte in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet; für $\delta = \delta'$ wird $h = k = 1$ (vgl. Nr. 4, S. 174–75).

12. Bei der Lambert-Gaußschen winkeltreuen Projektion sollen zwei im voraus gegebene Parallelkreise DE , FG von den Polabständen δ' , δ'' längentreu abgebildet werden. Die Bildkreisradien der Parallelkreise δ' und δ'' sind nach dem auch für diese Projektion bestehenden Halbmessergesetz (15)

$$m' = m_a \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} \right)^n, \quad m'' = m_a \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta''}{2} \right)^n;$$

die beiden Kreise δ' , δ'' werden längentreu abgebildet, wenn

$$m' \cdot n = \sin \delta', \quad m'' \cdot n = \sin \delta''.$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach n und m_a folgt

$$(18) \quad n = \frac{\lg \sin \delta'' - \lg \sin \delta'}{\lg \operatorname{tg} \frac{\delta''}{2} - \lg \operatorname{tg} \frac{\delta'}{2}}, \quad m_a = \frac{\sin \delta'}{n \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} \right)^n} = \frac{\sin \delta''}{n \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta''}{2} \right)^n}.$$

Der Hilfskegel kann auch hier als Schnittkegel durch DE oder FG gelegt werden. Im übrigen hat er, nach der Formel für n zu schließen, offenbar keine in einfacher Weise angebbare Lage zu den beiden längentreuen Parallelkreisen.

Läßt man bei dieser Lambert-Gaußschen Projektion δ'' zu δ' werden, so geht sie über in die in Nr. 10 behandelte Projektion auf den Berührungkegel des Parallels δ' (resp. δ_0). Dieser Übergang ist dem in Nr. 7 besprochenen durchaus analog.

Wird dagegen δ'' gleich Null, so entsteht die in Nr. 11 behandelte Projektion auf den beliebigen Schnittkegel durch den Mittelparallel δ' . Von den eingangs voriger Nummer aufgestellten Gleichungen bleiben für $\delta'' = 0$ zur Bestimmung von m_a , m' und n nur übrig:

$$m' = m_a \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2}\right)^n, \quad m' \cdot n = \sin \delta',$$

aus denen sich n , m_a und m' nicht bestimmen lassen. Hat man jedoch n willkürlich gewählt, so werden

$$m_a = \frac{\sin \delta'}{n \left(\operatorname{tg} \frac{\delta'}{2}\right)^n}, \quad m' = \frac{\sin \delta'}{n};$$

jede dieser unendlich vielen Projektionen erfüllt die an sie gestellten Forderungen.

C. Flächentreue Projektionen.

13. Eine Projektion ist *flächentreu*, wenn sich alle beliebig großen oder kleinen Flächenstücke des Globus in wahrer Größe abbilden. Diese Forderung ist erfüllt, wenn der üblicherweise mit S bezeichnete Ausdruck $h \cdot k$ für jeden Punkt der Karte den Wert 1 hat. Man erhält somit nach (4) und (5) als charakteristische Differentialgleichung aller flächentreuen (echt konischen) Projektionen:

$$(19) \quad \frac{dm}{d\delta} \cdot \frac{n \cdot m}{\sin \delta} = 1.$$

Durch Integration ergibt sich das allgemeine Halbmessergesetz $n \cdot \frac{m^2}{2} = -\cos \delta + c$, oder:

$$(20) \quad m = \sqrt{\frac{2(c - \cos \delta)}{n}}, \quad \text{mit } k = \frac{\sqrt{2n(c - \cos \delta)}}{\sin \delta} = \frac{1}{h}.$$

Für $\delta = 90^\circ$ ergibt sich der Bildradius des Poles P , $m_p = \sqrt{\frac{2(c-1)}{n}}$.

Nach dieser Formel ist m_p reell und von Null verschieden, die Projektion eine *Kegelstumpfprojektion I. Art*, wenn $1 < c < \infty$. Für $c = 1$ ist sie eine *Kegelprojektion*; für $-1 < c < +1$ eine *Kegelstumpfprojektion II. Art*, wobei m_p imaginär ist.¹⁾ Es ist in diesem Fall der Kegel-

1) Sollen für m überhaupt reelle Werte möglich sein, so muß wegen $-1 < \cos \delta < +1$ die Konstante c einen Wert haben zwischen -1 und $+\infty$.

scheitel S das Bild eines Parallels δ_0 mit $\cos \delta_0 = c$. Die Abbildung der Umgebung dieses Kreises wird unstetig, für $\delta = \delta_0$ wird

$$h = \infty, \quad k = 0.$$

Auf dem Kegel wird nur die Kugelkappe abgebildet vom Gegenpol Q bis zu dem genannten Parallel δ_0 ; die Abbildung setzt sich nicht über den Pol hinaus auf den Ergänzungskegel fort, denn für $\cos \delta > c$ wird der Bildradius m imaginär.

Die *längentreu abgebildeten Parallelkreise* werden hier durch eine *algebraische* Gleichung zweiten Grades bestimmt. Setzt man nämlich $m \cdot n = \sin \delta$, so folgt aus (20):

$$(21) \quad \cos^2 \delta - 2n \cos \delta + (2nc - 1) = 0.$$

Die Diskussion dieser Gleichung lehrt namentlich folgendes. Eine *Kegelprojektion* ($c = 1$) bildet stets zwei Parallelkreise längentreu ab, von denen der eine mit dem Pol P zusammenfällt. — Bei der *Kegelstumpfprojektion I. Art* ($c > 1$) sind die längentreuen Parallelkreise reell und verschieden, wenn $1 < c < \frac{n^2 + 1}{2n}$. Für den maximalen zulässigen Wert $c = \frac{n^2 + 1}{2n}$ besitzt die Gleichung eine *Doppelwurzel* $\cos \delta = n$, wobei die Abbildung auf den Berührungskegel dieses ausgezeichneten Parallels geschieht. Ist $c > \frac{n^2 + 1}{2n}$, so sind die beiden Wurzeln $\cos \delta$ imaginär. — Die *Kegelstumpfprojektion II. Art* ($c < 1$) weist nur einen längentreuen Parallel auf, da die eine Wurzel $\cos \delta$ größer als 1 wird.

In dem allgemeinen Ausdruck für m , Gleichung (20), kommen zwei Konstante n und c vor. Die Projektion kann zwei an sie gestellte Bedingungen erfüllen. Die Festsetzung von n bedeutet die Auswahl des Hilfskegels. Über c wird verfügt, wenn man einem beliebigen Parallel δ' einen bestimmten Bildradius m' zuweist, es ist dann nach (20) $m' = \frac{2(c - \cos \delta')}{n}$. Eliminiert man c aus diesen Gleichungen für m und m' , so entsteht als neuer Ausdruck des Halbmessergesetzes:

$$(22) \quad m = \sqrt{\frac{2(\cos \delta' - \cos \delta)}{n} + m'^2}, \quad \text{mit } k = \frac{\sqrt{2n(\cos \delta' - \cos \delta) + m'^2 \cdot n^2}}{\sin \delta} = \frac{1}{h}.$$

Soll sich zudem dieser Parallel *längentreu* und infolgedessen seine unendlich nahe Umgebung in den kleinsten Teilen kongruent abbilden, so wird nach (2) $m' \cdot n = \sin \delta'$ und damit:

$$(23) \quad m = \frac{\sqrt{2n(\cos \delta' - \cos \delta) + \sin^2 \delta'}}{n}, \quad \text{mit } k = \frac{\sqrt{2n(\cos \delta' - \cos \delta) + \sin^2 \delta'}}{\sin \delta} = \frac{1}{h}.$$

Die erstere dieser Gleichungen liefert folgende Konstruktion des Kegels, nämlich seines Scheitels S . Man bringe (Fig. 8) die Meridiantangenten in D und P zum Schnitt in X , so ist $DX = \operatorname{tg} \frac{\delta'}{2}$. Auf der ersteren Tangente trage $DX = XD''$ ab, so ist $DD'' = m'$ (offenbar ist D'' der Schnittpunkt der Tangente DT mit der Parallelen durch P zu CX , und es geht zudem diese Linie PD'' durch den D gegenüberliegenden Punkt D^* des Meridians PEQ). Beschreibt man nun um D den durch D'' gehenden Bogen, so wird die Achse im Kegelscheitel S geschnitten.

Die zweite Formel (24) liefert eine genauere Konstruktion des Kegels, welche zudem den großen Vorteil bietet, umkehrbar zu sein. Der Schnittpunkt Y der Halbierungslinie CX des Winkels δ' mit der Sehne DP ist die Mitte dieser Sehne. Offenbar ist $CY = \cos \frac{\delta'}{2}$ (weil $CP = 1$). Die Projektion von CY auf CP ist $CY' = \cos^2 \frac{\delta'}{2}$. Dieser Wert stimmt mit $n = \sin \gamma$ überein. Nun ist CY' der Sinus des Winkels $Y'ZC$, wobei der Bogen PD von YY' in Z geschnitten wird; es ist also $\angle Y'ZC = \gamma$. Da ferner $ZY' \perp SY'$, so steht der Endschenkel SD des Winkels γ (bei S) auf CZ senkrecht. (Der Hilfskegel K , hier durch DE gelegt, ist dem Berührungskegel des Parallels des Punktes Z parallel.)

Beachtet man, daß Y' die Mitte von PU ist, so erhält man folgende Umkehrung dieser Konstruktion. Es sei der Kegel K , nämlich der Winkel γ , bekannt. Man trage γ irgendwo an CP als Anfangsschenkel an, fälle aus C auf den Endschenkel von γ die Senkrechte, welche den Meridian PQ in Z schneidet. Aus Z fälle man auf den Radius CP die Senkrechte ZY' , mache $PY' = Y'U$, so ist U der Mittelpunkt des eigentlichen längentreuen Parallels DE dieser Kegelprojektion.

15. (Fig. 8). Zu der *Abbildung der Parallelkreise* auf den Kegel übergehend sei FG vom Polabstand δ ein beliebiger Parallel, man berechne und konstruiere sein Bild F_1G_1 .¹⁾

Den Bildradius von FG , nämlich $SF_1 = SG_1$, bezeichnet man mit m ; der Radius des Kegelkreises F_1G_1 ist dann $m \cdot n$. Die Oberfläche des Kegels SF_1G_1 wird damit gleich $\pi m^2 n$, die entsprechende Kugelhälfte FPG ist $2\pi(1 - \cos \delta)$. Durch Gleichsetzen dieser ent-

sprechenden Flächen folgt $m = \sqrt{\frac{2(1 - \cos \delta)}{n}} = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\sqrt{n}}$, was mit Formel (20),

1) Die Abbildung der Umgebung des Poles $\delta = 0$ ist am Schlusse der nächsten Nummer auseinandergesetzt.

für $c = 1$, übereinstimmt. Da ferner nach voriger Nummer, $n = \cos^2 \frac{\delta'}{2}$, so lautet das Halbmessergesetz:

$$(25) \quad m = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta'}{2}}, \text{ mit } h = \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta'}{2}} = \frac{1}{k}.$$

Für den Bildkreis $F_1 G_1$ bestehen einfache geometrische Konstruktionen. Aus $m = 2 \sin \frac{\delta}{2} : \cos \frac{\delta'}{2}$, $n = \sin \gamma = \cos^2 \frac{\delta'}{2}$, folgt $m \cdot \sin \gamma = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta'}{2}$. Die linke Seite ist der Abstand des Punktes G_1 von der Achse CS . Rechts ist $2 \sin \frac{\delta}{2}$ gleich der Sehne PG . Um $PG \cdot \cos \frac{\delta'}{2}$ zu erhalten, dreht man PG um P , bis G nach G_2 in PE zu liegen kommt. Es haben alsdann die Punkte G_2 und G_1 von der Achse CS denselben Abstand; es wird die Kegelseite SE von der Parallelen durch G_2 zu der Achse im gesuchten Punkte G_1 geschnitten, womit der Kegelparallel $F_1 G_1$ konstruiert ist.

Eine zweite Konstruktion liefert den Bildradius $m = SG_1$. Es ist $m = 2 \sin \frac{\delta}{2} : \cos \frac{\delta'}{2}$; $\cos \frac{\delta'}{2} = CY$, $1 : \cos \frac{\delta'}{2} = CX = CN$, wo N der Schnittpunkt der Meridiantangenten in P und E ist. Es ist somit $m = PG \cdot CN$. Um $PG = 2 \sin \frac{\delta}{2}$ mit CN zu multiplizieren, bemerke man, daß $PC = 1$; man drehe PG um P nach PG_0 in die Achse und ziehe durch G_0 die Parallele zu CN bis zum Schnitt mit der Poltangente PN in G_3 . Es ist $G_0 G_3$ das verlangte Produkt und $m = SG_1 = G_0 G_3$ der Bildradius des Parallels FG . — Der äußerste und größte aller dieser Bildradien ist derjenige des Gegenpols Q , gleich $Q_0 Q_3$, der, wie leicht zu zeigen ist, durch $E = E_1$ geht ($\sphericalangle PQE = \frac{\delta'}{2}$).

Anhang. Für diese winkeltreue Kegelprojektion ist $c = 1$, es wird damit die allgemeine Gleichung (21) für die längentreuen Parallelkreise zu $\cos^2 \delta - 2n \cos \delta + (2n - 1) = 0$, d. i.

$$\{\cos \delta - 1\} \cdot \{\cos \delta - (2n - 1)\} = 0.$$

Die erste Wurzel ist $\cos \delta = 1$ und dementsprechend der Pol $\delta = 0$ der eine längentreue Parallel. Für den zweiten ist $\cos \delta = 2n - 1$; für die hier eingeführte Bezeichnung $\cos \delta' = 2n - 1$. Daraus folgt, daß $n = \cos^2 \frac{\delta'}{2}$, wie in (24) angegeben.

Der eigentliche längentreue Parallel δ' oder DE ist nun für einen gegebenen Kegel RST (Fig. 9) sehr leicht zu finden. Man trage auf

der Senkrechten aus Q auf RS die Längeneinheit $QA = QC$ ab, fälle aus A auf QC die Senkrechte AB , so ist $QB = n (= \sin \gamma)$. Trägt man in der Achse $QB = BU$ ab, so ist $QU = 2n$, $CU = 2n - 1 = \cos \delta'$; es ist U der Mittelpunkt des längentreuen Parallels DE und D_1E_1 sein Bild auf dem Kegel. — Diese Konstruktion ist ohne weiteres *umkehrbar*; zu gegebenem DE oder δ' läßt sich der Kegel eindeutig finden.

Fig. 9.

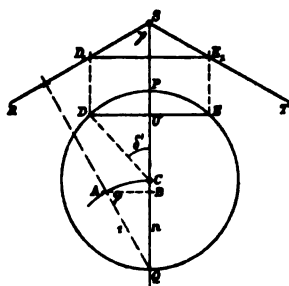
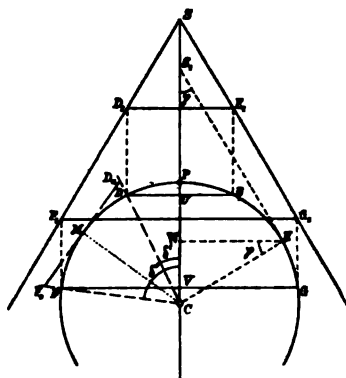


Fig. 10.



16. Die *flächentreue Kegelstumpfprojektion von Albers* bildet zwei im voraus gegebene Parallelkreise DE , FG von den Polabständen δ' , δ'' längentreu ab (Fig. 10). Es ist somit vor allem ein Kegel K zu ermitteln, auf welchem sich zwei Kreise D_1E_1 , F_1G_1 von den Radien $\sin \delta'$, $\sin \delta''$ befinden, derart, daß die Oberfläche des Kegelstumpfes $D_1E_1F_1G_1$ gleich ist der Oberfläche der entsprechenden Kugelzone $DEFG = 2\pi (\cos \delta' - \cos \delta'')$. Bezeichnet man die Seitenabschnitte SD_1 , SF_1 des Kegels mit m' , m'' , so hat der Kegelstumpf die Oberfläche:

$$2\pi \frac{\sin \delta' + \sin \delta''}{2} (m'' - m').$$

Durch Gleichsetzen dieser Flächen folgt:

$$(26) \quad (m'' - m') (\sin \delta'' + \sin \delta') = 2 (\cos \delta' - \cos \delta''),$$

$$(m'' - m') 2 \sin \frac{\delta'' + \delta'}{2} \cos \frac{\delta'' - \delta'}{2} = 4 \sin \frac{\delta'' + \delta'}{2} \sin \frac{\delta'' - \delta'}{2},$$

$$(27) \quad m'' - m' = 2 \operatorname{tg} \frac{\delta'' - \delta'}{2}.$$

Es ist damit die Länge D_1F_1 der Seite des Kegelstumpfes berechnet. Die Formel (27) liefert folgende einfache *Konstruktion*.¹⁾ An

1) Zöppritz-Bludau S. 108.

den Bogen DF lege man in dessen Mitte M die Tangente und bringe sie in D_0, F_0 zum Schnitt mit CD, CF . D_0F_0 stimmt mit der Seite D_1F_1 des Kegelstumpfes überein. Offenbar sind Kegelstumpf und Kegel durch die Länge von D_1F_1 und die Radien $\sin \delta', \sin \delta''$ der Kreise D_1E_1, F_1G_1 eindeutig bestimmt.

Da die Parallelkreise δ', δ'' des Globus längentreu abgebildet werden, so sind nach (2) $m' \cdot n = \sin \delta', m' = \frac{\sin \delta'}{n}$ und $m'' = \frac{\sin \delta''}{n}$. Durch Einsetzen in (26) folgt:

$$\frac{\sin \delta'' - \sin \delta'}{n} (\sin \delta'' + \sin \delta') = 2 (\cos \delta' - \cos \delta''),$$

$$n = \frac{\sin^2 \delta'' - \sin^2 \delta'}{2 (\cos \delta' - \cos \delta'')} = \frac{1 - \cos^2 \delta'' - 1 + \cos^2 \delta'}{2 (\cos \delta' - \cos \delta'')} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 \delta' - \cos^2 \delta''}{\cos \delta' - \cos \delta''},$$

oder

$$(28) \quad n = \frac{1}{2} (\cos \delta' + \cos \delta'').$$

Durch Zuhilfenahme von Fig. 3 kann die Berechnung von n etwas vereinfacht werden. Es sind $D_1U_1 = \sin \delta', F_1V_1 = \sin \delta''$; man nehme $D_1F_1 = m'' - m' = 2 \sin \frac{\delta'' - \delta'}{2} : \cos \frac{\delta'' - \delta'}{2}$ nach (27). Es wird dann:

$$= \sin \gamma = \frac{F_1H}{F_1D_1} = \frac{\sin \delta'' - \sin \delta'}{m'' - m'} = \cos \frac{\delta'' + \delta'}{2} \cos \frac{\delta'' - \delta'}{2} = \frac{1}{2} (\cos \delta' + \cos \delta'').$$

Nach (28) läßt sich der Kegel K in folgender Weise konstruieren (Fig. 10). Es seien U, V die Centra der längentreuen Parallelkreise DE, FG des Globus und W die Mitte zwischen U und V , so ist $CW = \frac{1}{2} (\cos \delta' + \cos \delta'') = n = \sin \gamma$. In W errichte man auf der Achse die Senkrechte, welche den Bogen EG in H schneidet. Aus $CW = \sin \gamma$ folgt, daß γ mit dem Winkel WHC übereinstimmt. Die Meridiantangente in H bildet mit der Achse bei S_1 den Winkel γ ; der gesuchte Kegel ist dem Berührungskegel des Parallelkreises des Punktes H gleich. Diesen berührenden Kegel verschiebe man in der Richtung der Achse, bis sein Scheitel nach dem beliebigen Punkte S fällt und benutze ihn in dieser Lage zur Abbildung. Schneidet man seine in der Zeichnungsfläche liegenden (Umriß-)Erzeugenden mit den Parallelen durch D, E, F, G zur Achse in D_1, E_1, F_1, G_1 , so sind endlich D_1E_1, F_1G_1 die Bilder der längentreu abzubildenden Parallelkreise. — Den Kegel kann man jederzeit als *Schnittkegel* so legen, daß er mit dem Globus den einen der längentreuen Parallelkreise DE, FG entsprechend gemein hat (Nr. 4, S. 174).

1) Dieser Wert für n ergibt sich aus (23), wenn dort $\delta = \delta''$ und $m (= m'') = \frac{\sin \delta''}{n}$ sich entsprechen sollen.

Um das *Halbmessergesetz* zu finden, führe man den beliebigen Parallelkreis IK vom Polabstande δ ein. Auf dem Kegel sei I_1K_1 mit den Seitenabschnitten $SI_1 = SK_1 = m$ sein Bild. Nun berechnet man die Zonen des Globus und des Kegels entweder von DE nach IK und von D_1E_1 nach I_1K_1 oder von FG nach IK und von F_1G_1 nach I_1K_1 und setzt sie einander gleich. Man findet in Übereinstimmung mit (23)

$$m = \frac{1}{n} \sqrt{2n(\cos \delta' - \cos \delta) + \sin^2 \delta'} = \frac{1}{n} \sqrt{2n(\cos \delta'' - \cos \delta) + \sin^2 \delta''},$$

oder auch durch Einsetzen des Wertes von n aus (28) den symmetrischen Ausdruck

$$(29) \quad m = \frac{2 \sqrt{1 + \cos \delta' \cos \delta'' - (\cos \delta' + \cos \delta'') \cos \delta}}{\cos \delta' + \cos \delta''}.$$

Die Bildradien der ausgezeichneten Parallelkreise, nämlich der Pole und des Äquators, sind in gewohnter Bezeichnung

$$m_p = \frac{4 \sin \frac{\delta'}{2} \sin \frac{\delta''}{2}}{\cos \delta' + \cos \delta''}, \quad m_a = \frac{2 \sqrt{1 + \cos \delta' \cos \delta''}}{\cos \delta' + \cos \delta''}, \quad m_e = \frac{4 \cos \frac{\delta'}{2} \cos \frac{\delta''}{2}}{\cos \delta' + \cos \delta''}$$

mit $2m_a^2 = m_p^2 + m_e^2$; die Konstante (Nr. 13) ist $c = \frac{1 + \cos \delta' \cos \delta''}{\cos \delta' + \cos \delta''}$.

Läßt man bei vorstehender Projektion von Albers den einen längentreuen Parallel zum Pol P werden, während der andere unverändert bleiben soll, so entsteht als *Sonderfall* die in Nr. 14, 15 behandelte flächentreue Kegelprojektion von Lambert. Für $\delta'' = 0$ findet man in der Tat aus (28), (29)

$$n = \frac{1 + \cos \delta'}{2} = \cos^2 \frac{\delta'}{2}, \quad m = 2 \frac{\sqrt{(1 + \cos \delta')(1 - \cos \delta')}}{1 + \cos \delta'} = 2 \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta'}{2}},$$

wie in (24) und (25). — Solange δ'' einen endlichen Wert hat, wird die unendlich nahe Umgebung dieses Parallels auf den Kegel (und die Karte) in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet. Wird dagegen $\delta'' = 0$, so kann das nach Nr. 9 nicht mehr stattfinden. Um nun von der Abbildung der Umgebung des Poles P auf die Umgebung des Kegelscheitels eine deutliche Vorstellung zu erhalten, beachte man, daß für $\delta'' = 0$ die Indicatrixhalbachsen allgemein die Werte haben

$$k = \frac{\cos \frac{\delta'}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\cos \frac{\delta}{2}} = \frac{1}{h}, \quad \text{für } \delta = 0 \text{ somit } k = \sqrt{n}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad \text{Die Basen}$$

der vom Pol ausgehenden unendlich kleinen Netzdreiecke werden im Verhältnis $1:k = 1:\sqrt{n}$ verkürzt, während die Schenkel im Verhältnis $1:k = \sqrt{n}:1$ vergrößert abgebildet werden, so daß also die Flächengleichheit bestehen bleibt.

Andererseits kann man derart spezialisieren, daß die beiden längentreuen Parallelkreise zusammenfallen. Man lasse dementsprechend $\delta'' = \delta' = \delta_0$ werden, so folgt aus (28) und (29)

$$n = \cos \delta_0, \quad m = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta}}{\cos \delta_0},$$

es sind dies die Grundformeln für die in den folgenden Nummern zu behandelnde Projektion.

17. Der Globus werde nun flächentreu auf den *Berührungskegel* eines bestimmten Mittelparallels DE vom Polabstand δ_0 abgebildet, wobei dieser ausgezeichnete Parallel sich längentreu abbilden soll. Für jeden Punkt des Parallels δ_0 wird nach Nr. 13 $h = k = 1$, die unendlich nahe Umgebung des Parallels wird in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet. Globus und Kegel haben den Flächenstreifen längs DE entsprechend gemein. Die beiden längentreuen Parallelkreise sind in DE vereinigt; bei der Abbildung des Globus auf den Kegel ist DE doppelt selbstentsprechend.

In Fig. 11 ist die Zeichnungsfläche ein ebener Schnitt des Globus und des Kegels durch die gemeinsame Achse SC . Der Winkel γ des Kegels ist gleich $90 - \delta_0$, also die Konstante $n = \sin \gamma = \cos \delta_0$. Der Bildradius des Berührungsparallels ist $SE = m_0 = \operatorname{tg} \delta_0$.

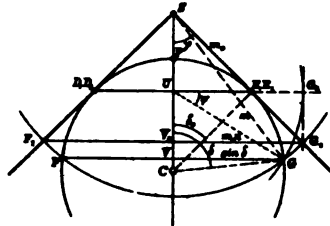
Das Bild des beliebigen Globusparallels FG vom Polabstand δ sei der Kegelparallel F_1G_1 mit $SF_1 = SG_1 = m$. Es haben in diesem Fall die Zonen $DEFG$ und $D_1E_1F_1G_1$ des Globus und des Kegels gleiche Oberfläche. Die Radien der beiden Basen des Kegelstumpfes sind $m \cdot n$ und $m_0 \cdot n$, die Seitenlänge ist $m - m_0$, somit die Oberfläche gleich $\pi(m \cdot n + m_0 \cdot n)(m - m_0)$; die Oberfläche der Kugelzone ist $2\pi(\cos \delta_0 - \cos \delta)$. Durch Gleichsetzen folgt

$$(m^2 - m_0^2) \cdot n = 2(\cos \delta_0 - \cos \delta),$$

wo $m_0 = \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\sin \delta_0}{n}$, also

$$m^2 = \frac{2(\cos \delta_0 - \cos \delta)}{n} + \frac{\sin^2 \delta_0}{n^2} = \frac{2n(\cos \delta_0 - \cos \delta) + \sin^2 \delta_0}{n^2},$$

Fig. 11.



wie in (23). Setzt man wieder $n = \cos \delta_0$, so ergibt sich folgende bequeme Schreibweise der fundamentalen Formeln

$$(30) \quad m = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta}}{\cos \delta_0}, \quad n = \cos \delta_0^1),$$

worauf am Schlusse voriger Nummer bereits hingewiesen wurde.

Für den FG oder δ entsprechenden Kegelparallel $F_1 G_1$ bestehen zwei einfache Konstruktionen:

a) Es seien U, V die Mittelpunkte von DE und FG . Verbindet man U mit G , so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck UVG (Fig. 11)

$$UG^2 = UV^2 + VG^2 = (\cos \delta_0 - \cos \delta)^2 + \sin^2 \delta = 1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta,$$

$$UG = \sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta}.$$

Nach (30) ist $m \cos \delta_0 = m \sin \gamma = UG$, es ist also UG dem Radius $V_1 G_1$ des Kegelkreises $F_1 G_1$ gleich. Dreht man UG um U und um den Winkel ψ nach UG_2 (in UE) und zieht man durch den Endpunkt G_2 die Parallele zu der Achse, so wird SE von ihr in G_1 geschnitten. Damit ist der Bildkreis $F_1 G_1$ konstruiert.

b) Eine noch einfachere Übertragung der Parallelkreise auf den Kegel beruht darauf, daß $m = SG_1$ direkt mit SG übereinstimmt. Es ist nämlich, Fig. 11, $CS = \frac{1}{\cos \delta_0}$, $CV = \cos \delta$, also $VS = \frac{1}{\cos \delta_0} - \cos \delta = \frac{1 - \cos \delta_0 \cos \delta}{\cos \delta_0}$. Ferner ist $VG = \sin \delta$, also

$$SG = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \delta_0 \cos \delta}{\cos \delta_0}\right)^2 + \sin^2 \delta} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta}}{\cos \delta_0} = m.$$

Um G_1 zu erhalten, hat man somit einfach um S mit dem Radius SG einen Bogen zu ziehen, er schneidet die Kegelseiten SD, SE in F_1 und G_1 .²⁾ — In Fig. 12 sind dementsprechend $SP = SP_1$ und

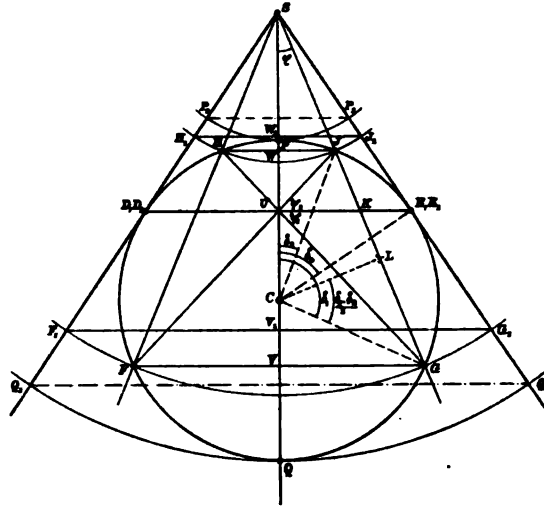
1) Dieser Ausdruck für m geht aus (23) hervor, wenn man dort δ' durch δ ersetzt und $n = \cos \delta_0$ wählt.

2) Die Abbildung der Parallelkreise des Globus auf den Berührungskegel vollzieht sich somit durch eine Schar konzentrischer Kugeln, welche den Kegelscheitel S zum Zentrum haben. Diese Kugeln schneiden Globus und Kegel je in entsprechenden Kreisen. Da die Projektion flächentreu ist, besteht somit folgender Flächensatz: Schneidet man einen geraden Kreiskegel, sowie beliebige Kugeln, welche diesen Kegel längs seiner Kreise berühren, mit einer weiteren Schar konzentrischer Kugeln, deren Zentrum der Kegelscheitel ist, so sind alle zwischen je zwei Kugeln der letzteren Schar liegenden Zonen des Kegels und der ersteren Kugeln einander gleich. Dieser Satz, dessen direkter Beweis hier sehr nahe liegt, kann auf zwei Arten spezialisiert werden. Rückt der Kegelscheitel S unendlich fern, so verwandelt

$SQ = SQ_1$ die Radien m_p, m_q der Polbilder in der Karte. Die Kegelschneidung beansprucht für die Abbildung des ganzen Globus den Kegelstumpf $P_1 P_1 Q_1 Q_1$; seine Seitenlänge stimmt mit $PQ = 2$ überein.

18. Die *Parallelkreise* des Globus sind einander *paarweise zugeordnet* als solche, die auf demselben Kegel aus S , von der Achse SC liegen, Fig. 12. Der Winkel φ jedes solchen Kegels ist kleiner als γ . Es sind FG, HI von den Mittelpunkten V, W ein solches Paar zugeordneter Kreise. Wie gezeigt werden soll, sind sie stets *Linien gleicher Verzerrungen*.

Fig. 12.



Nach Nr. 3 ist für den Parallel FG und sein Bild $F_1 G_1$ auf dem Kegel die Indicatrixhalbachse in tangentialer Richtung $k = \frac{G_1 V_1}{G V}$, für den Bildparallel $H_1 I_1$ ebenso $k = \frac{I_1 W_1}{I W}$. Offenbar sind die gedachten Verbindungslinien GG_1, II_1 parallel, ferner sind $SG = SG_1$ und $SI = SI_1$, somit

$$G_1 V_1 : I_1 W_1 = G_1 S : I_1 S = GS : IS = GV : IW.$$

Somit ist $G_1 V_1 : I_1 W_1 = GV : IW$ oder $G_1 V_1 : GV = I_1 W_1 : IW$; es stimmen für die Bilder dieses Paares von Parallelkreisen die Halbachsen k der Indicatricen überein, ebenso infolge $h = \frac{1}{k}$ die Halbachsen

sich der Kegel in einen gemeinsamen Berührungscylinder der ersteren Schar von Kugeln, die nun sämtlich mit dem Cylinder denselben Radius haben. Es entsteht der Satz von der Gleichheit der Oberfläche irgend einer Kugelzone und einer Zone des Berührungscylinders von gleicher Höhe (Anwendung in Nr. 22). — Läßt man andererseits den Kegel zu einer Ebene werden, so besteht die erstere Kugelschar aus den Kugeln, welche diese Ebene in einem ihrer Punkte S berühren, einschließlich dieser Ebene. Die Kugeln der zweiten Schar haben das gemeinsame Zentrum S . Der allgemeine Satz besteht auch jetzt noch: *Alle Zonen der ersteren Kugeln, die zwischen je zwei Kugeln der zweiten Schar liegen, sind flächengleich.* Vgl. hierzu Nr. 28.

h in radialer Richtung, und es sind die Bildkreise von FG, HI in der Tat Linien gleicher Verzerrungen der Karte.

In voriger Nummer ist nachgewiesen worden, daß $V_1 G_1 = UG$ (vgl. Fig. 11). Nun ist UG als Hypotenuse größer als die Kathete VG , also stets $V_1 G_1 > VG$. Jeder Parallelkreis des Globus wird vergrößert abgebildet. Daraus folgt, daß bei jedem Punkt der Karte die tangentielle Halbachse der Indicatrix die große Halbachse ($= a$), die in radialer Richtung h dagegen die kleine ist ($= b$). Für das Bild des Parallels FG ist $k (= a) = \frac{V_1 G_1}{VG} = \frac{UG}{VG} = \sec \psi_1$, wobei

$$\sphericalangle UGV = \sphericalangle GUE = \psi_1.$$

Bezeichnet man den Polabstand von FG mit δ_1 , so ist

$$UG = \sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_1}, \quad VG = \sin \delta_1,$$

also

$$k (= a) = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_1}}{\sin \delta_1} = \sec \psi_1; \quad h = \cos \psi_1.$$

Hat der entsprechende Globusparallel HI (Fig. 12) den Polabstand δ_2 , so ist für jeden seiner Bildpunkte

$$k = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_2}}{\sin \delta_2} = \sec \psi_2; \quad h = \cos \psi_2,$$

wobei $\sphericalangle EUI = \psi_2$.

In Fig. 12 ist dem Kreise über dem Durchmesser PQ das zu diesem Durchmesser symmetrische Viereck $FGHI$ eingeschrieben. Der Schnittpunkt der Gegenseiten FH, GI ist S , die erste Nebenecke des Vierecks. Die andern beiden Nebenecken liegen auf der Polaren DE von S in Bezug auf den Kreis und zwar die eine unendlich fern. Durch die letzte Nebenecke gehen jene Polare DE , ferner die Polare SC der unendlich fernen Nebenecke, sowie endlich die übrigen Gegenseiten FI und GH des Vierecks. Diese dritte Nebenecke ist als Schnitt von DE und SC nichts anderes als der Punkt U .

Man schließt daraus, daß die Verlängerungen von UI, UG durch F und H gehen (und daß U der Scheitel des zweiten Kegels ist, den man durch die Parallelkreise FG, HI legen kann). Auch folgt, daß die Strahlen UG, UI zu den rechtwinkligen Linien US, UE harmonisch liegen, zu ihnen also gleich geneigt sind, und daß $\psi_1 = \psi_2$. (Auch sind ψ_1 bei G und ψ_2 bei I einander gleich als Peripheriewinkel über demselben Bogen FH .) — Nach einem planimetrischen Satz ist ferner $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}$. Für die Indicatrixhalbachsen der Bilder

des Paares FG , HI von Parallelkreisen hat man nun auch den Ausdruck

$$k = a = \sec \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}, \quad k = b = \cos \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}.$$

Fällt man aus C die Senkrechte CL auf SIG , so ist $\sphericalangle SCL = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$.

Es folgt daraus, daß $\sphericalangle CSL = \varphi = 90 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$.

Um noch die Beziehung zwischen δ_0 und den zugeordneten Werten δ_1, δ_2 herzuleiten, beachte man, daß $SG \cdot SJ = SE^2$. Es ist $SG = \frac{VG}{\sin \varphi} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \varphi}$, $SJ = \frac{WI}{\sin \varphi} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \varphi}$, $SE = \operatorname{tg} \delta_0$. Endlich ist $\sin \varphi = \cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$, und es folgt aus alledem $\frac{\sin \delta_1 \sin \delta_2}{\cos^2 \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}} = \operatorname{tg}^2 \delta_0$, also

$$(31) \quad \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\sqrt{\sin \delta_1 \sin \delta_2}}{\cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}.$$

Der Vollständigkeit wegen soll noch der δ_1 entsprechende Wert δ_2 aus δ_1 und δ_0 berechnet werden. Um dies zu erreichen, setzt man die auf S. 194 angegebenen Ausdrücke für k , für die Parallelkreise δ_1 und δ_2 , einander gleich:

$$\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_1}}{\sin \delta_1} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_2}}{\sin \delta_2}.$$

Indem man quadriert, überall die Cosinus einführt und die Nenner entfernt, kann man mit $\cos \delta_1 - \cos \delta_2$ dividieren, entsprechend der speziellen Lösung $\delta_1 = \delta_2 (= \delta_0)$. Es verbleibt eine in $\cos \delta_2$ lineare Gleichung, und diese liefert

$$(32) \quad \cos \delta_2 = \frac{(1 + \cos^2 \delta_0) \cos \delta_1 - 2 \cos \delta_0}{2 \cos \delta_0 \cos \delta_1 - (1 + \cos^2 \delta_0)}.$$

II.

Cylinderprojektionen.

19. Bei den *wahren Cylinderprojektionen* werden (in normaler Lage) die *Meridiane* des Globus abgebildet als die Erzeugenden (Seiten) eines *Kreiscylinders* und zwar derart, daß der Winkel irgend zweier Meridiane mit dem Winkel der Ebenen übereinstimmt, die man durch die Cylinderachse und die entsprechenden Erzeugenden legen kann. Die *Parallelkreise* dagegen bilden sich ab als die Kreise des Cylinders. In Fig. 13 sind Globus und Cylinder mit ihren Achsen zusammengelegt

und auf die durch die Achse PQ gelegte Zeichnungsfläche orthogonal projiziert. Dem Äquator AB läßt man stets den in seiner eigenen Ebene liegenden Kreis A_1B_1 des Cylinders entsprechen, was ohne Einfluß auf die Gestalt des Bildes ist. Im übrigen sind D_1E_1 , H_1I_1 , ... die Bilder der Parallelkreise DE , HI , ... und die Cylindererzeugenden A_1H_1 , K_1L_1 , ..., B_1I_1 die Bilder der Meridiane QAH , QKL , ..., QBI ;

Fig. 13.

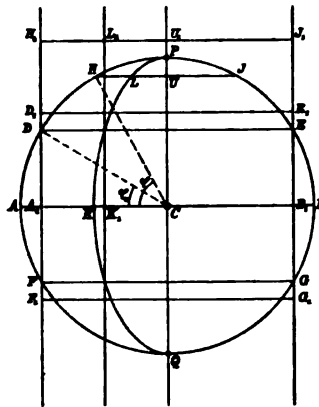
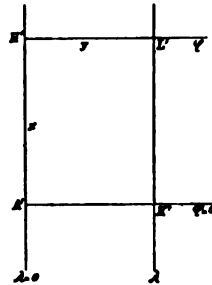


Fig. 14.



der erstgenannte sei der *Nullmeridian*. (Die Meridiane werden nun durch das Ebenenbündel von der Achse PQ auf den Cylinder projiziert.)

Durch Abwicklung des Cylinders in die Zeichnungsfläche entsteht die *Karte*,

Fig. 14, welche im allgemeinen als Bild des gesamten Globus die Gestalt eines *Rechteckes* haben wird.¹⁾ Die Meridiane von den Längen $\lambda = 0, \lambda, \dots$ und die

Parallelkreise von den Breiten $\varphi = 0, \varphi, \dots$ der Karte bilden zwei Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Geraden. Alle Parallelkreise der Karte haben dieselbe Länge.

Es folgt namentlich, daß die *Hauptrichtungen* des Globus und der Karte mit den Parallelkreisen und Meridianen übereinstimmen. Wir bezeichnen für den beliebigen Punkt L' der Karte die *Indicatrixhalbachse* in der Richtung $K'L'$ des Meridians mit h , die darauf senkrechte von der Richtung $H'L'$ des Parallels mit k .

Bei dieser Abbildung des Globus mit Hilfe eines Cylinders sind zwei Dinge *willkürlich*, zunächst das Verhältnis des Cylinderradius zum Radius des Globus. Dieses Verhältnis soll die *Konstante* der Cylinderprojektion heißen und mit ν bezeichnet werden. Nimmt man auch hier, wie bei den Kegelprojektionen, den Radius des Globus als Längeneinheit, so *stimmt die Konstante mit dem Radius des Cylinders direkt überein*. Aus Zweckmäßigkeitsgründen wird man Projektionen, bei welchen der Radius des Cylinders größer ist als derjenige des Globus, ausschließen, sich also auf die Fälle mit $\nu \geq 1$ beschränken. — Für

1) Das Bild auf dem Cylinder und die Karte sind gegenseitig längen-, flächen- und winkeltreu oder also überall in den kleinsten Teilen kongruent.

$\nu = 1$ geschieht die Abbildung auf den *Berührungscylinder* des Äquators, unter den Parallelkreisen wird nur der Äquator längentreu und sich selbst entsprechend abgebildet. — Ist dagegen $0 < \nu < 1$ so hat man es, wenn man die Achsen beider Flächen zusammenlegt, mit der Abbildung des Globus auf einen *Schnittcylinder* zu tun. Der Cylinder schneidet den Globus in zwei zum Äquator symmetrischen Parallelkreisen, welche jedoch im allgemeinen sich nicht selbst entsprechen, dagegen *längentreu* abgebildet werden. Sie können durch bloße Verschiebung des Cylinders längs der Achse einzeln mit ihren Bildern zur Deckung gebracht, also selbstentsprechend gemacht werden. Ihre Breiten sind durch die Gleichung bestimmt

$$(33) \quad \cos \varphi = \nu.$$

Willkürlich ist ferner das Gesetz des Entsprechens der Parallelkreise und ihrer Bildkreise auf dem Cylinder. Die Lage eines Parallels drückt man aus durch Angabe seiner geog. Breite φ , die des Bildkreises des Cylinders (oder der Karte) durch den Abstand $A_1 H_1 = A' H' = x$ (Fig. 13, 14) vom Bilde des Äquators. Die eindeutige Beziehung zwischen φ und x wird ausgedrückt durch eine Gleichung

$$(34) \quad x = F(\varphi),$$

das *Breitengesetz*. Einer bereits getroffenen Festsetzung zufolge wird $F(0) = 0$ sein.

In Figur 14 hat der beliebige Punkt L' der Karte die rechtwinkligen Koordinaten $x = A' H'$, $y = A' K' = H' L'$. Die Koordinatenachsen sind das Bild des Anfangsmeridians $\lambda = 0$ und des Äquators $\varphi = 0$. — Die Ordinate hängt nur von der Länge λ des Originalpunktes L ab, sie ist gleich dem Bogen $A_1 K_1$ auf dem Cylinder; der Radius des Bogens ist ν , der Zentriwinkel λ . Somit ist

$$(35) \quad y = \nu \cdot \text{arc } \lambda.$$

In Übereinstimmung mit den konischen Projektionen ist allgemein die Indicatrixhalbachse k das Verhältnis des Bildradius $H_1 U_1$ zum Originalradius HU für einen beliebigen Parallel, somit gleich $\frac{\nu}{\cos \varphi}$, und für h ergibt sich der (5) analoge Ausdruck $\frac{dx}{d\varphi}$,

$$(36) \quad h = \frac{dx}{d\varphi}, \quad k = \frac{\nu}{\cos \varphi},$$

bei den wahren (normalen) Cylinderprojektionen sind die Verzerrungen nur von der Breite φ , nicht aber von der Länge λ abhängig.

A. Mittelabstandstreue Projektionen.

20. Die Meridiane werden längentreu abgebildet. Es ist somit im ganzen Gebiete der Karte $h = 1$, also $dx = d\varphi$, $x = \text{arc } \varphi + c$. Indem man dem Parallel $\varphi = 0$ die Bildlinie $x = 0$ zuordnet, hat man derart verfügt, daß $c = 0$ wird. Somit ist hier allgemein

$$(37) \quad x = \text{arc } \varphi, \quad y = \nu \cdot \text{arc } \lambda; \quad h = 1, \quad k = \frac{\nu}{\cos \varphi}$$

das Gesetz der Abbildung.

Das Globusbild wird hier allgemein als die *rechteckige Platkarte* bezeichnet. Es bilden sich nämlich alle Gradnetzvierecke des Globus als gleiche *Rechtecke* ab von der Breite $\nu \cdot \text{arc } 1^\circ$ (od. $\nu \cdot \text{arc } 5^\circ$, etc.) und der Höhe $\text{arc } 1^\circ$ (od. $\text{arc } 5^\circ$, etc.) — Für $\nu = 1$ geht das Verhältnis $\nu : 1$ der Breite zur Höhe in 1 über, die Netzvierecke der Karte sind alsdann *Quadrate*, weshalb man in diesem Falle das Bild die *quadratische Platkarte* nennt.

Alle vollständigen Platkarten desselben Globus vom Radius 1 haben dieselbe Höhe π , die Breite schwankt zwischen 0 und 2π .¹⁾

B. Winkeltreue Projektionen.

21. Setzt man die in (36) für h und k erhaltenen Werte einander gleich, so folgt analog Nr. 9,

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\nu}{\cos \varphi}, \quad dx = \nu \cdot \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

und hieraus $x = \nu \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \nu \cdot \log \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$. An Stelle des in

dieser Formel enthaltenen natürlichen Logarithmus (\log) wird man zweckmäßigerweise den briggischen (\lg) einführen. Das Gesetz dieser *Merkatorprojektion* lautet dann allgemein

$$(38) \quad x = \nu \cdot 2,302585 \lg \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right), \quad y = \nu \cdot \text{arc } \lambda; \quad h = k = \frac{\nu}{\cos \varphi}.$$

Für $\varphi = \pm 90^\circ$ wird x unendlich groß, woraus folgt, daß das Bild des Globus die gesamte Oberfläche des Cylinders einnimmt.

1) Die Bilder der Meridiane und Parallelkreise werden aus allen Cylindern durch ein Ebenenbüschel von der Achse PQ und durch eine Schar von Ebenen, die der Äquatorebene parallel sind, herausgeschnitten. Die Abwickelungen der Zylinder, d. i. die Karten, sind *orthogonal-affin*, weil entsprechende Punkte gleiche Abscissen x und proportionale Ordinaten y haben.

Die Formeln (38) zeigen, daß x und y (sowie h und k) ν direkt proportional sind. Daraus folgt, daß alle diese (normalen) winkeltreuen Cylinderprojektionen einander *ähnlich* sind.¹⁾ Eine Änderung der Konstanten ν bedeutet also lediglich eine gleiche Änderung des Kartenmaßstabes. Die Projektion auf einen anderen als den Berührungscylinder des Äquators bietet keinerlei Vorteil; man wird sich auf den einzigen Fall $\nu = 1$ beschränken.

C. Flächentreue Projektionen.

22. Setzt man in (36) $S = hk = 1$ so folgt $\frac{\nu dx}{\cos \varphi d\varphi} = 1$,

$$\nu \cdot x = \int_0^\varphi \cos \varphi d\varphi, \quad x = \frac{\sin \varphi}{\nu}.$$

Die allgemeinen Formeln für alle flächentreuen Cylinderprojektionen sind demnach

$$(39) \quad x = \frac{\sin \varphi}{\nu}, \quad y = \nu \cdot \arccos \lambda; \quad k = \frac{\nu}{\cos \varphi} = \frac{1}{h}.$$

Bei der Lambertschen Projektion geschieht die Abbildung des Globus auf den *Berührungscylinder* (des Äquators), es ist in (39) $\nu = 1$ zu setzen. Damit wird namentlich $x = \sin \varphi$, die Übertragung der Parallelkreise auf jenen Cylinder ist besonders einfach, es liegen die entsprechenden Parallelkreise des Globus und des Cylinders je in derselben Ebene. (Diese Abbildung geht aus der in Nr. 17 behandelten hervor, wenn man dort den Berührungspunkt in den Äquator rückt, wobei sich der Scheitel S unendlich weit entfernt.) — Die Abbildung des ganzen Globus erfordert ein Rechteck von der Breite 2π und der Höhe 2.

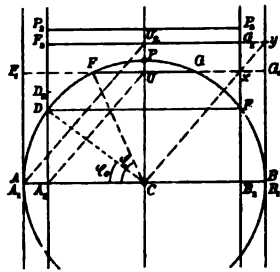
Für die flächentreue Abbildung auf den *Schnittcylinder*, mit zwei längentreuen Parallelkreisen, bestehen die allgemeinen Formeln (39). In denselben sind y und ν direkt, x und ν umgekehrt proportional. Der Vergleich aller flächentreuen Cylinderprojektionen desselben Globus zeigt also, daß, wenn der Cylinder an Umfang abnimmt, die entsprechenden Höhen im reziproken Verhältnis zunehmen müssen, und umgekehrt. — Die in der allgemeinen Projektionsart entworfene Planisphäre ist durch ein Rechteck von der Breite $\nu \cdot 2\pi$ und der Höhe $\frac{2}{\nu}$ begrenzt.

Figur 15 erläutert die Abbildung der Parallelkreise auf den Berührungscylinder über dem Äquator AB und auf den Schnittcylinder

1) Diese normalen Projektionen des Globus auf alle Cylinder sind *perspektiv-ähnlich* mit dem Globusmittelpunkt C als Zentrum.

durch die Parallelkreise von den Breiten $\pm \varphi_0$, von denen der eine DE angegeben ist. Die Äquatorbilder sind bezüglich $A_1B_1 = AB$ und A_2B_2 . Der beliebige Parallel FG von der Breite φ hat auf dem Berührungscylinder das Bild F_1G_1 vom Zentrum U mit $CU = A_1F_1 = x_1 = \sin \varphi$.

Fig. 15.



Das Bild desselben Parallels FG auf dem Schnittcylinder sei F_2G_2 vom Zentrum U_2 .

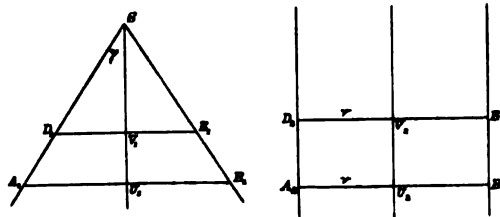
Dann ist $x = CU_2 = A_2F_2 = \frac{\sin \varphi}{\nu} = \frac{x_1}{\nu}$. Es besteht die Proportion $x : 1 = x_1 : \nu$, d. h. $CU_2 : CA = CU : CA_2$. Daraus folgt, daß, um U_2 zu erhalten, man AU_2 parallel zu A_2U zu ziehen hat.

Auf dem Berührungscylinder bildet sich die Globuszone $ABFG$ ab als die Zone $A_1B_1F_1G_1$. Nun verwandle man das Rechteck $A_1B_1F_1G_1$ in das gleich große $A_2B_2F_2G_2$, indem man C mit X verbindet, B_1G_1 in Y schneidet F_2G_2 und durch Y zieht. Die Hilfslinie CX ist den oben gezogenen A_2U , AU_2 parallel. (In Fig. 15 sind auch der dem Punkte D entsprechende D_2 sowie das Polbild P_2P_2 eingetragen.)

D. Übergang von den konischen zu den cylindrischen Projektionen.

23. Soll der zu der Abbildung des Globus benützte Kegel S, γ in einen Cylinder übergehen, so muß sich der Scheitel S unendlich weit entfernen, während γ unendlich klein wird. Der Bildradius $m_a = SA_1$ (Fig. 16) des Äquators AB wird unendlich groß, aber das Produkt $m_a \cdot n = m_a \sin \gamma$ geht in einen bestimmten endlichen Wert ν über, welcher mit dem

Fig. 16.



Radius des Cylinders übereinstimmt; es ist

$$(40) \begin{cases} \lim m_a = \infty, \\ \lim n = 0, \\ \lim (m_a \cdot n) = \nu. \end{cases}$$

Der Grenzwert von $k = \frac{m \cdot n}{\sin \delta}$ wird zu $\frac{\nu}{\sin \delta}$. Da

man bei den Cylinderprojektionen die Lage des Originalparallels durch die Breite φ ausdrückt, ist $\sin \delta$ durch $\cos \varphi$ zu ersetzen. Damit wird $k = \frac{\nu}{\cos \varphi}$ wie in (36).

Weiter geht A_1D_1 (Fig. 16) über in $x = A_2D_2$. Es ist somit das Breitengesetz $x = F(\varphi)$ bei der Cylinderprojektion aus dem Halbmesser-

gesetz $m = f(\delta)$ der entsprechenden konischen Projektion nach den Formeln herzuleiten:

$$(41) \quad x = \lim (m_a - m), \quad \delta = 90 - \varphi.$$

Schließlich geht auch die Größe h der konischen Projektion direkt in $h = \frac{dx}{d\varphi}$ der cylindrischen über.

Es geht jede der drei Hauptarten der konischen Projektionen in die gleichartige cylindrische über, aus der winkeltreuen konischen entsteht die winkeltreue cylindrische u. s. f.

Beispiel. Für die *flächentreue* konische Projektion sind nach Nr. 13

$$m = \sqrt{\frac{2(c - \cos \delta)}{n}}, \quad m_a = \sqrt{\frac{2c}{n}}, \quad h = \frac{\sin \delta}{\sqrt{2n(c - \cos \delta)}}.$$

Aus $m_a = \sqrt{\frac{2c}{n}}$ folgt $m_a^2 \cdot n = 2c$, $m_a(m_a \cdot n) = 2c$ und $(m_a \cdot n)^2 = 2nc$. Es ergibt sich hieraus, daß die Konstante c unendlich groß wird und daß $2nc$ in ν^2 übergeht.

Um zunächst den Grenzwert von $(m_a - m)$ zu finden, schreibt man

$$\begin{aligned} m_a - m &= \frac{\sqrt{2c} - \sqrt{2(c - \cos \delta)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2nc} - \sqrt{2nc - 2n \cos \delta}}{n} \\ &= \frac{\sqrt{m_a^2 n^2} - \sqrt{m_a^2 n^2 - 2n \cos \delta}}{n}, \end{aligned}$$

also

$$\lim (m_a - m) = \lim \left(\frac{\nu - \sqrt{\nu^2 - 2n \cos \delta}}{n} \right)_{n=0} = \left(- \frac{-2 \cos \delta}{2\sqrt{\nu^2 - 2n \cos \delta}} \right)_{n=0},$$

daher

$$x = \frac{\cos \delta}{\nu} = \frac{\sin \varphi}{\nu}.$$

Ferner wird

$$h = \lim \left(\frac{\sin \delta}{\sqrt{2nc - 2n \cos \delta}} \right)_{n=0} = \lim \left(\frac{\sin \delta}{\sqrt{\nu^2 - 2n \cos \delta}} \right)_{n=0} = \frac{\sin \delta}{\nu} = \frac{\cos \varphi}{\nu},$$

in Übereinstimmung mit (39).

III.

Azimutale Projektionen.

24. Um diese Projektionen als Sonderfälle der konischen zu erhalten, lasse man in Nr. 1 mit Fig. 1, 2 den Winkel γ des Kegels RST zu 90° , also $n = \sin \gamma$ zu 1 werden. Es geht damit der Kegel K über in die *Projektionsebene* P . Diese Ebene der Karte steht (für

die normale Lage) auf der Achse PC des Globus senkrecht, im übrigen ist ihre Lage eine beliebige. Ihr Schnittpunkt mit der Achse ist der *Kartenmittelpunkt*, welcher in der Folge mit M (anstatt mit S) bezeichnet werden soll.

Da die Konstante n der konischen Projektion zu 1 geworden ist, bilden sich die *Meridiane* des Globus ab als das Strahlenbüschel der Ebene P vom Scheitel M , welches mit dem Büschel der entsprechenden Meridiantangenten am Pol P oder Q kongruent und parallel ist. Die Winkel der Meridiane erscheinen in der Karte unverändert; jede Halbebene durch die Achse MPQ schneidet den Globus und die Ebene der Karte in einem Meridian und seinem Bilde.

Die Bilder der *Parallelkreise* sind konzentrische Vollkreise vom gemeinsamen Zentrum M . Der Radius m des Bildkreises ist je eine bestimmte Funktion des Polabstandes δ des Originals, und es lauten analog Nr. 1—3 die wichtigsten allgemeinen Formeln

$$(42) \quad m = f(\delta), \quad h = \frac{dm}{d\delta}, \quad k = \frac{m}{\sin \delta}.$$

Es mag an dieser Stelle noch die allgemeine Bemerkung Platz finden, daß bei keiner der drei Hauptprojektionsarten (mittelabstandstreue etc.) zwei verschiedene eigentliche Parallelkreise längentreu abgebildet werden können, wie es bei den konischen und cylindrischen Projektionen der Fall ist.

A. Mittelabstandstreue Projektionen.

25. Es sollen sämtliche Meridianbogen in der Karte längentreu wiedergegeben werden, somit ist bei jedem Punkt der Karte $k=1$, $dm = d\delta$, daher

$$(43) \quad m = \operatorname{arc} \delta + c.$$

Soll m' der Bildradius eines bestimmten Parallels δ' sein, so ist $m' = \operatorname{arc} \delta' + c$, womit über den Parameter c verfügt ist. Es ergibt sich für diesen Fall das Halbmessergesetz

$$(44) \quad m = m' + \operatorname{arc}(\delta - \delta').$$

Für $\delta = 0^\circ, 180^\circ$ folgt aus diesen Formeln

$$m_p = c = m' - \operatorname{arc} \delta', \quad m_q = c + \pi \quad (m_q - m_p = \pi).$$

Es sind dreierlei Abarten dieser Projektion zu unterscheiden:

a) Für $0 < c < \infty$, d. i. $m' > \operatorname{arc} \delta'$ sind m_p und m_q positiv, das Bild des Globus ist ein Kreisring. Diese Art dürfte zweckmäßigerweise als *Kreisringprojektion I. Art* bezeichnet werden.

b) Ist $c = 0$, $m' = \arcsin \delta'$, so werden $m_p = 0$, $m_q = \pi$. Das Bild des Poles P ist der Kartenmittelpunkt M , das Bild des gesamten Globus ein Kreis vom Radius π , die Projektion also eine *Kreisprojektion*.

c) Wenn $-\pi < c < 0$, ($m' < \arcsin \delta'$), so ist m_p negativ, m_q positiv. Der bestimmte Parallelkreis δ_0 , mit $\arcsin \delta_0 = -c$, bildet sich ab als der Punkt M . Indem man von den Bildkreisen mit negativen Radien abieht, wird hierbei nur ein Teil des Globus abgebildet, nämlich die Kappe vom Gegenpol Q bis zu jenem ausgezeichneten Parallel δ_0 . Das Bild dieser Kappe ist ein Vollkreis vom Radius $m_q (= c + \pi)$ und die Projektion eine *Kreisringprojektion II. Art*.

Der Fall $c < -\pi$, in welchem ausschließlich negative Bildradien vorkommen, stimmt im wesentlichen mit a) überein.

Ein *Parallelkreis* δ' bildet sich *längentreu* ab, wenn $m' = \sin \delta'$, also $\arcsin \delta' + c = \sin \delta'$. Nach Nr. 7 hat diese Gleichung für $c = 0$ die Doppelwurzel $\delta = 0$. Außerdem wird jede *Kreisringprojektion II. Art* einen *längentreuen Parallelkreis* aufweisen, dessen Umgebung in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet wird (was dieser Projektionsart praktischen Wert verleiht).

Sind δ' , δ_0 die Polabstände des *längentreuen* und desjenigen Parallels, dessen Bild der Kartenmittelpunkt ist, so bestehen die Formeln

$$\arcsin \delta_0 = \arcsin \delta' - \sin \delta', \quad m = \sin \delta' + \arcsin (\delta - \delta') = \arcsin (\delta - \delta_0),$$

nach der ersten läßt sich δ_0 aus δ' direkt berechnen.

B. Winkeltreue Projektionen.

26. Um den allgemeinen Ausdruck des Halbmessergesetzes zu finden, setze man $h = k$, $\frac{dm}{d\delta} = \frac{m}{\sin \delta}$; es folgt

$$(45) \quad m = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}; \quad \text{mit } h = k = \frac{c}{2 \cos^2 \frac{\delta}{2}} \left(= \frac{m}{\sin \delta} \right)$$

in Übereinstimmung mit (14) für $n = 1$.

Setzt man für δ der Reihe nach 0° , 90° , 180° , so werden in gewohnter Bezeichnung $m_p = 0$, $m_a = c$, $m_q = \infty$. Der Kartenmittelpunkt ist das Polbild, $M = P'$; der Parameter c ist der Bildradius des Äquators und der Gegenpol Q bildet sich ab als Kreis von unendlich großem Radius. Das Bild des Globus erfüllt die gesamte Projektionsebene P ; die Projektion ist stets eine *Kreisprojektion*.

Der Ausdruck des Halbmessergesetzes zeigt, daß für verschiedene Werte des Parameters c *ähnliche* Bilder entstehen, wobei lediglich der Maßstab der Karte sich ändert.

Alle diese winkeltreuen Projektionen lassen sich in einfacher Weise geometrisch veranschaulichen. In Fig. 17 lege man die Projektionsebene P_1 so daß $QM_1 = c$. Wird nun P_1 von QD in D'_1 geschnitten, so ist $M_1D'_1 = QM_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$, also $M_1D'_1 = m$. Der Kreis in P_1 vom Durchmesser $D'_1E'_1$ ist das Bild des Parallels DE vom Polabstand δ . Das in der Ebene P_1 entstehende Kartenbild ist die perspektive Projektion des Globus aus dem Zentrum Q auf die Projektionsebene P_1 . Die Umgebung des Poles P wird im Verhältnis $2:c (= QP:QM_1)$ ähnlich reduziert dargestellt; in der Tat wird für $\delta = 0$ in (45) $h = k = \frac{c}{2}$. Wählt man nun $c = 2$, so ist die Kartenebene die Tangentialebene P des Globus im Pole P , es wird alsdann die Umgebung dieses

Poles kongruent abgebildet. Diese gewöhnliche winkeltreue Projektion wird man im allgemeinen den übrigen möglichen Fällen vorziehen.

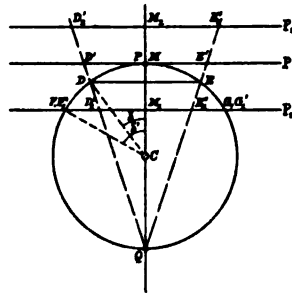
Die Frage nach den längentreuen Parallelkreisen erledigt sich nun in einfacher Weise. Für $0 < c < 2$ liegt, Fig. 17, M_1 zwischen Q und P . Die Ebene P_1 schneidet den Globus in einem bestimmten Parallel FG oder δ' mit $\cos \delta' = c - 1$ (da $QM_1 = c$, $QC = 1$) und es wird dieser Schnittkreis längentreu abgebildet, er deckt sich mit

seinem Bilde. Für alle seine Punkte ist demnach $k = 1$, also auch $h = 1$; seine Umgebung wird in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet. — Andere längentreue eigentliche Parallelkreise können nicht vorkommen.¹⁾ Eine derartige Projektion, welche die Umgebung eines bestimmten „Mittelparallels“ kongruent abbildet, ist für die Darstellung einer Zone (resp. eines Teiles einer solchen) von Bedeutung. Es ist in diesem Fall δ' als bekannt vorauszusetzen und da $m' = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta'}{2}$, $m' = \sin \delta'$, so ergibt sich für c der Wert $c = 2 \cos^2 \frac{\delta'}{2}$. Die Hauptformeln der Abbildung gehen über in

$$(46) \quad m = 2 \cos^2 \frac{\delta'}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \quad h = k = \frac{\cos^2 \frac{\delta'}{2}}{\cos^2 \frac{\delta}{2}}.$$

1) Selbstverständlich ist der Pol P als längentreuer Parallel aufzufassen, da sein Bild wieder ein Punkt ist.

Fig. 17.



C. Flächentreue Projektionen.

27. Aus $S = h \cdot k = 1$, $\frac{dm}{d\delta} \cdot \frac{m}{\sin \delta} = 1$ folgt allgemein

$$(47) \quad m = \sqrt{2(c - \cos \delta)} \quad \text{mit} \quad k = \frac{\sqrt{2(c - \cos \delta)}}{\sin \delta} = \frac{1}{h}.$$

Die Bildradien der Pole und des Äquators sind:

$$m_p = \sqrt{2(c-1)}, \quad m_a = \sqrt{2c}, \quad m_q = \sqrt{2(c+1)},$$

mit $2m_a^2 = m_p^2 + m_q^2$. Es bestehen drei Abarten dieser Projektion, nämlich

a) Für $c > +1$ sind m_p, m_q, m_a reell, die Kugel bildet sich ab als ein Kreisring; es handelt sich um eine *Kreisringprojektion I. Art*, die praktisch bedeutungslos ist (s. S. 206).

b) Für $c = 1$ werden $m_p = 0, m_a = \sqrt{2}, m_q = 2$. Der Mittelpunkt der Karte ist das Polbild. Diese *Kreisprojektion* ist die *gewöhnliche flächentreue Azimutalprojektion*, als welche sie bisher bezeichnet wurde, mit

$$(48) \quad m = 2 \sin \frac{\delta}{2}, \quad h = \cos \frac{\delta}{2} = \frac{1}{k}.^{1)}$$

Für $\delta = 0$ wird $h = k = 1$, die Umgebung des Poles P wird kongruent abgebildet. Am zweckmäßigsten legt man die Projektionsebene P als Tangentialebene im Pol P , Fig. 18, es haben alsdann Globus und Karte die unendlich nahe Umgebung dieses Poles entsprechend gemein.

Aus $m = 2 \sin \frac{\delta}{2}$ folgt die bekannte Eigenschaft, daß für den beliebigen Parallel DE oder δ der Bildradius MD' gleich ist der Sehne PD . Der Bildkreis $D'E'$ des Parallels DE wird aus der Kartenebene P durch eine Kugel herausgeschnitten, die durch den Parallel DE geht und den Pol P zum Zentrum hat; vgl. Nr. 28.

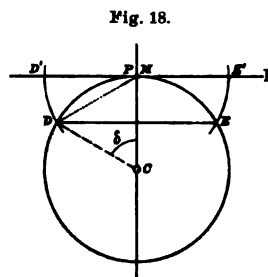


Fig. 18.

c) Ist $-1 < c < +1$, so fällt m_p imaginär, m_q reell aus. Der Parallel δ_0 mit $\cos \delta_0 = c$ ist ausgezeichnet. Sein Bildradius m_0 ist Null, somit ist für diesen Parallel $k = 0, h = \infty$. Für $\delta < \delta_0$ ist m imaginär, für $\delta > \delta_0$ dagegen reell. Bei dieser *Kreisringprojektion II. Art* wird die Kugelkappe abgebildet vom Gegenpol Q bis zu

1) Damit erweist sich diese Projektion als *Sonderfall* der flächentreuen Kegelprojektion von Lambert, vgl. Nr. 15, Gleichung (25), woselbst $\delta' = 0$ zu setzen ist, sowie der Projektion auf den *Berührungskegel*, Nr. 17, wobei in (30) $\delta_0 = 0$ wird.

diesem ausgezeichneten Parallel δ_0 ; es entsteht ein Randkreis der Karte vom Radius $\sqrt{2(c+1)}$.

Ist endlich $c < -1$, so entsteht überhaupt kein Bild mehr, indem alsdann alle Bildradien imaginär werden.

Die Bestimmung der *längentreuen Parallelkreise* lehrt, daß den Projektionen b) und c) praktische Bedeutung zukommt. Setzt man in (47) $m = \sin \delta$, so folgt nach leichter Umformung für die Polabstände δ der längentreuen abgebildeten Parallelkreise die Formel

$$(49) \quad \cos^2 \delta - 2 \cos \delta + (2c - 1) = 0.$$

Die Auflösung ergibt $\cos \delta = 1 \pm \sqrt{2(1-c)}$. Offenbar sind beide Wurzeln $\cos \delta_1, \cos \delta_2$ komplex, sobald $c > +1$, die *Kreisringprojektion I. Art* entbehrt der *längentreuen Parallelkreise* und ist aus eben diesem Grunde praktisch bedeutungslos. — Die Gleichung besitzt für $c = +1$ die Doppelwurzel $\cos \delta = 1$; bei der *Kreisprojektion* *allen* die *beiden längentreuen Parallelkreise mit dem Pol P zusammen*. — Für $-1 < c < +1$, also $2 > 1 - c > 0$, sind die beiden Wurzeln $\cos \delta$ zwar reell, aber ihre Summe hat den Wert 2 ($\cos \delta_1 + \cos \delta_2 = 2$). Liegt die Wurzel $\cos \delta_1$ zwischen -1 und $+1$, so liegt die andere $\cos \delta_2$ zwischen $+1$ und $+3$, es ist der eine längentreue Parallel δ_1 reell, δ_2 dagegen imaginär. *Jede Kreisringprojektion II. Art bildet einen Parallel längentreu* (und dessen Umgebung in den kleinsten Teilen kongruent) *ab*.

Für $c = 1$ ist der längentreue Parallel, wie bereits bemerkt worden, der Pol P , für $c = \frac{1}{2}$ aber der Äquator.

Ist δ' für den längentreuen Parallel bekannt, so kann man das Halbmessergesetz in folgender Weise finden. Bezeichnet man den Bildradius des Parallels δ' erst mit m' , so bestehen die Formeln

$$m = \sqrt{2(c - \cos \delta)}, \quad m' = \sqrt{2(c - \cos \delta')},$$

also $m = \sqrt{m'^2 + 2 \cos \delta' - 2 \cos \delta}$. Nun setze man noch $m' = \sin \delta'$, es folgt

$$(50) \quad m = \sqrt{\sin^2 \delta' + 2 \cos \delta' - 2 \cos \delta}, \text{ mit } k = \frac{m}{\sin \delta} = \frac{1}{h}.$$

Für den weiteren ausgezeichneten Parallel δ_0 soll $m = 0$ werden. Nach voranstehender Formel ergibt sich:

$$(51) \quad \cos \delta_0 = \cos \delta' + \frac{\sin^2 \delta'}{2}.$$

In Fig. 19 ist die Projektionsebene P als Schnittebene des Globus durch den längentreuen Parallel $DE(\delta')$ gelegt. Man ziehe PE^* gleich und parallel mit ME , verbinde E^* mit dem Gegenpol Q . Die

Senkrechte in E^* auf QE^* schneidet die Achse in R . Dann ist $ME = PE^* = \sin \delta'$, $PR = \frac{\sin^2 \delta'}{2}$. Diese Länge ist zu $CM = \cos \delta'$ zu addieren. Zu diesem Zweck zieht man ET parallel zu E^*R , mit anderen Worten die Senkrechte aus E zu QE^* , so wird die Achse in T geschnitten. Es ist dann $CT = \cos \delta' + \frac{\sin^2 \delta'}{2} = \cos \delta_0$; T ist der Mittelpunkt des gesuchten Parallels FG oder δ_0 , der sich als Punkt M abbildet. Die vollständige Karte enthält das Bild der Kugelkappe von Q bis FG in Gestalt eines Kreises vom Zentrum M ; die Kugelkappe PFG dagegen wird nicht abgebildet. — Die eben behandelte Konstruktion des Parallels δ_0 aus δ' ist nicht umkehrbar.

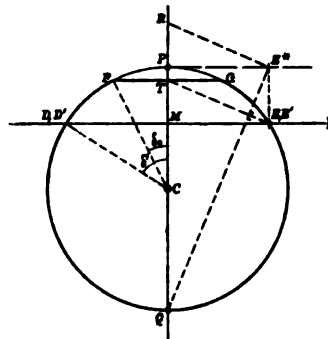
In etwas anderer Schreibweise lautet die Gleichung (51)

$$\cos^2 \delta' - 2 \cos \delta' + (2 \cos \delta_0 - 1) = 0^1),$$

sie ist der Ausdruck dafür, daß die Kugelzone $DEFG$ zwischen δ' und δ_0 der Fläche des Kreises DE , vom Radius $\sin \delta'$ gleich ist. Nur die eine Wurzel dieser Gleichung, $\cos \delta' = 1 - 2 \sin \frac{\delta_0}{2}$, liefert einen reellen Schnittpunkt DE . Sein Mittelpunkt M hat vom Pol P die Entfernung $1 - MC = 1 - \cos \delta' = 2 \sin \frac{\delta_0}{2} = PF$; in Figur 19 ist $PM = PF$. Der Kreis vom Zentrum P , durch F und G gehend, schneidet die Achse PQ in M (und die Kugel vom Zentrum P , durch den Parallel FG oder δ_0 gehend, schneidet die Achse in M , dem Zentrum des längentreuen Parallels DE oder δ'). Die Gleichheit von PF und PM läßt jeden der Kreise δ_0 , δ' in einfachster Weise finden, wenn der andere gegeben ist.

Die zweite Wurzel unserer Gleichung $\cos \delta' = 1 + 2 \sin \frac{\delta_0}{2}$, ergibt $1 - \cos \delta' = -2 \sin \frac{\delta_0}{2}$; an Stelle des Punktes M tritt der zweite Schnittpunkt des Kreises FMG mit der Achse und an Stelle der Ebene P ihre symmetrische in Bezug auf den Pol P , welche den Globus in einem imaginären längentreuen Parallel schneidet. — In

Fig. 19



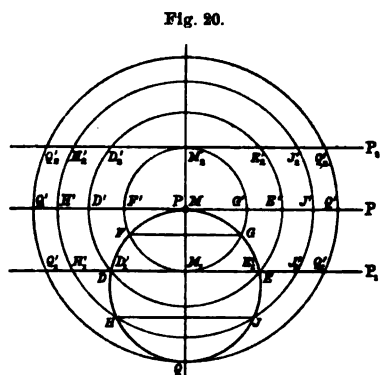
1) Nach (47) wird $m = 0$ für $\cos \delta_0 = c$; die Konstante c ist der Cosinus des Polabstandes desjenigen Parallels, dessen Bild ein Punkt ist. Es stimmt somit obige Gleichung mit (49) überein.

folgender Nummer wird gezeigt, daß die beiden in Bezug auf den Pol symmetrischen Bildebenen (P_1, P_2 in Fig. 20) *kongruente* Bilder des Globus enthalten.

Die Gleichung (50) ist der Ausdruck des Halbmessergesetzes, worin der Polabstand δ' des längentreuen Parallels vorkommt. Da nun für $\delta = \delta_0$ der Bildradius m zu Null wird, so steht zu erwarten, daß, wenn man in dem Ausdruck für m an Stelle von δ' den Winkel δ_0 eingeführt, das Halbmessergesetz eine besonders einfache Gestalt annehmen wird. Setzt man z. B. in (47) $c = \cos \delta_0$, so wird $m = \sqrt{2(\cos \delta_0 - \cos \delta)}$. Ersetzt man hierin noch δ durch $\delta_0 + \varepsilon$, so wird

$$(52) \quad m = 2 \sqrt{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(\delta_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)}, \quad \delta = \delta_0 + \varepsilon.$$

28. Bei der *Kreisringprojektion II. Art* besteht eine einfache geometrische Abbildung des Globus G auf die Kartenebene P mit Zuhilfenahme einer Schar konzentrischer Kugeln für die Parallelkreise (und eines Ebenenbüschels für die Meridiane). — Es mögen zunächst zwei einfache Flächensätze bei Kugeln vorangestellt werden.



Seien R_1, R_2 (dabei etwa $R_1 < R_2$) die Radien zweier konzentrischer Kugeln K_1, K_2 . Eine Ebene im Abstände a vom gemeinsamen Zentrum P schneidet die Kugeln in zwei Kreisen von den Radien $r_1 = \sqrt{R_1^2 - a^2}$, $r_2 = \sqrt{R_2^2 - a^2}$. Der von den beiden Schnittkreisen eingeschlossene Kreis-

ring hat den Flächeninhalt $\pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi(R_2^2 - R_1^2)$, welcher, weil unabhängig von a , konstant ist. *Beliebige Ebenen schneiden zwei konzentrische Kugeln in Paaren von Kreisen, die je gleichgroße Kreisringe begrenzen.*

Für die Herleitung des zweiten Satzes setze man eine Kugel G voraus, darauf einen Pol P und zwei Parallelkreise AB, CD , von den Polabständen δ_1, δ_2 (z. B. $\delta_1 < \delta_2$). Nimmt man, was auf das Ergebnis ohne Einfluß ist, den Radius der Kugel G als Längeneinheit, so hat die Zone $ABCD$ die Oberfläche $2\pi(\cos \delta_1 - \cos \delta_2)$. Nun lege man zwei Kugeln K_1, K_2 vom gemeinsamen Zentrum P , durch die beiden Parallelkreise AB und CD gehend. Ihre Radien sind $PA = R_1 = 2 \sin \frac{\delta_1}{2} = \sqrt{2(1 - \cos \delta_1)}$ und $PB = R_2 = \sqrt{2(1 - \cos \delta_2)}$. Eine beliebige Ebene schneidet die Kugeln K_1, K_2 in zwei konzentrischen

Kreisen und es hat der von diesen letzteren eingeschlossene Kreisring den Inhalt $\pi(R_2^2 - R_1^2) = 2\pi(\cos \delta_1 - \cos \delta_2)$, welcher mit der Oberfläche der Zone $ABCD$ übereinstimmt: Sind K_1, K_2 zwei konzentrische Kugeln und G eine beliebige, durch das Zentrum von K_1, K_2 gehende Kugel, so wird G von K_1, K_2 in zwei parallelen Kreisen AB, CD geschnitten. Stets ist die Oberfläche der Zone $ABCD$ der Kugel G gleich dem Kreisring, der durch irgend eine Ebene aus K_1, K_2 geschnitten wird.

Um nun, gestützt auf diese Hilfssätze, den Globus G flächentreu auf eine Projektionsebene P_1 oder P_2 usw., welche in einem Punkte M_1 oder M_2 usw. auf der Achse PQ senkrecht steht, abzubilden, lege man einerseits durch die Achse PQ alle Ebenen, andererseits alle konzentrischen Kugeln K_1, K_2, \dots vom Zentrum P durch die Parallelkreise von den Polabständen $\delta_1, \delta_2, \dots$ (Fig. 20). Diese Ebenen und Kugeln schneiden jede solche Ebene P_i in den Bildern der sämtlichen Meridiane und Parallelkreise.¹⁾

In jeder Ebene, deren Abstand vom Pol P des Globus kleiner ist als der Globusdurchmesser, entsteht hierdurch eine *azimutale flächentreue Projektion*. Diejenige der Kugeln K , welche die Projektionsebene P_1 (im Schnittpunkte M_1 mit der Achse) berührt, bildet einen Parallelkreis (δ_0) als Punkt ab. Die Bildebene kann auf beiden Seiten von P aus liegen. Schneidet sie G , so ist der Schnittkreis (δ') der längentreue Parallel, für welchen Original und Bild zusammenfallen. Zwei verschiedene Ebenen P_1, P_2 , welche zum Pol P symmetrisch liegen, liefern *kongruente* Abbildungen, sie bilden namentlich denselben Parallel δ_0 als Punkt (M_1, M_2) und denselben (reellen) Parallel δ' längentreu ab. Alle solche Projektionen sind flächentreue *Kreisringprojektionen II. Art*. Indem man der Ebene P_1 allmählich alle möglichen Lagen zwischen den Tangentialebenen des Globus in den Polen P und Q zuweist, entstehen überhaupt *alle möglichen Projektionen der bezeichneten Art*, einschließlich der *Kreisprojektion*, bei welcher P die Tangentialebene des Globus im Pol P ist.

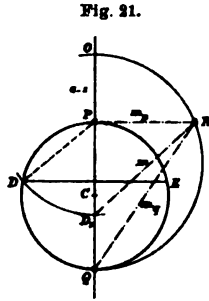
Die *Kreisringprojektionen I. Art*, die ja allerdings praktisch bedeutungslos sind, lassen sich anscheinend nicht als ebene Schnitte eines Ebenenbüschels und einer Schar konzentrischer Kugeln erzeugen. Da-

1) Der direkte Nachweis analog Nr. 17b geschieht durch Formel (50):

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{\sin^2 \delta' + 2 \cos \delta' - 2 \cos \delta} = \sqrt{1 - \cos^2 \delta' + 2 \cos \delta' - 2 \cos \delta} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos \delta) - 1 + 2 \cos \delta' - \cos^2 \delta'} = \sqrt{\left(2 \sin \frac{\delta}{2}\right)^2 - (1 - \cos \delta')^2}. \end{aligned}$$

gegen besteht für die Bildradien der Parallelkreise eine sehr einfache Konstruktion, welche an dieser Stelle noch mitgeteilt werden soll.

Für diese Projektionsart ist $m = \sqrt{2(c - \cos \delta)}$ das Halbmessergesetz, es ist indessen $c > 1$, die ausgezeichneten Parallelkreise δ_0 und δ' sind beide imaginär. Für $\delta = 0$ erhält man $m_p = \sqrt{2(c - 1)}$, der Bildradius des Poles P ist reell, im Gegensatz zu den Kreisringprojektionen II. Art. Zwischen m , m_p und δ besteht die einfache Beziehung $m^2 - m_p^2 = 2(1 - \cos \delta) = 4 \sin^2 \frac{\delta}{2}$, $m^2 = m_p^2 + (2 \sin \frac{\delta}{2})^2$.



Die geometrische Konstruktion von m_p und m ist in folgender Weise durchzuführen, Fig. 21. Auf der Globusachse PQ trage man vom Zentrum C aus in der Richtung CP die Länge $c = CO$ ab. Der so entstehende Punkt O liegt außerhalb des Kreises über dem Durchmesser PQ , und es ist $PO = c - 1$, $PQ = 2$. Somit ist m_p das geometrische Mittel aus PO und PQ . Man beschreibe über OQ als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die in P auf der Achse errichtete Senkrechte in R schneide. Es ist dann $RP = m_p$. — Es sei nun DE der Parallel vom Polabstand δ ; man drehe die Sehne PD um P in die Achse nach PD_1 , so ist $PD = PD_1 = 2 \sin \frac{\delta}{2}$, andererseits $RD_1 = \sqrt{m_p^2 + (2 \sin \frac{\delta}{2})^2} = m$, also jeweiligen RD_1 der Bildradius des Parallels des Punktes D . Diese Bildradien ändern sich von $RP = m_p$ bis $RQ = m_q$.

Für $c = 1$ wird $RP = m_p = 0$, also stimmt m mit $PD_1 = PD (2 \sin \frac{\delta}{2})$ überein. Dieser Sonderfall liefert wiederum die bekannte Konstruktion der Bildradien bei der Kreisprojektion.

Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels.¹⁾

Von ANTON GRÜNWARD in Prag-Bubentsch.

(Mit 15 Figuren auf Tafel V u. VI.)

Im allgemeinsten Falle eines starren Körpers mit dem Freiheitsgrade 3 gibt es in jedem Augenblicke eine Kongruenz $K(G)$ von Achsen G solcher Schrauben L , längs welcher der Körper beweglich ist. Die Strahlen G von $K(G)$ erfüllen alle Regelscharen der einen Art — wir nennen sie etwa mit Waelsch der „linken“ Art — eines jeden Hyperboloides $F(p)$ des Systemes

$$(1) \quad F(p) = (p - p_I)x^2 + (p - p_{II})y^2 + (p - p_{III})z^2 + (p - p_I)(p - p_{II})(p - p_{III}) = 0$$

mit den Halbachsenquadraten:

$$(2) \quad \begin{aligned} a_I^2 &= -(p - p_{II})(p - p_{III}), & a_{II}^2 &= -(p - p_{III})(p - p_I), \\ a_{III}^2 &= -(p - p_I)(p - p_{II}), \end{aligned}$$

wobei $p_I < p_{II} < p_{III}$ Konstante, xyz rechtwinkelige Punktkoordinaten bezüglich eines Koordinatensystems mit dem Hauptpunkte p als Anfang sind und der Parameter:

$$p = (2\pi)^{-1} \cdot h,$$

das für alle Strahlen der linken Regelschar G jedes Hyperboloides $F(p)$ konstante Verhältnis der Ganghöhe h der mit den Bewegungsbedingungen des starren Körpers vereinbaren Schraubung L um die betreffende

1) Bezüglich der Schraubenlehre oder Theorie der linearen Komplexsysteme sind außer den Arbeiten Plückers und Kleins als hier benutzt zu erwähnen: R. Ball, *A treatise on the theory of screws*, Cambridge 1900; E. W. Hyde, *The directional theory of screws*, in den *Annals of Mathematics* vol. 4, pag. 187, Mass. U. S. A. 1888. Ferner in denselben Annalen: *On a surface of the sixth order which is touched by the axes of all screws reciprocal to three given screws* (II. ser., vol. 2, N. 4, Juli 1901), worin die Brennfläche der u. a. von Waelsch untersuchten Achsenkongruenz eines Schraubenbündels diskutiert wird. (Mit 3 Figuren.) H. Grassmann jun., *Schraubenrechnung und Nullsystem*, Halle 1899; N. Zantscheffsky, *Teoria wintoff*, Odessa 1889; E. Müller, *Die Liniengeometrie nach den Prinzipien der Grassmannschen Ausdehnungslehre*, Wiener Monatshefte II, 1901; K. Zindler, *Liniengeometrie mit Anwendungen*, Leipzig S. S. 1902; E. Waelsch, *Über eine Strahlenkongruenz beim Hyperboloide*, Wiener Sitzungsberichte 95. Bd., S. 781. 1887; A. Demoulin, *Application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites*, Brüssel 1894; A. Grünward, *Sir Robert Ball's lineare Schraubengebiete*, in dieser Zeitschrift, 48. Bd., 1. Heft, 1902. — Gr.

Achse G zum Umfange 2π des Einheitskreises bedeutet.¹⁾ Zu jeder Ganghöhe h , mithin zu jedem Parameter (jeder „Steigung“) p gibt es eine Regelschar von Schraubenachsen G , welche zugleich mit ihrem Trägerhyperboloide $F(p)$ reell ist, falls p sich zwischen den Grenzen p_I und p_{III} , den beiden extremen Werten der drei Hauptparameter befindet. Das Bündel (Komplexnetz) R_{III} der mit den verschiedenen Parametern p versehenen Schrauben L um alle Achsen G der Kongruenz $K(G)$ kennzeichnet vollständig alle möglichen starren Elementarbewegungen des Körpers.

Die Geraden Γ der anderen, der „rechten“ Regelschar aller Hyperboloide $F(p)$ erfüllen eine zugehörige „ergänzende“ Kongruenz $K(\Gamma)$, welche im Gegensatz zur „linken“ Kongruenz $K(G)$ eine „rechte“ genannt werden kann und aus $K(G)$ durch Spiegelung an jeder der drei Hauptebenen hervorgeht. $K(\Gamma)$ ist erfüllt von den Achsen Γ jener Schraubungen (Dynamen) A , welche mit geeigneten Parametern belegt, den starren Körper nicht zu beeinflussen imstande sind, d. h.:

Auf jedem Strahle Γ der rechten Kongruenz, welcher als Erzeugende der anderen Art auf einem der Hyperboloide $F(p)$ liegt, kann man eine beliebige Kraft λ annehmen; fügt man zu dieser ein Kräftepaar φ in Form eines Feldes in einer zu Γ senkrechten Ebene, dessen Moment (Inhalt des Feldes φ) $(-p)$ mal so groß ist als die angenommene Kraft λ , so ist jede derart in kanonischer Form als Kräftesumme $A = \lambda + \varphi$ dargestellte Schraube (Dynam) bezüglich des starren Körpers unwirksam. Alle solche Schrauben A erfüllen das zu obigem Bündel R_{III} reziproke Schraubenbündel P_{III} ; den A des P_{III} sind die Widerstandskräfte jenes Systems entnommen, welches die Bewegung des starren Körpers beschränkt. Die Rolle von $K(G)$ und $K(\Gamma)$ ist rein geometrisch genommen ebenso wie jene der Bündel R_{III} und P_{III} (der einander „ergänzenden“ Komplexnetze) vollkommen vertauschbar.

Die durch obige Gleichung analytisch gekennzeichneten Hyperboloide $F(p)$ können wegen der entwickelten mechanischen bzw. schraubentheoretischen Beziehung als zum gleichen Bündel von Schrauben gehörig oder „gleichbündig“ bezeichnet werden. Zu den gleichbündigen Hyperboloiden gehört das reelle Ebenenpaar $F(p_{II})$ (die analogen $F(p_I)$ und $F(p_{III})$ sind imaginär) bestehend aus den beiden durch die y -Achse gelegten Ebenen μ, ν :

$$(3) \quad (p_{II} - p_I) x^2 - (p_{III} - p_{II}) z^2 = 0,$$

1) Vgl. z. B. S. 97 usw. der letzterwähnten Abhandlung Gr. im 48. Bd. dieser Zeitschrift.

welche mit der xy -Ebene einen Winkel ω einschließen, dessen Tangente $\tau = \operatorname{tg} \omega$ sich durch $p_{III} - p_{II} = d_1$ und $p_{II} - p_I = d_2$ als:

$$(4) \quad \tau = \operatorname{tg} \omega = \pm \sqrt{\frac{p_{II} - p_I}{p_{III} - p_{II}}} = \pm \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}$$

ausdrückt.

Die für $p = p_{II}$ aus der Gleichung (2) $a_{II}^2 = -(p - p_{III})(p - p_I)$ sich ergebenden Werte von

$$(5) \quad [a_{II}]_{p=p_{II}} = e_{II} = e = \sqrt{-(p_{II} - p_{III})(p_{II} - p_I)} = \sqrt{d_2 d_1}$$

gehören als Ordinaten zu den auf der y -Achse gelegenen reellen Trägerpunkten M und N jener reellen Büschelpaare, zu denen die Regelscharen von $F(p_{II})$ ausarten; zur Kongruenz $\frac{K(G)}{K(I)}$ gehört hierbei das reelle Büschel mit dem Zentrum M und der Ebene μ , nebst dem Büschel vom Zentrum N in der Ebene ν .

Diese Paare von „Basisbüscheln“ der beiden einander ergänzenden Kongruenzen haben vertauschte Ebenen oder Zentra.

Rein geometrisch sind die gleichbündigen Hyperboloide zu einem beliebigen vorgegebenen dadurch vollkommen bestimmt, daß sie gemeinsam haben:

1. Die zwei Paare unendlich ferner Kreispunkte der Ebene μ, ν .
2. Die zwei Paare reeller Fokalachsen, welche zu den gemeinsamen *cyklischen Ebenen senkrecht* stehen.

Diese Fokalachsen gehen durch die Zentra M und N der Basisbüschel und haben demnach die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 = e^2 = -(p_{II} - p_{III})(p_{II} - p_I) \\ (p_{III} - p_{II})x^2 - (p_{II} - p_I)z^2 = 0. \end{array} \right\}^1$$

Eine und dieselbe Achsenkongruenz, ein und dasselbe System gleichbündiger Hyperboloide als Trägerflächen der zu gleichen Parametern gehörigen Achsen kommt nicht bloß einem Schraubenbündel zu, sondern allen jenen linear bleibenden Bündeln, welche aus einem von ihnen durch Vergrößerung oder Verkleinerung aller Parameter um konstante Stücke hervorgehen.²⁾ Geometrisch sind also für die Achsenkongruenz und die gleichbündigen Hyperboloide $F(p)$, sowie für deren Einhüllende, die Hydesche Brenn- oder Grenzfläche der einander er-

1) Vgl. Gr. S. 100 und die dort anschließende Konstruktion der gleichbündigen Hyperboloide $F(p)$.

2) Vgl. z. B. ebenda S. 63.

gänzenden Kongruenzen $K(G)$ und $K(I')$ nur die Parameterdifferenzen wesentlich. Ist ein Hyperboloid $F(p)$ beliebig gegeben und ihm irgend ein Parameter p als zur linken Schar G gehörig zugewiesen worden, so bestimme man die Differenzen zwischen p und den auf die Hyperboloidachsen entfallenden Hauptparametern gemäß den Gleichungen¹⁾

$$(6) \quad \begin{cases} p - p_I = \frac{a_{II} a_{III} \sqrt{-1}}{a_I} \\ p - p_{II} = \frac{a_{III} a_I \sqrt{-1}}{a_{II}} \\ p - p_{III} = \frac{a_I a_{II} \sqrt{-1}}{a_{III}} \end{cases}$$

durch die Halbachsen a_I, a_{II}, a_{III} des Hyperboloides, für welche entweder $a_{II}^2 > a_I^2 > 0 > a_{III}^2$ oder $a_{II}^2 > a_{III}^2 > 0 > a_I^2$ gilt.

Wesentlich sind die Differenzen der Hauptparameter:

$$(7) \quad \begin{cases} d_1 = p_{III} - p_{II} = \frac{a_I \sqrt{-1}}{a_{II} a_{III}} (a_{II}^2 - a_{III}^2) > 0 \\ d_2 = p_I - p_{III} = \frac{a_{II} \sqrt{-1}}{a_{III} a_I} (a_{III}^2 - a_I^2) < 0 \\ d_3 = p_{II} - p_I = \frac{a_{III} \sqrt{-1}}{a_I a_{II}} (a_I^2 - a_{II}^2) > 0, \end{cases}$$

welche mit Rücksicht auf die Beziehung:

$$(8) \quad d_1 + d_2 + d_3 = 0$$

die zwei wesentlichen Konstanten des Systems gleichbündiger Hyperboloide, wie auch der Hydeschen Brennfläche als deren Hüllfläche vorstellen. Die Halbachsen a aller *gleichbündigen* Hyperboloide ändern sich derart, daß die eben durch dieselben dargestellten Ausdrücke d_1, d_2, d_3 , von denen wir die beiden als positiv angenommenen d_1 und d_3 besonders auszeichnen können, *unverändert* bleiben. Durch diese Grundkonstanten des Systems kann man alle übrigen ersetzen, z. B. auch die oben (Gleichung (4), (5)) eingeführten Konstanten e und τ der Basisbüschel, welche mit den d durch die Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} d_3 = p_{II} - p_I = e\tau \\ d_1 = p_{III} - p_{II} = \frac{e}{\tau} \\ d_2 = p_I - p_{III} = -e \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \end{cases}$$

1) Vgl. Gr. S. 97.

beziehungsweise

$$(10) \quad \begin{cases} e^2 = e_{II}^2 & = d_3 d_1 = \frac{1}{a_{II}^2} (a_{II}^2 - a_I^2) (a_{II}^2 - a_{III}^2)^1 \\ \tau^2 = \operatorname{tg}^2 \omega = \frac{d_2}{d_1} & = - \frac{a_{III}^2}{a_I^2} \frac{a_{II}^2 - a_I^2}{a_{II}^2 - a_{III}^2} \end{cases}$$

verbunden sind und gewinnt so in den durch die Halbachsen a eines beliebigen gleichbündigen Hyperboloids darstellbaren Ausdrücken neue abgeleitete Konstanten des Systems von einfacher geometrischer Bedeutung.

Die koncyklischen sphärischen Kegelschnitte' \mathfrak{C} .

Lassen wir gleichzeitig mit p das Hyperboloid $F(p)$ sich innerhalb des gleichbündigen Systems ändern, so ändert sich hiermit zugleich die Berührungskurve $\mathfrak{C}(p)$ mit der Hüllfläche aller $F(p)$, der Hydeschen Brennfläche, sowie auch der Restschnitt $\mathfrak{C}'(p)$ des Hyperboloides mit der Grenzfläche. Es wird sich²⁾ herausstellen, daß

$$\mathfrak{C}'(p) = \mathfrak{C}(p'),$$

wobei

$$p' = \frac{1}{2}(-p + p_I + p_{II} + p_{III}),$$

d. h. daß jeder derartige Restschnitt für einen bestimmten andern Wert p' des Hyperboloidparameters selbst als Berührungskurve eines anderen gleichbündigen Hyperboloides $F(p')$ mit der Brennfläche auftritt, so daß keine wesentliche Verschiedenheit in der Natur dieser Kurven besteht. Man erkennt übrigens sogleich z. B. aus der Betrachtung der Koeffizienten der Potenzen von p in der obigen Gleichung (1)³⁾ $F(p) = 0$ nicht bloß die Natur der eben erwähnten Kurven $\mathfrak{C}(p)$ und $\mathfrak{C}'(p)$, sondern überhaupt jeder Kurve \mathfrak{C} , in welcher sich zwei beliebige Hyperboloide des gleichbündigen Systems durchsetzen können:

Diese Kurven \mathfrak{C} sind durchweg sphärische Kegelschnitte

$$(11) \quad \mathfrak{C} \dots \begin{cases} x^2 + y^2 + s^2 = \text{const.} \\ p_I x^2 + p_{II} y^2 + p_{III} s^2 = \text{const.} \end{cases},$$

welche durch die unendlich fernen Kreispunkte der reellen Ebenen $\mu, \nu^4)$

$$d_3 x^2 - d_1 s^2 = 0$$

(andere Form der Gleichung (3)) hindurchgehen und bezüglich der Koordinatenebenen symmetrisch sind.

1) Man könnte gleich hier die Ausdrücke e_{III}^2 und e_I^2 einführen, welche durch cyklische Vertauschung der Indices aus e_{II}^2 hervorgehen; dies soll später (Gleichung (13) und (25)) wirklich geschehen.

2) Vgl. S. 224, Gleichung (18). 3) Vgl. z. B. Gr. S. 99. 4) Vgl. S. 212.

Um ein anschauliches Bild aller dieser ∞^2 koncyklischen sphärischen Kegelschnitte \mathcal{C} zu erhalten, genügt es, die Kurven \mathcal{C} einer Kugel um den Anfang p zu verzeichnen (Fig. 1), da jede \mathcal{C} auf den konzentrischen Kugeln zu einer der verzeichneten bezüglich des Zentrums p perspektiv ähnlich liegt. In allen unseren Figuren ist die Tangente τ des Winkels ω der gemeinsamen cyklischen Ebenen μ, ν der $F(p)$ gegen die xy -Ebene als $\tau = \frac{1}{2}$ angenommen worden.

Die koncyklischen sphärischen Kegelschnitte \mathcal{C} erfreuen sich interessanter Eigenschaften, von welchen gewisse bei ebenen Kegelschnitten bekannte besondere Fälle sind. Die aus dem Anfange p die \mathcal{C} projizierenden Kegel \mathfrak{k} führen zu den unendlich fernen Kegelschnitten eines Büschels, welches im absoluten Polarsysteme reziprok (dual) ist zu den unendlich fernen Schnitten aller Kegel jener Schar k , welche die durch p zu μ und ν gefällten Lote zu gemeinsamen Fokalachsen haben und deren Haupteigenschaften gewöhnlich geläufiger sind, weshalb wir uns auf dieselben beziehen wollen.

Während jeder Kegel der Konfokalschar k jede Kugel um p in Kurven C einer derartigen Schar durchsetzt, daß jeder auf einer beliebigen C wandernde Punkt mit den Polen der Ebenen μ, ν auf der Kugel sphärische Dreiecke konstanten Umfanges bildet, schließt jeder zu einer \mathcal{C} des in Fig. I verzeichneten koncyklischen Büschels tangential bleibende bewegliche größte Kugelkreis mit den beiden festen Kreisen in μ und ν ein veränderliches sphärisches Dreieck konstanter Winkelsumme, d. h. konstanten Flächeninhaltes ein.

Während sich in jedem Punkte w der Kugel zwei Kurven des anderen Systems C senkrecht schneiden, deren zu w gehörige Tangenten in den winkelhalbierenden Ebenen jenes Ebenenpaares liegen, welches pw mit den Fokalachsen verbindet, oder allgemeiner, in den gemeinsamen winkelhalbierenden Ebenen aller jener Ebenenpaare, welche durch pw tangential zu irgend einem der die C tragenden Kegel k gelegt sind, — wird andererseits jeder größte Kugelkreis von zwei Kurven \mathcal{C} berührt. Dies geschieht in Punkten, welche aus dem Anfange p unter einem rechten Winkel gesehen werden und auf den winkelhalbierenden Geraden jenes Strahlenpaares liegen, in welchen die Ebene des betreffenden größten Kreises vom Ebenenpaare μ, ν geschnitten wird, oder allgemeiner, auf den gemeinsamen Winkelhalbierenden aller Strahlenpaare, in welchen die betreffende Kreisebene von den die \mathcal{C} tragenden Kegeln \mathfrak{k} durchsetzt wird.

Hiernach kann eine gemeinsame Eigenschaft aller „koncyklischen“ Flächen

$$f[(x^2 + y^2 + z^2), (p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2)] = 0,$$

die von ∞^1 unserer ∞^2 koncyklischen \mathfrak{C} erfüllt sind, ausgesprochen werden; dieselbe interessiert uns besonders deshalb, weil nicht nur alle Mittelpunktsflächen 2. Ordnung mit den Kreisschnittebenen μ , ν , z. B. alle zum Bündel gehörigen und zum Teil in den Fig. IV bis X dargestellten Hyperboloide $F(p)$, sondern auch die Hüllfläche der letzteren, die Hydesche Brennfläche der Kongruenz $K\left(\begin{smallmatrix} G \\ \Gamma \end{smallmatrix}\right)$ (Fig. XI), ferner die Parameterfläche des Bündels (Fig. II) zu diesen „koncyklischen“ Flächen gehören:

Der Schnitt jeder koncyklischen Fläche mit einer beliebig durch ihren Mittelpunkt p gelegten Ebene E ist stets *symmetrisch bezüglich* zweier zueinander senkrechter Achsen, welche mit den *Winkelhalbierenden der Spuren der cyklischen Ebenen* μ , ν in E identisch sind. Jede der koncyklischen Kurven \mathfrak{C} hat in E eine bezüglich dieser Achsen symmetrisches Quadrupel von Spurpunkten.

Die Parameterfläche¹⁾ (\mathfrak{P}) mit der Gleichung

$$(12) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 - (p_I x^2 + p_{II} y^2 + p_{III} z^2)^2 = 0$$

dient zur Veranschaulichung des auf jede Achse G im Bündel R_{III} entfallenden Schraubenparameters $p = (2\pi)^{-1}h$, d. h. der $(2\pi)^{-1}$ fach verkleinerten Ganghöhe h . Sie ist der Ort der Endpunkte der vom Anfang p aus auf Parallelen zu den zugehörigen Schraubenachsen G abgetragenen Parameter (Steigungen) p . (Fig. II.)

Als koncyklische Fläche unseres Systems ist sie z. B. durch einen ihrer drei Hauptschnitte als Leitlinie bestimmt. Diese Hauptschnitte sind wie überhaupt alle beliebigen ebenen Schnitte durch den Mittelpunkt p „Parameterkurven“ \mathfrak{P} und als solche am bequemsten aus den beiden Hauptparametern der Schnittebene, d. h. den Radien der Parameterfläche (\mathfrak{P}), welche auf die Winkelhalbierenden der Spuren von μ und ν in der Schnittebene fallen, zu konstruieren, wie dies für die verschiedenen Formen von \mathfrak{P} in den Figuren 2' 3' 4' (auch 6) der oben erwähnten Abhandlung des Verfassers²⁾ geschehen ist.

Jede solche \mathfrak{P} ist die Parameterkurve eines im Bündel R_{III} enthaltenen linearen Schraubenbüschels R_{II} , dessen Achsenfläche, ein Plückersches Cylindroid, von den zur Schnittebene parallelen Strahlen der Kongruenz $K(G)$ erfüllt ist.

Die Parameterfläche (\mathfrak{P}) hat den absoluten Kugelkreis zur Kuspidal-kurve, die isotropen Geraden (Minimallinien) durch den Anfang p in den Ebenen μ und ν zu Doppelpunktslinien und den Anfang selbst

1) Vgl. Gr. S. 105.

2) Gr. S. 69 und Figurentafel hierzu. (48. Bd. dieser Zeitschrift, 1. H.)

zum vierfachen singulären Punkte. In dem letzteren hat sie einen doppelt zu zählenden, zum Systeme der konzyklischen Kegel \mathfrak{f} gehörigen Tangentialkegel \mathfrak{f}_1 .

Zum Bündel R_{III} gehört eine Kongruenz $K(G)$ von Schraubenachsen und eine Parameterfläche (\mathfrak{P}); die gleiche Kongruenz von Achsen besitzen aber auch alle jene linear bleibenden Schraubenbündel, deren an der früheren Stelle bleibende Schraubenachsen zu einem durchwegs um ein gleiches Stück größeren oder kleineren Parameter gehören¹⁾; mit einer festen Achsenkongruenz $K(G)$ sind also außer der in Fig. II dargestellten Parameterfläche (\mathfrak{P}) auch noch alle Konchoiden derselben verträglich, d. h. alle jene Flächen, welche aus der obigen (\mathfrak{P}) durch algebraische Addition gleicher Stücke zu allen Radien hervorgehen. In der Gleichungsform von (\mathfrak{P}) erscheinen beim Übergange zu den Konchoiden an Stelle der früheren Hauptparameter p_I p_{II} p_{III} die durch die betreffende algebraische Addition veränderten Konstanten.

Es ist interessant, die Formen der Parameterflächen zu verfolgen, welche bei dieser zur Achsenkongruenz $K(G)$ gehörigen Konchoidenbildung gewonnen werden. Verschiebt man z. B. alle Punkte der in Fig. II dargestellten (\mathfrak{P}) auf ihren Verbindungsstrahlen mit dem Mittelpunkt p gegen p hin um gleiche Stücke, welche etwas größer sind als der kleinste bei (\mathfrak{P}) auftretende Parameter p_I , so treten bei p beiderseits an der x -Achse symmetrisch zur yz -Ebene konisch eingelagerte zapfenförmige Flächenteile auf; bei der Verschiebung um p_I war nur eine spitze Einkerbung an der x -Achse bei p merklich gewesen, erst bei weiterer Verschiebung wuchs der doppelzapfige Flächenteil dort heraus, welcher zu Parametern anderen Vorzeichens gehört als der übrige Teil der Fläche und dessen Doppelkonuslager \mathfrak{f}_1 die früher imaginär gewesene Singularität bei p nun ganz anschaulich macht. Der übrige Flächenteil hatte während des Wachsens des Doppelzapfens abgenommen.

Verschiebt man weiter, im ganzen um p_{II} gegen p hin, so erhält die Fläche die Gestalt von zwei in p kreuzförmig zusammenkommenden Zapfenpaaren an der x - und z -Achse, welche in zwei unendlich kleinen Kreisen der Ebenen μ , ν , in welche \mathfrak{f}_1 ausartet, zusammenhängen. Die isotropen Doppellinien der früheren Gestalten von Konchoiden sind in diesem Falle Kuspideallinien geworden.

Verschiebt man allmählich im selben Sinne weiter, so wächst der bisher doppelzapfige Flächenteil an der x -Achse weiter aus und wird teller- oder scheibenförmig (oval mit Einbuchtung bei der y -Achse) bei

1) Vgl. S. 213, Anm. 2.

der xy -Ebene, während an der z -Achse ein konisch bei p eingekeilter Doppelzapfen übrig bleibt, der selbst immer abnimmt, während der tellerförmige Flächenteil wächst.

Bei Verschiebung im selben Sinne, im ganzen von der Anfangsgestalt (§) gerechnet um p_{III} , verschwindet der letzterwähnte Doppelzapfen ganz, und es ist bloß die spitze Einkerbung an der z -Achse in der sonst tellerförmigen Fläche merkbar.

Bei weiterer Verschiebung verschwindet auch diese Einkerbung und die scheibenförmige Parameterfläche mit der schwächeren Einbuchtung an der y - und der stärkeren an der z -Achse wächst allmählich weiter bis zu kugelartigen, großen Gestalten, nicht unähnlich jenen, welche (§) angenommen hätte, wenn wir die anfängliche Verschiebung in entgegengesetzten Sinne sich hätten vollziehen lassen.

Die auf den durch p gehenden Strahlen abgetragenen bis zu (§) reichenden Parameter ändern ihr Vorzeichen beim Durchgange eines solchen Strahles durch eine zum singulären Kegel \mathfrak{k}_1 tangentielle Lage; was natürlich für reelle Parameter nur dann möglich wird, wenn \mathfrak{k}_1 reell ist.

Die gleichbündigen Hyperboloide $F(p)$ und ihre Hydesche Einhüllende.

Um die Halbachsen (Gl. 1, 2)

$$a_I = \sqrt{-(p - p_{II})(p - p_{III})}, \quad a_{II} = \sqrt{-(p - p_{III})(p - p_I)},$$

$$a_{III} = \sqrt{-(p - p_I)(p - p_{II})}$$

der mit p sich ändernden zum Schraubenbündel gehörigen Hyperboloide $F(p)$ sowie auf jedem solchen Hyperboloide $F(p)$ die Lage der Berührungskurve $\mathfrak{C}(p)$ mit der Hydeschen Brennfläche und des Restschnittes $\mathfrak{C}'(p)$ zu übersehen, wählen wir in Fig III ein graphisches Verfahren, indem wir zu jedem beliebigen Parameter p als Abscisse

die Halbachse a_I von $F(p)$ als Ordinate bis zum Endpunkte auf K_I ,

$$\begin{array}{ccc} a_{II} & & K_{II}, \\ a_{III} & & K_{III}, \end{array}$$

ferner den Radius $r = r_{(p)}$ der mit $F(p)$ konzentrischen Kugel von $\mathfrak{C}_{(p)}$ als Ordinate bis zum Endpunkte auf $E(r)$ und endlich den Radius $R = R_{(p)}$ der konzentrischen Kugel von $\mathfrak{C}'(p) = \mathfrak{C}(p')$ als Ordinate bis zum Endpunkte auf $E(R)$ abtragen (vgl. S. 215, $E(r)$ und $R_{(R)}$ werden durch die folgenden Gl 14 und 19 bestimmt werden).

Aus der Figur III kann man später leicht diese Halbachsen und Kugelradien zur Konstruktion der Hyperboloidfiguren IV bis X des Bündels mit ihren Berührungskurven $\mathfrak{C}(p)$ und Restschnitten $\mathfrak{C}'(p)$

benützen, wobei durch genügend viele derart konstruierte Kurven \mathcal{C} der Brennfläche die Gestalt der letzteren (Fig. XI) von selbst hervortritt.¹⁾

K_I, K_{II}, K_{III} der Figur III sind drei Kreise, welche die Strecken zwischen den Punkten der Abscissenachse p_{II} bis p_{III} , bzw. p_{III} bis p_I , bzw. p_I bis p_{II} zu Durchmessern haben und sich daher paarweise in diesen Punkten der Abscissenachse berühren. Man entnimmt aus der Figur III u. a. auch ohne weiteres, daß die Halbachsen a_I, a_{II}, a_{III} der für $p_I < p < p_{III}$ reellen Hyperboloide $F(p)$ für den Parameterwert

$$p = \frac{1}{2}(p_{II} + p_{III}) \qquad \frac{1}{2}(p_{III} + p_I) \qquad \frac{1}{2}(p_I + p_{II})$$

ihren größten Wert

$$\pm \frac{1}{2}d_1 = \pm \frac{1}{2}(p_{III} - p_{II}), \quad \pm \frac{1}{2}d_2 = \pm \frac{1}{2}(p_I - p_{III}), \quad \pm \frac{1}{2}d_3 = \pm \frac{1}{2}(p_{II} - p_I)$$

erreichen.

Jeder unterhalb dieses Maximums gelegene reelle Wert der betreffenden Halbachse wird für zwei zu reellen gleichbündigen Hyperboloiden $F(p)$ gehörige Werte von p erreicht, welche in Fig. III bezüglich des zum betreffenden Maximalwerte gehörigen Parameters symmetrisch liegen. [Zu allen beliebigen Werten einer Halbachse gehört überdies das zum Ebenenpaar durch diese Achse ausartende Hyperboloid, welchem der auf diese Achse entfallende Hauptparameter (p_I , bzw. p_{II} oder p_{III}) zukommt.]

Die zu den Maximalhalbachsen

$$(\text{Fig. X}) \qquad \pm \frac{1}{2}d_1 = \overline{p\mathcal{E}}$$

$$(\text{Fig. IX}) \qquad \pm \frac{1}{2}d_2 = \overline{pH}$$

$$(\text{Fig. IV}) \qquad \pm \frac{1}{2}d_3 = \overline{pZ}$$

gehörigen drei Hyperboloide $F(p)$ haben zum Hauptschnitte in der YZ -, bzw. ZX -, bzw. XY -Ebene eine gleichseitige Hyperbel, da z. B. für den Punkt der Abscissenachse $p = \frac{1}{2}(p_{II} + p_{III})$ in der Fig. III $a_{II}^2 + a_{III}^2 = 0$ wird, wie denn auch die von diesem Punkte gezogene Ordinate von K_{II} und die Tangente von K_{III} gleich lang sind.

Für $p = p_I, p_{II}, p_{III}$ artet $F(p)$ in ein Ebenenpaar durch die X -, bzw. Y -, bzw. Z -Achse aus, welches jedoch nur für den mittleren dieser Hauptparameter, für $p = p_{II}$ als Paar der cyklischen Ebenen μ, ν durch die Y -Achse reell ist (Fig. VI).

1) Damit für jedes p die Übertragung der auf die isometrisch darzustellenden Koordinatenachsen entfallenden Strecken sogleich in unveränderter Größe geschehen könne, ist das Verhältnis des Maßstabes der Fig. III (und späterhin der Fig. XII) zu jenem der übrigen Figuren (IV bis XI) wie $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ gehalten.

Der auf die Achse des Ebenenpaares entfallende Halbachsenwert

$$\left. \begin{aligned} [\pm a_I]_{p=p_I} &= \pm e_I = \pm \sqrt{-(p_I - p_{II})(p_I - p_{III})} = \pm \sqrt{d_3 d_1} \text{ imag.} \\ \pm e &= [\pm a_{II}]_{p=p_{II}} = \pm e_{II} = \pm \sqrt{-(p_{II} - p_{III})(p_{II} - p_I)} = \pm \sqrt{d_3 d_1} \text{ reell} \\ [\pm a_{III}]_{p=p_{III}} &= \pm e_{III} = \pm \sqrt{-(p_{III} - p_I)(p_{III} - p_{II})} = \pm \sqrt{d_1 d_2} \text{ imag.} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d_1 &> 0 \\ d_2 &< 0 \\ d_3 &> 0 \end{aligned}$$

(vgl. S. 214 u. Gl. 10 u. 5) des zum betreffenden Hauptparameter gehörigen $F(p)$ gehört zu den Zentren jener beiden Strahlenbüschel, in welche die beiden Regelscharen des zum Ebenenpaar entarteten Hyperboloides übergehen. Für $p = p_{II}$ sind dies die reellen Zentren M, N der Y -Achse mit der Ordinate $\pm e$ (vgl. S. 213).

Mit wachsendem p beginnen die zum Bündel gehörigen Hyperboloide $F(p)$ nach dem Übergang durch den Wert p_I als schmale hyperboloidische Röhren um die X -Achse herum, verbreitern sich dann (Fig. IV und V) so, daß für $p = p_{II}$ die Form des Ebenenpaares μ, ν passiert wird (Fig. VI), was den Übergang zu den Hyperboloiden (Fig. III bis X) um die Z -Achse bildet. Letztere verengen sich schließlich immer mehr um die Z -Achse, während sich p dem Werte p_{III} nähert.

Die mit p veränderlichen Halbachsen a_I, a_{II}, a_{III} der gleichbündigen Hyperboloide $F(p)$, welche wir aus der Fig. III für jeden Wert von p entnehmen können, gestatteten uns einen Überblick über die auftretenden Gestalten dieser Trägerflächen von Strahlen der Achsenkongruenz $K_r^{(g)}$; nun sollen uns die sogleich zu untersuchenden Kurven $E(r)$ und $E(R)$ dieser Figur Dienste leisten zur Übersicht der Gestalten der Berührungskurve $\mathfrak{C}(p)$ und des Restschnittes $\mathfrak{C}'(p)$ jedes Hyperboloides $F(p)$ mit der Hydeschen Brennfläche, wodurch auch die letztere Fläche (Fig. XI) von selbst hervortritt. Wie oben (S. 219) erwähnt, stellt die für ein beliebiges p bis zu $E(r)$, bzw. $E(R)$ geführte Ordinate unmittelbar der Radius $r = r_{(p)}$, bzw. $R = R_{(p)}$ der zum betreffenden Hyperboloide gehörigen konzentrischen Kugel vor, auf welcher $\mathfrak{C}(p)$, bzw. $\mathfrak{C}'(p)$ liegt.

$r_{(p)}$ ist leicht durch p auszudrücken, da für die Berührungskurve $\mathfrak{C}(p)$ des Hyperboloides $F(p)$ mit der Brennfläche die Gleichung gilt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} F(p) = x^2 + y^2 + z^2 + (p - p_{II})(p - p_{III}) + (p - p_{III})(p - p_I) + (p - p_I)(p - p_{II}) = 0,$$

d. h.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a_I^2 + a_{II}^2 + a_{III}^2.$$

r ist der mit p veränderliche Radius der „Orthogonalpunktskugel“⁽¹⁾ Monges bei jedem Hyperboloide $F(p)$ und die Kurve $E(r)$ der Fig. III ist die Ellipse (p Abscisse, r Ordinate):

$$(14) \quad r^2 = -\overbrace{p_{II} p_{III} + p_{III} p_I + p_I p_{II}} + 2\overbrace{p p_I + p p_{II} + p p_{III}} - 3p^2.$$

Dieselbe hat für den Durchschnittswert der drei Hauptparameter

$$p = \frac{1}{3}(p_I + p_{II} + p_{III})$$

(hierzu Fig. VIII als $F(p)$) den *Maximalwert* ϱ von r , ausdrückbar gemäß

$$\begin{aligned} 3\varrho^2 = 3[r^2]_p = \frac{1}{3}(p_I + p_{II} + p_{III}) &= p_I^2 + p_{II}^2 + p_{III}^2 - (p_{II} p_{III} + p_{III} p_I + p_I p_{II}), \\ &= \frac{1}{3}(\overbrace{p_{II}^2 - p_{III}^2} + \overbrace{p_{III}^2 - p_I^2} + \overbrace{p_I^2 - p_{II}^2}), \end{aligned}$$

oder durch die d , bzw. e und τ als

$$(15) \quad = \frac{1}{3}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2),$$

wobei die Gl. 8 ($d_1 + d_2 + d_3 = 0$) gilt,

$$\begin{aligned} &= d_1^2 + d_1 d_3 + d_2^2 = d_1^2 - d_2 d_3 = d_2^2 - d_3 d_1 \\ &= d_2^2 - d_1 d_2, \\ &= d_1^2 - e_1^2 = d_2^2 - e_2^2 = d_3^2 - e_3^2, \\ &= e^2 \left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} + 1 \right), \end{aligned}$$

$$(16) \quad = -(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2),$$

wobei die Beziehung $\left(\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} + \frac{1}{e_3^2} = 0 \right)$ für die Größen $e^2 = e_{II}^2 = d_3 d_1$, $e_{III}^2 = d_1 d_2$, $e_I^2 = d_2 d_3$ (Gl. 13) aus der Gl. 8 folgt. Der unveränderliche Ausdruck $3\varrho^2$ kann auch mit Rücksicht auf die Gl. 10 durch die Halbachsen eines *beliebigen* unter den gleichbündigen Hyperboloiden als

$$(17) \quad 3\varrho^2 = a_I^2 + a_{II}^2 + a_{III}^2 - \left(\frac{a_{II}^2 a_{III}^2}{a_I^2} + \frac{a_{III}^2 a_I^2}{a_{II}^2} + \frac{a_I^2 a_{II}^2}{a_{III}^2} \right)$$

dargestellt werden.

Die Ellipse $E(r)$ der Fig. III hat in den Punkten ($p = \frac{1}{3} \overbrace{p_I + p_{II} + p_{III}}$) $r = \pm \varrho$) ihre Hauptscheitel; sie geht durch die Punkte

$$\begin{array}{ll} (p_I, \pm e_I) & (\text{imag.}) \text{ des Kreises } K_I, \\ (p_{II}, \pm e_{II} = \pm e) & (\text{reell}) \quad \quad \quad \quad \quad K_{II}, \\ (p_{III}, \pm e_{III}) & (\text{imag.}) \quad \quad \quad \quad \quad K_{III}, \end{array}$$

1) Diese Kugel ist der Ort jener Punkte, aus denen sich an das Hyperboloid $F(p)$ drei zueinander senkrechte Tangentialebenen legen lassen; sie schneidet $F(p)$ in dem geometrischen Orte $\mathcal{E}(p)$ jener Punkte, in welchen sich Erzeugende dieses Hyperboloides *senkrecht* schneiden.

ferner durch die S. 220 erwähnten zu den Durchschnittswerten zweier der drei Hauptparameter p_I, p_{II}, p_{III} als Abscissen und zu den größten Halbachsen $\pm \frac{1}{2}d_1, \pm \frac{1}{2}d_2, \pm \frac{1}{2}d_3$ als Ordinaten gehörigen Punkte der Kreise K_I, K_{II}, K_{III} .

Zwei gleichbündige Hyperboloide $F(p)$, deren Parameter sich vom Durchschnittswerte $\frac{1}{2}(p_I + p_{II} + p_{III})$ der drei Hauptparameter um gleiche Stücke unterscheiden, haben — wie unmittelbar aus der Symmetrie der Ellipse $E(r)$ in Fig. III bezüglich ihrer Hauptachse hervorgeht — dieselbe Orthogonalpunktskugel, also konsphärische Berührungskurven mit der Hydeschen Brennfläche.

$r = r(p)$ bleibt, wie ein Blick auf die Fig. III lehrt, nur dann absolut genommen größer als die kleinste reelle Halbachse des zugehörigen Hyperboloides $F(p)$, wenn p sich zwischen den Grenzen

$$\frac{1}{2}(p_I + p_{II}) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(p_{II} + p_{III})$$

befindet, und nur in diesen beiden Grenzfällen ist r der kleinsten reellen Halbachse a_{III} , bzw. a_I gleich; daher sind nur in diesem Intervalle die Berührungskurven $\mathfrak{C}(p)$ der Hyperboloide $F(p)$ mit der Hydeschen Brennfläche reell. Bei wachsendem p ist die Kurve $\mathfrak{C}(p)$ anfangs bei den schmalen hyperboloidischen Röhren um die X -Achse (von $p = p_I$ an) nicht reell, sondern wird es erst von $p = \frac{1}{2}(p_I + p_{II})$, Fig. IV, an, vorerst nur als winziges reelles Doppeloval an der Z -Achse und bleibt dann reell in den folgenden Figuren bis $p = \frac{1}{2}(p_{II} + p_{III})$, Fig. X, wo sie bis zu einem uneingeschränkt kleinen Doppelovale an der X -Achse sich zusammenzieht. Für die später bei wachsendem p bis $p = p_{III}$ sich immer enger um die Z -Achse herum anlegenden hyperboloidischen Röhren $F(p)$ ist die Berührungskurve $\mathfrak{C}(p)$ mit der Brennfläche schon wieder imaginär.

Anders verhält sich der koncyklische sphärische Kegelschnitt

$$\mathfrak{C}'(p) = \mathfrak{C}(p),$$

der Restschnitt des Hyperboloides $F(p)$ mit der Hydeschen Brennfläche. Dieser ist bei allen reellen Hyperboloiden ($p_I < p < p_{III}$) stets reell, wie aus der Untersuchung (S. 226) des Radius $R = R(p)$ der diese Kurve \mathfrak{C}' tragenden „Grenzpunktskugel“¹⁾ Waelschs hervorgeht.

1) Diese Kugel schneidet die Erzeugenden des zu p gehörigen gleichbündigen Hyperboloides, d. h. die zu p gehörigen Strahlen der Achsenkongruenz des Schraubenbündels in deren Kummerschen Grenzpunkten. (Kummers Abb. im 57. Bde des Crelleschen Journals. „Grenzpunkte“ heißen die beiden Grenzlagen jener Punkte eines Kongruenzstrahles, welche den benachbarten Kongruenzstrahlen zunächst liegen.)

Wir führen die Untersuchung des Radius

$$R(p) = r(p')$$

der Kugel von $\mathfrak{C}'(p) = \mathfrak{C}(p')$ und damit der die Gesamtheit der $R(p)$ darstellenden Kurve $E(R)$ in der Figur III im engsten Zusammenhange mit dem Nachweise der einfachen Beziehung

$$(18) \quad p' = \frac{1}{2}(-p + p_I + p_{II} + p_{III})$$

zwischen p und p' :

Jeder der konzyklischen sphärischen Kegelschnitte $\mathfrak{C}(p)$ der Hydeschen Brennfläche bildet sich bei Einführung der Substitution¹⁾

$$x^2 = X, \quad y^2 = Y, \quad z^2 = Z$$

in eine zu p gehörige Erzeugende

$$\begin{cases} (p - p_I)X + (p - p_{II})Y + (p - p_{III})Z + (p - p_I)(p - p_{II})(p - p_{III}) = 0 \\ X + Y + Z - r_p^2 = 0 \\ [r_p^2 = - (p - p_{II})(p - p_{III}) - (p - p_{III})(p - p_I) - (p - p_I)(p - p_{II})] \end{cases}$$

des Cylinders ab, dessen Kanten die durch

$$X : Y : Z = (p_{III} - p_{II}) : (p_I - p_{III}) : (p_{II} - p_I)$$

bestimmte Richtung haben, und dessen Basis etwa in der XY Ebene durch

$$\begin{cases} (p - p_I)X + (p - p_{II})Y + (p - p_I)(p - p_{II})(p - p_{III}) = 0 \\ X + Y - r_p^2 = 0 \end{cases}$$

dargestellt ist, indem die erste dieser beiden Gleichungen die Tangente der Basiskurve angibt, während die zweite deren Berührungspunkt liefert. Dies gibt die Parameterdarstellung der Basiskurve in Punktkoordinaten

$$\begin{cases} (p_{II} - p_I)X = (p - p_{II})^2(2p - p_I + p_{III}) \\ (p_{II} - p_I)Y = - (p - p_I)^2(2p - p_{II} + p_{III}) \end{cases}.$$

Die Basiskurve ist rational, von der 3. Ordnung und 3. Klasse. Dem Aufsuchen von $\mathfrak{C}'(p) = \mathfrak{C}(p')$ entspricht in unserem Bilde die Bestimmung des sogenannten „Tangentialpunktes“ unserer Basiskurve, d. h. jenes zum Parameter p' gehörigen Punktes derselben, in welchem sie von der zu p gehörigen Tangente (außer dem Berührungspunkte noch weiterhin) durchsetzt wird; die Cylinderkante des Tangentialpunktes ist das Bild von $\mathfrak{C}'(p) = \mathfrak{C}(p')$, des auf der Kugel vom Radius $R(p) = r(p')$ gelegenen Restschnittes des $F(p)$ mit der Brennfläche.

1) Vgl. DESMOULINS oben erwähnte Abhandlung S. 82.

Unsere Basiskurve 3. Ordnung hat die unendlich ferne Gerade zur Wendetangente mit dem Wendepunkte auf $X + Y = 0$ und eine Spitze für $p = \frac{1}{3}(p_I + p_{II} + p_{III})$. Der letztere Umstand könnte auch aus der nun zu ermittelnden und in Gleichung (18) angeführten Beziehung zwischen p und p' gefolgert werden; seine Feststellung führt zu dem Schlusse, daß die auf der Kugel vom Radius ϱ gelegene Kurve

$$(Fig. VIII) \quad \mathfrak{C}(\frac{1}{3} \overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) = \mathfrak{C}_\varrho$$

die reelle Kuspidakurve der Brennfläche ist, wobei das Hyperboloid

$$F(\frac{1}{3} \overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) = F_\varrho$$

die Brennfläche entlang \mathfrak{C}_ϱ unter Berührung durchsetzt.

Bezeichnen wir $\frac{\partial X}{\partial p}$ mit X' , $\frac{\partial Y}{\partial p}$ mit Y' , so stellt sich in den laufenden Punktkoordinaten \mathfrak{X}, H die Gleichung der Basiskurventangente des Cylinders als

$$\begin{vmatrix} H & \mathfrak{X} \\ X' & Y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}$$

dar.

Setzen wir in dieselbe für X, Y, X', Y' die aus dem vorigen Gleichungspaare folgenden Werte und sehen \mathfrak{X}, H als Koordinaten des zu p' gehörigen Tangentialpunktes an, so wird die sich ergebende Gleichung

$$\begin{vmatrix} (p' - p_{II})^2(2p' - \overline{p_I + p_{III}}), & -(p' - p_I)^2(2p' - \overline{p_{II} + p_{III}}) \\ (p - p_{II})(3p - \overline{p_I + p_{II} + p_{III}}), & -(p - p_I)(3p - \overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} (p - p_{II})^2(2p - \overline{p_I + p_{III}}), & -(p - p_I)^2(2p - \overline{p_{II} + p_{III}}) \\ (p - p_{II})(3p - \overline{p_I + p_{II} + p_{III}}), & -(p - p_I)(3p - \overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) \end{vmatrix}$$

oder nach Unterdrückung des zur Kuspidakurve der Brennfläche gehörigen Faktors $(3p - \overline{p_I + p_{II} + p_{III}})$:

$$(p' - p_I)^2(2p' - \overline{p_{II} + p_{III}})(p - p_{II}) - (p' - p_{II})(2p' - \overline{p_I + p_{III}})(p - p_I) \\ = \text{dem analogen Ausdrücke, den man aus dem linksstehenden bei} \\ \text{Setzung von } p \text{ statt } p' \text{ erhält,}$$

$$2p'^3 - p'^2(3p + \overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) + p'(2p \overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) \\ - (\overline{p p_{II} p_{III} + p_{III} p_I + p_I p_{II} - p_I p_{II} p_{III}})$$

= dem analogen Ausdrücke, den man aus dem linksstehenden bei
Setzung von p statt p' erhält,

d. h.

$$2p'^3 - p'^2(3p + \overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) + p'(2p\overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) + (p^3 - p^2\overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) = 0,$$

außer durch die Doppelwurzel $p' = p$ noch durch den zum Tangentialpunkte, bzw. zu $\mathfrak{C}'(p) = \mathfrak{C}(p')$ gehörigen Wert

$$(18) \quad p' = \frac{1}{2}(-p + \overline{p_I + p_{II} + p_{III}})$$

erfüllt.

Die eben abgebildete einfache Beziehung zwischen p und p' , welche auch in der Form

$$(18') \quad (p' - \frac{1}{2}\overline{p_I + p_{II} + p_{III}}) = -\frac{1}{2}(p - \frac{1}{2}\overline{p_I + p_{II} + p_{III}})$$

geschrieben werden kann, besagt:

„Der Restschnitt $\mathfrak{C}'(p)$ jedes Hyperboloides $F(p)$ mit der Hydeschen Brennfläche ist identisch mit der Berührungskurve $\mathfrak{C}(p')$ dieser Brennfläche und jenes Hyperboloides $F(p')$, dessen Parameter p' vom Parameter $\frac{1}{2}(\overline{p_I + p_{II} + p_{III}})$ des zur Kupidalkurve $\mathfrak{C}_\varrho = \mathfrak{C}(\frac{1}{2}\overline{p_I + p_{II} + p_{III}})$ gehörigen Hyperboloides F_ϱ nach der entgegengesetzten Seite um die Hälfte jenes Intervalles abweicht, welches zwischen dem Parameter p von $F(p)$ und jenem $(\frac{1}{2}\overline{p_I + p_{II} + p_{III}})$ des F_ϱ besteht.“

So ist z. B. \mathfrak{C} in Figur IX mit \mathfrak{C}' in Figur VI identisch, das Kreispaar $\mathfrak{R}'_I \mathfrak{R}'_{II}$ spielt eben bei dem in der ersten Figur dargestellten Hyperboloide die Rolle der Berührungskurve, bei letzterem jene des Restschnittes mit der Brennfläche.

In Figur III, in welcher die Elemente $a_I, a_{II}, a_{III}, r_{(p)}, R_{(p)} = r_{(p')}$ eines jeden der Hyperboloide $F_{(p)}$ zu jedem beliebigen p übersichtlich zusammengetragen sind, um dann zum Aufbau der Figuren IV bis IX, bzw. XI zu dienen, ist nach der eben entwickelten Beziehung zwischen p und p' der Ort $E(R)$ aller zu den beliebigen Abscissen p abgetragenen Ordinaten $R_{(p)} = r_{(p')}$ jene Ellipse, welche aus der oben kennen gelernten Ellipse $E_{(r)}$ durch Verdoppelung der Abstände aller Punkte von der zu $\frac{1}{2}(\overline{p_I + p_{II} + p_{III}})$ gehörigen Maximalordinate ϱ (Hauptachse von $E_{(r)}$) hervorgeht, d. h. also durch perspektiv-affine Abbildung mit der Maximalordinate (von der Länge ϱ) als Affinitätsachse, der zur letzteren senkrechten Affinitätsrichtung und dem Modulus -2 .

Der Radius

$$\varrho = e\sqrt{\frac{1}{3}\left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} + 1\right)}$$

(S. 221, Gleichung nach 15) der Kuspidualkurve der Hydeschen Brennfläche ist auch der Maximalwert von $R_{(p)} = r_{(p)}$, und es gehört zu jenen Werten des Parameters p , welche vom zu ϱ gehörigen Parameter $(\frac{1}{3}p_I + p_{II} + p_{III})$ nach entgegengesetzter Seite hin sich um gleichviel unterscheiden, auch derselbe Wert von $R_{(p)}$, also dieselbe Grenzpunktkugel.

„Die beiden Hyperboloide $F_{(p)}$, welche dieselbe Orthogonalpunktskugel haben, gehören auch zur selben Grenzpunktskugel, und umgekehrt. Ihre Parameter weichen vom Parameter $\frac{1}{3}(p_I + p_{II} + p_{III})$ des die Brennfläche entlang ihrer reellen Kuspidualkurve unter Berührung durchsetzenden Hyperboloides $F(\frac{1}{3}p_I + p_{II} + p_{III}) = F_\varrho$ nach entgegengesetzter Seite um gleichviel ab.“

Die Ellipse $E(R)$ der Figur III *berührt doppelt*

den Kreis K_I und zwar in den beiden zur Abscisse $(-p_I + p_{II} + p_{III})$ gehörigen imaginären Punkten mit der Ordinate $\pm e_I$,

den Kreis K_{II} und zwar in den beiden zur Abscisse $(p_I - p_{II} + p_{III})$ gehörigen *reellen* Punkten mit der Ordinate $\pm e_{II} = \pm e$,

den Kreis K_{III} und zwar in den beiden zur Abscisse $(p_I + p_{II} - p_{III})$ gehörigen imaginären Punkten mit der Ordinate $\pm e_{III}$,

wie man aus der Gleichung dieser Ellipse (p Abscisse, R Ordinate) entnehmen kann. Diese Gleichung, welche aus

$$R^2 = R_{(p)}^2 = r_{(p)}^2,$$

$$= -[(p' - p_{II})(p' - p_{III}) + (p' - p_{III})(p' - p_I) + (p' - p_I)(p' - p_{II})]$$

folgt, lautet (p Abscisse, R Ordinate):

$$\begin{aligned} 4R^2 &= -[(p_I + p_{III} - p - p_{II})(p_I + p_{II} - p - p_{III}) + \dots + \dots] \\ (19) \quad &= [(p_{III} - p_{II})^2 - (p_I - p)^2 + \dots + \dots] \\ &= (p_I^2 + p_{II}^2 + p_{III}^2 - 2p_{II}p_{III} + p_{III}p_I + p_Ip_{II}) + 2p(p_I + p_{II} + p_{III}) - 3p^2, \end{aligned}$$

und man braucht, um die oben behauptete doppelte Berührung z. B. mit K_{II} nachzuweisen, nur zu untersuchen, für welches p

$$4R^2 = 4a_{II}^2,$$

d. h.

$$= -4(p - p_{III})(p - p_I)$$

sein kann; die sich ergebende Gleichung

$$\begin{aligned} p_I^2 + p_{II}^2 + p_{III}^2 - 2p_{II}p_{III} + \dots + 2p p_I + \dots - 3p^2 \\ = -4p^2 + 4p p_{III} + p_I - 4p_{III}p_I \end{aligned}$$

oder

$$p^2 - 2p(p_I - p_{II} + p_{III}) + (p_I^2 + p_{II}^2 + p_{III}^2 - 2p_I p_{II} + 2p_I p_{III} - 2p_{II} p_{III}) = 0$$

hat nun in der Tat die Doppelwurzel $p = p_I - p_{II} + p_{III}$.

Hieraus folgt, daß R stets größer bleibt als die größte bei irgend einem Hyperboloide $F_{(p)}$ vorkommende Halbachse, außer im Falle $p = p_I - p_{II} + p_{III}$, wo $R = a_{II}$ wird und wo dementsprechend $F_{(p)}$ als Restschnitt \mathfrak{C}' mit der Brennfläche (welche entlang einer imaginären \mathfrak{C} berührt wird) das in der Figur VI verzeichnete Kreispaar $\mathfrak{K}_I \mathfrak{K}_{II}$ besitzt; für dieses Hyperboloid wurde nach der Figur X kein besonderes Bild beigefügt, da die Vorstellung desselben keine Schwierigkeit mehr bietet.

Aus diesem Verhalten von R folgt, daß der Restschnitt $\mathfrak{C}'_{(p)}$ jedes reellen Hyperboloides $F_{(p)}$ mit der Brennfläche stets reell ist, auch dann, wenn (vgl. S. 223) die Berührungskurve $\mathfrak{C}_{(p)}$ bei den schmalen Röhrenformen um die X -, bzw. Z -Achse imaginär wird. In den zusammengehörigen Figuren IV bis X sind einige Gestalten gleichbündiger Hyperboloide $F_{(p)}$, ihre Berührungskurven $\mathfrak{C}_{(p)}$ und Restschnitte $\mathfrak{C}'_{(p)}$ mit der Hydeschen Brennfläche (Fig. XI) verzeichnet; an den Hauptschnitten dieser Hyperboloide einerseits und den von ihnen eingehüllten (und nachträglich in roter Farbe beigefügten) Hauptschnitten der Brennfläche andererseits kann man deutlich ersehen, daß auch diese Hauptschnitte sich nur in auf $\mathfrak{C}_{(p)}$ gelegenen Punkten berühren und nur in Punkten auf $\mathfrak{C}'_{(p)}$ sonst noch durchsetzen.

Wächst p , so ändert sich das für $p_I < p < p_{III}$ reelle Hyperboloid $F_{(p)}$ im gleichbündigen System, wobei die Figur III mit ihren Kreisen $K_I K_{II} K_{III}$ uns die Halbachsen $a_I a_{II} a_{III}$ und ihre Veränderung zeigt; wir übersehen mit Hilfe unserer Figuren den stetigen Übergang der $F_{(p)}$, $\mathfrak{C}_{(p)}$, $\mathfrak{C}'_{(p)}$ in alle erreichbaren reellen Lagen und haben in der nebenstehenden Tabelle (S. 229) einige bemerkenswerte Einzelheiten erwähnt, wodurch die Vorstellung des stetigen Überganges erleichtert werden soll.

Wir merken noch die aus den Gleichungen (14) und (19) der Ellipsen $E(r)$ und $E(R)$ mit Bezug auf den vor Gleichung (15) stehenden ϱ -Wert sich ergebende Beziehung

$$4R^2 = (p_I^2 + p_{II}^2 + p_{III}^2 - \sqrt{p_{II} p_{III} + p_{III} p_I + p_I p_{II}}) + r^2$$

oder

$$(20) \quad 4R^2 = 3\varrho^2 + r^2$$

an zwischen den Radien R der Grenzpunktkugel und dem Radius r der Orthogonalpunktkugel bei jedem der gleichbündigen Hyperboloide

$p = p_I$	Imaginäres Ebenenpaar durch die X-Achse. Schmale, sich verbreiternde Röhre um die X-Achse.	Imaginär.	∞ kleines Doppeloval bei \mathcal{H} , \mathcal{H} an der X-Achse.
$\updownarrow p$ wächst $p = \frac{1}{2}(p_I + p_{II})$	Fig. IV. Maximalwert $p\overline{Z} = \frac{1}{2}d_1$ der Halbachse a_{II} . Der Hauptschnitt von $F^{(p)}$ in $x = 0$ eine gleichseitige Hyperbel.	Imaginär.	Kleino, wachsende Doppelovale um die x-Achse.
$\updownarrow p$ wächst $p = p_{II}$	Fig. V. Soll die Vorstellung des Überganges zum Ebenenpaar μ, ν erleichtern.	∞ kleines Doppeloval bei Z, Z an der Z-Achse.	In Fig. IV und auf der Brennfläche (Fig. XI) ersichtlich; von den folgenden Kurvengeometrien sind in XI nicht alle eingetragen.
$\updownarrow p$ wächst $p = \frac{1}{2}(p_I + p_{II} + p_{III})$	Fig. VI. Ebenenpaar μ, ν durch die y-Achse unter dem Winkel $\pm \omega$ gegen die XY-Ebene, dessen $\tan \omega = \tau$ hier als $\frac{1}{2}$ angenommen ist.	Nähert sich der Kreispaaargestalt $\mathcal{R}_I \mathcal{R}_{II}$ in Fig. VI und XI.	Nähert sich der Kreispaaargestalt $\mathcal{R}_I \mathcal{R}'_{II}$ in Fig. VI und XI.
$\updownarrow p$ wächst $p = \frac{1}{2}(p_I + p_{II} + p_{III})$	Fig. VII. Statt der früheren Röhren um die X-Achse von jetzt ab hyperboloidische Doppeltrichter um die Z-Achse.	$\mathcal{R}_I \mathcal{R}_{II}$ in Fig. VI und XI. Diese \mathcal{G} -Gestalt hat als einzige unter ihren Nachbarformen <i>reelle</i> Punkte mit der XY-Ebene gemein.	\mathcal{R}'_{II} in Fig. VI und XI.
$p = \frac{1}{2}(p_I + p_{II} + p_{III})$	Fig. VIII. Gleichseitiges Hyperboloid, einziges dieser Art im gleichbündigen System: F^q . Es durchsetzt die Brennfläche unter Berührung längs der Kuspidualkurve $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}'_q$.	\mathcal{G} rückt von obiger Kreispaaargestalt in Doppelovalform um die Z-Achse (immer noch bis Fig. IX) ab zur Gestalt \mathcal{G}_q .	Von obiger Kreispaaargestalt an sind die Doppelovale \mathcal{G}' , nicht mehr um die X-Achse, sondern um die Z-Achse geschlungen.
$p = \frac{1}{2}(p_I + p_{II})$	Fig. IX. Maximalwert $p\overline{H} = \frac{1}{2}d_2$ der Halbachse a_{II} . Der Hauptschnitt von $F^{(p)}$ in $y = 0$ eine gleichseitige Hyperbel.	\mathcal{G}_q Kuspidualkurve der Brennfläche (Fig. VIII und XI).	\mathcal{G}_q Kuspidualkurve der Brennfläche (Fig. VIII und XI).
$p = \frac{1}{2}(p_{II} + p_{III})$	Fig. X. Maximalwert $p\overline{Z} = \frac{1}{2}d_1$ der Halbachse a_I . Der Hauptschnitt von $F^{(p)}$ in $x = 0$ eine gleichseitige Hyperbel.	Von da ab nehmen die $\{\mathcal{G}'\}$ die früher von den $\{\mathcal{G}\}$ innegehabten Lagen in entgegengesetzter Reihenfolge an.	Übergangsform von \mathcal{G}_q zum Kreispaares $\mathcal{R}_I \mathcal{R}_{II}$.
$p = p_I - p_{II} + p_{III}$	Fig. XI. Hyperboloid (um die Z-Achse) durch das Kreispaar $\mathcal{R}_I \mathcal{R}_{II}$.	∞ kleines Doppeloval bei \mathcal{H} , \mathcal{H} an der X-Achse. Von da ab imaginär.	Übergangsform von \mathcal{G}_q zum Kreispaares $\mathcal{R}_I \mathcal{R}_{II}$.
$\updownarrow p$ wächst $p = p_{III}$	Immer enger um die Z-Achse sich anlegende Röhren. Imaginäres Ebenenpaar durch die Z-Achse.	Imaginär.	Kreispaar $\mathcal{R}_I \mathcal{R}_{II}$.
		Imaginär.	Immer enger um die Z-Achse sich schlingende Doppelovale.
		Imaginär.	∞ kleines Doppeloval bei Z, Z an der z-Achse.

mit Bezug auf den unveränderlichen Radius ρ (S. 221) der zur reellen Kupidalkurve \mathfrak{C}_ρ der Hydeschen Brennfläche gehörigen Kugel.

Der mit p veränderliche Radius R der Grenzpunktkugel eines jeden Hyperboloides F (Gleichung 1, 2)

$$\frac{x^2}{a_I^2} + \frac{y^2}{a_{II}^2} + \frac{z^2}{a_{III}^2} - 1 = 0$$

wird zufolge der Gleichungen (20) und (17) durch die Halbmesser a gemäß

$$(21) \quad 4R^2 = 2(a_I^2 + a_{II}^2 + a_{III}^2) - \left(\frac{a_{II}^2 a_{III}^2}{a_I^2} + \frac{a_{III}^2 a_I^2}{a_{II}^2} + \frac{a_I^2 a_{II}^2}{a_{III}^2} \right)$$

bestimmbar.

Die Halbachsenquadrate $(a_I^2)_\rho$, $(a_{II}^2)_\rho$, $(a_{III}^2)_\rho$ des Hyperboloides $F_\rho = F(\frac{1}{3}\sqrt{p_I + p_{II} + p_{III}})$, welches die durch ein beliebiges Hyperboloid schon bestimmte Hydesche Fläche entlang ihrer reellen Kupidalkurve $\mathfrak{C}_\rho = \mathfrak{C}'_\rho$ unter Berührung durchsetzt, sind

$$(a_I^2)_\rho = |[(p - p_{II})(p - p_{III})] - \frac{1}{9}(p_{III} + p_I - 2p_{II})(p_I + p_{II} - 2p_{III}), \\ (p = \frac{1}{3}\sqrt{p_I + p_{II} + p_{III}})$$

(vergl. Gleichung (7), (8))

$$(22) \quad (a_I^2)_\rho = \frac{1}{9}(d_1 - d_2)(d_1 - d_3),$$

wegen Gleichung (8) auch

$$= \frac{1}{9}(2d_1^2 - d_1 d_3 - d_3^2) = \frac{1}{9}(d_1^2 - \rho^2)$$

(vergl. Gleichung (15)) oder durch die e (Gleichung 13) ausgedrückt

$$= \frac{1}{9}(e_I^2 - e_{II}^2 - e_{III}^2 + d_1^2)$$

oder mit Rücksicht auf die letzte Gleichung und (16)

$$(23) \quad -\frac{1}{3}e_I^2 - \frac{2}{9}(e_I^2 + \frac{2}{3} + e_{III}^2), \\ = \frac{1}{3}e_I^2 + \frac{2}{3}\rho^2,$$

$$(24) \quad = \frac{1}{9}\frac{1}{e_I^2}(e_I^2 - e_{III}^2)(e_I^2 - e_{II}^2).$$

1) Die Gleichung (23) ist identisch mit der vorletzten Gleichung auf S. 801: $\alpha'_1 = \frac{1}{3}K_1^2 - \frac{2}{3}\sum K^2$ der erwähnten Abhandlung Waelschs. Unsere Gleichung (20) ist identisch mit der dortigen Gleichung (12) S. 799. Vgl. S. 232, Anm. 1

$(a_{II}^2)_\varrho$ und $(a_{III}^2)_\varrho$ ergeben sich hieraus durch cyklische Vertauschung der Indices. Halten wir mit diesen Gleichungen die folgenden aus (7) sich ergebenden zusammen (vgl. Gleichung 10)):

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1^2 - d_2 d_3 = \frac{1}{a_1^2} (a_1^2 - a_{III}^2)(a_1^2 - a_{II}^2) < 0 \\ e^2 - e_{II}^2 - d_3 d_1 = \frac{1}{a_{II}^2} (a_{II}^2 - a_1^2)(a_{II}^2 - a_{III}^2) > 0 \\ e_{III}^2 - d_1 d_2 = \frac{1}{a_{III}^2} (a_{III}^2 - a_{II}^2)(a_{III}^2 - a_1^2) < 0 \end{array} \right.$$

so ergibt sich der merkwürdige Umstand, daß die drei a_ϱ aus den e durch dieselben Gleichungen gewonnen werden, wie die e aus den a . Allerdings sind im Gegensatze zu den völlig freien Halbachsen a des (das System erst bestimmenden) Hyperboloides F die e schon der beschränkenden Bedingung (bei 16) $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_{II}^2} + \frac{1}{e_{III}^2} = 0$ unterworfen. Mit Rücksicht auf den erwähnten übereinstimmenden Gleichungsbau von (24) und (25) kann man u. a. aus dieser beschränkenden Bedingung sofort auf die Geltung von

$$(26) \quad \frac{1}{(a_1^2)_\varrho} + \frac{1}{(a_{II}^2)_\varrho} + \frac{1}{(a_{III}^2)_\varrho} = 0$$

schließen, ein Ergebnis, das übrigens auch sofort aus Gleichung (22) und (8) folgt.

Wie Gleichung (26) besagt, ist das Hyperboloid F_ϱ gleichseitig, d. h. absoluten Poldreiecken der unendlich fernen Ebene umschrieben. Es ist das einzige derartige Hyperboloid im gleichbündigen Systeme, da die unendlich fernen Kegelschnitte aller $F(p)$ (Gleichung (4)) zum Büschel

$$(p - p_I)x^2 + (p - p_{II})y^2 + (p - p_{III})z^2 = 0$$

gehören, was zu der Gleichseitigkeitsbedingung

$$(p - p_I) + (p - p_{II}) + (p - p_{III}) = 0$$

führt und daher

$$p = \frac{1}{3}(p_I + p_{II} + p_{III})$$

zur ausschließlichen Folge hat.

Wir drücken noch die Halbachsen a_ϱ und F_ϱ in unveränderlicher Weise durch die Halbachsen a eines beliebigen gleichbündigen Hyperboloides F (etwa mit der Benutzung der Gleichungen (22) und (7) oder (23) und (25)) aus:

$$(27) \quad (a_1^2)_\varrho = \frac{2}{3}a_1^2 + \frac{1}{3}\frac{a_{II}a_{III}}{a_1} - \frac{1}{9}\left[a_1^2 + a_{II}^2 + a_{III}^2 + 2\left(\frac{a_{II}^2a_{III}^2}{a_1^2} + \frac{a_{III}^2a_1^2}{a_{II}^2} + \frac{a_1^2a_{II}^2}{a_{III}^2}\right)\right]$$

$(a_{II}^2)_\rho$ und $(a_{III}^2)_\rho$ folgen hieraus durch cyklische Vertauschung der Indices.

Die Hydesche Brennfläche (6. Ordnung, 4. Klasse) hat als Einhüllende der gleichbündigen Hyperboloide $F(p)$ die aus Gleichung (1) oder $F(p) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial p} F(p) = 0$ (vgl. S. 220) folgende Gleichung¹⁾:

$$(28) \quad 4A_2^3 - A_1^3 A_3^2 - 18A_1 A_2 A_3 + 27A_2^3 + 4A_1^3 A_3 = 0,$$

wobei

$$A_1 = p_I + p_{II} + p_{III},$$

$$A_2 = x^2 + y^2 + s^2 + p_{II} p_{III} + p_{III} p_I + p_I p_{II},$$

$$A_3 = p_I x^2 + p_{II} y^2 + p_{III} s^2 + p_I p_{II} p_{III}$$

gesetzt ist.

Da es an der Hydeschen Fläche nichts ändert²⁾, wenn wir $p_{II} = 0$ nehmen und dementsprechend statt p_I und p_{III} zu schreiben haben $-d_3$ und d_1 , so daß für A_1, A_2, A_3 zu setzen ist

$$(d_1 - d_3), \quad (x^2 + y^2 + s^2 - d_3 d_1 = u \text{ in Hydes Bezeichnung}),$$

$$(-d_3 x^2 + d_1 s^2 = -v \text{ in Hydes Bezeichnung}),$$

erhalten wir die Gleichungsform:

$$(29) \quad 4u^3 - (d_3 - d_1)^2 u^2 - 18(d_3 - d_1)uv + 27v^3 + 4(d_3 - d_1)^3 v = 0,$$

wobei

$$u = x^2 + y^2 + s^2 - d_3 d_1$$

und

$$v = d_3 x^2 - d_1 s^2.$$

1) Vgl. etwa Gr. S. 101 im 48. Band dieser Zeitschrift, insbesondere aber die oben angeführten Abhandlungen Hydes und Waelschs. Ersterer schreibt an Stelle der von uns beibehaltenen Bezeichnungen

$$p, p_I, p_{II}, p_{III}; \quad A_1, A_2, A_3; \quad e_I, e_{II}, e_{III};$$

bezl.

$$\mu, -a_1, -a_2, -a_3; \quad -\sum a, u, -v; \quad x_0, y_0, s_0;$$

die d bleiben; letzterer schreibt μ statt p , $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ für $a_1^2 a_2^2 a_3^2$; α'_1 etc. für $(a_1^2)_\rho$; K_1 für e_I etc.

Desmoulin (l. c. S. 86) benutzt die aus dem Cylinderbilde (S. 224, $x^2 = X$ etc.) ableitbare Darstellung der Brennfläche durch zwei Parameter, deren einer, unserem p entsprechend, längs der Kurven \mathcal{C} (Gleichung (11)) der Brennfläche konstant ist, während der andere unverändert bleibt in den oberen Schnitten $s = \text{const}$.

2) Vgl. 3 (Anm. 2). $A_2 = -F(0) = 0$ ist die Gleichung jenes im gleichbündigen Systeme — was die Achsenkongruenz und die Hydesche Fläche anbelangt — beliebigen Hyperboloides $F(0)$, dessen willkürlicher Parameter als Null angenommen wird; $A_3 = 0$ (vgl. Gleichung (14)) ist die Gleichung der Orthogonalpunktkugel von $F(0)$.

Hierbei ist $u = 0$ die Gleichung der Orthogonalpunktkugel (über MN als Durchmesser, vgl. S. 212 und Gleichung (10)) des Ebenenpaares μ, ν mit der Gleichung $v = 0$.

Eine andere bemerkenswert einfache Form der Hydeschen Flächen-gleichung erhält man mit Bezug auf die Orthogonalpunkts- und Grenz-punktskugel $x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0$ des gleichseitigen Hyperboloides $F_\varrho = F(\frac{1}{3}p_I + p_{II} + p_{III})$ (vgl. Gleichung 22)

$$(30) \quad \begin{aligned} F_\varrho &= \frac{1}{3}(d_3 - d_2)x^2 + \frac{1}{3}(d_1 - d_3)y^2 + \frac{1}{3}(d_2 - d_1)z^2 \\ &+ \frac{1}{27}(d_3 - d_2)(d_1 - d_3)(d_2 - d_1) = 0, \end{aligned}$$

indem man nicht wie oben p_{II} , sondern den zu F_ϱ gehörigen Parameter $\frac{1}{3}(p_I + p_{II} + p_{III}) = 0$ setzt, was die Substitutionen (vgl. Gleichung 7, 8)

$$p_I = -(p_{II} + p_{III}) = d_3 - d_2 - 2p_I \text{ etc.}$$

$$p_I = \frac{1}{3}(d_3 - d_2), \quad p_{II} = \frac{1}{3}(d_3 - d_1), \quad p_{III} = \frac{1}{3}(d_1 - d_2)$$

also in der Gleichung 28...

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2$$

$$A_3 = -F_\varrho$$

(aus Gleichung 30) zur Folge hat. Deshalb erhält man die Gleichung der Hydeschen Fläche in der Form:

$$4(x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2)^3 + 27F_\varrho^3 = 0$$

oder

$$\left(\begin{aligned} &4(x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2)^3 \\ &+ 3[(d_3 - d_2)x^2 + (d_1 - d_3)y^2 + (d_2 - d_1)z^2 + \frac{1}{27}(d_3 - d_2)(d_1 - d_3)(d_2 - d_1)]^3 = 0 \end{aligned} \right) \quad \left. \begin{aligned} \text{wobei} \quad &6\rho^3 = d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 \quad \text{und} \quad d_1 + d_2 + d_3 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Diese Gleichungsform ist wegen Gleichung (22) übereinstimmend mit der von Waelsch gegebenen Gestalt, in welche als Konstante nur die 3 Halbachsen des einzigen gleichseitigen unter den gleichbündigen Hyperboloiden des F_ϱ auftreten:

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} &4(x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{(a_I^2)_\varrho + (a_{II}^2)_\varrho + (a_{III}^2)_\varrho})^3 \\ &- 27(a_I^2)_\varrho (a_{II}^2)_\varrho (a_{III}^2)_\varrho \left(\frac{x^2}{(a_I^2)_\varrho} + \frac{y^2}{(a_{II}^2)_\varrho} + \frac{z^2}{(a_{III}^2)_\varrho} - 1 \right)^3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \text{wobei} \quad &\frac{1}{(a_I^2)_\varrho} + \frac{1}{(a_{II}^2)_\varrho} + \frac{1}{(a_{III}^2)_\varrho} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Auf der Brennfläche liegen von den koncyklischen sphärischen Kegelschnitten \mathcal{C} unseres Systems (Gleichung 11) alle jene, durch welche drei gleichbündige Hyperboloide $F_{(p)}$ gehen, von denen zwei zusammenfallen: Bei jedem Punkte w „außerhalb“ der Brennfläche (z. B. bei allen weiter als um ρ vom Anfange p entfernten Punkten) und überhaupt bei den solche Punkte w enthaltenden \mathcal{C} ist von den drei hindurchgehenden gleichbündigen Hyperboloiden nur eines reell; dagegen führen durch jeden Punkt w „innerhalb“ der Brennfläche (Fig. XI), d. i. innerhalb des von der Brennfläche begrenzten Raumteiles drei reelle gleichbündige Hyperboloide.

Alle drei fallen nur zusammen, wenn wir den reellen Punkt w auf der reellen Kuspalkurve \mathcal{C}_ρ , der Orthogonalpunkts- und Grenzpunktskurve des gleichseitigen Hyperboloides F_ρ annehmen.

Der absolute Kugelkreis ist ebenfalls eine (imaginäre) Kuspalkurve der Brennfläche mit der unendlich fernen Ebene als Ort der Spitzentangenten. Die Fläche hat ferner in den Punkten M, N der Y -Achse mit den Koordinaten $\pm e = \pm e_{II} = \pm \sqrt{d_3 d_1}$ reelle Knotenpunkte mit reellen Tangentialkegeln 2. Ordnung und genau entsprechende imaginäre Singularitäten in den imaginären Punkten $\pm e_I$ der X -, und $\pm e_{III}$ der Z -Achse.

Die durch die Y -Achse gehenden reellen μ, ν der Kreise $\mathcal{R}_I, \mathcal{R}_{II}$ über M, N als Durchmesser (Fig. VI) sind singuläre Ebenen der Hydeschen Fläche und analoge imaginäre Ebenenpaare gehen durch die X - und Z -Achse; die unendlich ferne Ebene durchsetzt die Fläche unter Berührung entlang der imaginären Kuspalkurve, nämlich des absoluten Kugelkreises.

Die Gleichungen der beiden Tangentialkegel in den Knotenpunkten M und N ergeben sich durch vorübergehende Verlegung des Anfangspunktes in einen solchen Punkt und Berücksichtigung der Glieder niederster Dimension¹⁾ aus der Gleichung (29) als

$$(33) \quad (d_3 - d_1)(d_3 x^2 - d_1 z^2) - d_3 d_1 (y \mp \sqrt{d_3 d_1})^2 = 0$$

diese Kegel, welche die Doppelpunktstangenten

$$(34) \quad y = \pm z \sqrt{\frac{d_1 - d_3}{d_3}} \pm \sqrt{d_3 d_1}$$

des in Fig. XII a konstruierten (und von da nach Fig. XI und in die früheren Figuren übertragenen) Hauptschnittes in der YZ -Ebene liefern, zeigen uns auch, auf welche Art sich die \mathcal{C} der

1) Vgl. Hyde p. 184 Gleichung (12).

Brennfläche in der Nähe ihrer Kreispaaargestalt $\mathfrak{R}_I, \mathfrak{R}_{II}$ (der Fig. XI und VI) ändern, was deshalb besonders interessant ist, weil diese Gestalt der \mathfrak{C} unter ihren unendlich benachbarten Formen auf der Brennfläche die einzige ist, welche mit der $X\ Y$ -Ebene reelle Punkte, nämlich gerade die Knotenpunkte M und N gemein hat. Die in der unmittelbaren Nachbarschaft eines solchen Knotenpunktes gelegenen Teile dieser \mathfrak{C} der Brennfläche ändern sich nämlich wie die diesen Punkten unendlich benachbarten Teile der Schnitthyperbel des Tangentialkegels mit Ebenen, welche stets zur Y -Achse senkrecht belassen und hierbei durch den betreffenden Knoten verschoben werden.

Von den Spitzen aller ebenen Schnitte der Hydeschen Fläche liegen 4 auf \mathfrak{C}_q und haben dort die durch die Spur von F_q bestimmte Spitzentangente; zwei imaginäre mit unendlich ferner Spitzentangente liegen in den Kreispunkten.

Eine allgemeine Eigenschaft der ebenen Schnitte durch den Mittelpunkt p wurde S. 216 erwähnt. Insbesondere die drei Hauptschnitte der Fläche (Fig. XIIa, b, c) haben auf jeder ihrer beiden Symmetrieachsen 2 Doppelpunkte, weshalb ihre Klasse nach der Plückerschen Formel gemäß Ordnungszahl 6, der Spitzenzahl 6 und der Doppelpunktszahl 4

$$6 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 4$$

wird, was mit der Klassenzahl des der Fläche entlang eines Hauptschnittes umschriebenen Cylinders und der Klassenzahl 4 der Fläche selbst¹⁾ übereinstimmt.

Da die unendlich ferne Gerade in jeder Ebene als Tangente in zwei Spitzen für zwei Tangenten durch einen beliebigen unendlich fernen Punkt dieser Ebene zählt, gibt es an jedem der drei Hauptschnitte im Endlichen nur *zwei* Tangenten von jeder beliebigen Richtung in seiner Ebene; die Konstruktion zweier solcher Tangenten samt ihren Berührungspunkten wird sich unmittelbar aus der in der Folge von uns angegebenen kinematischen Hauptschnittkonstruktion (Fig. XIII) ableiten lassen. Indessen können wir auf Grund des bisher Entwickelten, ohne vorgreifen zu müssen, uns nicht bloß die Hauptschnitte, sondern beliebige, z. B. ebene Schnitte der Hydeschen Brennfläche durch beliebig viele Punkte samt deren Tangenten konstruieren als Einhüllende der Spuren der entlang $\mathfrak{C}(p)$ gelegenen schmalen Flächenstreifen der gleichbündigen Hyperboloide $F(p)$; so z. B. liefern in den Figuren XII a, b, c die auf der Orthogonalpunktskugel gelegenen Kreise vom Radius $r(p)$ bez. jene vom Radius $R(p)$ auf der Spur von $F(p)$ die Spurpunkte

1) Vgl. z. B. Gr. S. 101 im 48. Bd. Anm. 1.

von $\mathfrak{C}(p)$ bez. $\mathfrak{C}'(p)$, also Punkte des Hauptschnittes, und die Hauptschnitttangente der Hydeschen Fläche in jedem Spurpunkte von $\mathfrak{C}(p)$ ist die Tangente der Hyperboloidspur $F(p)$, während die Tangenten in den Spurpunkten von $\mathfrak{C}'(p)$ ebenso durch die Spur des Hyperboloides $F(p')$ erhalten werden könnten, welches (Gleichung 18) zu $p' = \frac{1}{2}(-p + p_I + p_{II} + p_{III})$ gehört. Lassen wir p sich ändern, so erhalten wir beliebig viele Punkte des Schnittes der Hydeschen Fläche samt ihren Tangenten.

Die folgende *kinematische Konstruktion* der Hauptschnitte der Hydeschen Brennfläche beruht auf der von uns gefundenen Parameterdarstellung jedes der drei Hauptschnitte; der zweite Hauptschnitt in der Ebene $y = 0$ z. B. hat gemäß Gleichung (29), wenn wir die Haupthalbmesser der Hydeschen Fläche mit l_1, l_2, l_3 bezeichnen, d. h.

$$(35) \quad \frac{1}{2}d_1 = l_1, \quad \frac{1}{2}d_2 = l_2, \quad \frac{1}{2}d_3 = l_3$$

setzen, (wobei die Gleichung (8) die Beziehung

$$(36) \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0$$

als Folge nach sich zieht) die Gleichung:

$$(37) \quad \begin{aligned} & (x^2 + s^2 - 4l_3^2 l_1)^2 - (l_3 - l_1)^2 (x^2 + s^2 - 4l_3 l_1)^2 \\ & - 18(l_3 - l_1)(x^2 + s^2 - 4l_3 l_1)(l_3 x^2 - l_1 s^2) \\ & + 27(l_3 x^2 - l_1 s^2)^2 + 16(l_3 - l_1)^2 (l_3 x^2 - l_1 s^2) = 0, \end{aligned}$$

für welche wir die Parameterdarstellung

$$(37') \quad \begin{cases} x = (l_1 + l_3) \cos \alpha - (l_3 \cos^2 \alpha - l_1 \sin^2 \alpha) \cos \alpha \\ s = (l_1 + l_3) \sin \alpha + (l_3 \cos^2 \alpha - l_1 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \end{cases}$$

anzugeben im stande sind. Davon, daß diese Darstellung zutrifft, kann man sich durch die Rechnung¹⁾ überzeugen.

1) Aus 37' stellen sich folgende Funktionen u und v rational durch einen Parameter s dar:

$$u = x^2 + s^2 - 4l_1 l_3 = (l_3 - l_1)^2 - 2(l_3 + l_1)s \cos 2\alpha + s^2, \text{ wobei}$$

$s = l_3 \cos^2 \alpha - l_1 \sin^2 \alpha$ gesetzt ist.

(Bezügl. der geom. Bedeutung von s in der folgenden kinem. Konstr. vergl. Fig. XIII und S. 239: $s = \overline{CP}$)

$$\begin{aligned} 2s &= (l_3 - l_1) + (l_3 + l_1) \cos 2\alpha \\ u &= (l_3 - l_1)^2 + 2(l_3 - l_1)s - 3s^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Der Parameterdarstellung 37' und den analogen der anderen Hauptschnitte stellen wir als geometrische Deutung die folgende kinematische Konstruktion der Hydeschen Hauptschnitte an die Seite, wobei wir (zum nachherigen Beweise der Übereinstimmung mit 37') den 2. Hauptschnitt nur deshalb bevorzugen, um einen bestimmten Fall (Fig. XIII) vor Augen zu haben.

Ebenso folgt

$$\frac{v}{2} = l_2 x^2 - l_1 z^2 = (l_2 + l_1)s^2 - 2(l_2 + l_1)s(l_2 \cos^2 \alpha + l_1 \sin^2 \alpha) + s^2; \text{ nun ist}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s + l_1 = (l_2 + l_1) \cos^2 \alpha \\ s - l_2 = -(l_2 + l_1) \sin^2 \alpha \end{array} \right\} \text{ mithin}$$

$$(l_2 \cos^2 \alpha + l_1 \sin^2 \alpha) = l_2 \frac{s + l_1}{l_2 + l_1} - l_1 \frac{s - l_2}{l_2 + l_1} = \frac{2l_2 l_1 + (l_2 - l_1)s}{l_2 + l_1}; \text{ also}$$

$$\frac{v}{2} = (l_2 + l_1)s^2 + s^2 - 2s[2l_2 l_1 + (l_2 - l_1)s] = s[s - (l_2 - l_1)]^2. \quad (b)$$

Zur Elimination von s aus (a) und (b) haben wir etwa nach (a)

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{8}(l_2 - l_1 \pm \sqrt{4(l_2 - l_1)^2 - 3u}) \\ s - (l_2 - l_1) = \frac{1}{8}[-2(l_2 - l_1) \pm \sqrt{4(l_2 - l_1)^2 - 3u}] \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} [s - (l_2 - l_1)]^2 &= \frac{4}{9}(l_2 - l_1)^2 \mp \frac{4}{9}(l_2 - l_1)\sqrt{4(l_2 - l_1)^2 - 3u} + \frac{1}{9}[4(l_2 - l_1)^2 - 3u] \\ &= \frac{1}{9}[8(l_2 - l_1)^2 - 3u] \mp \frac{4}{9}(l_2 - l_1)\sqrt{4(l_2 - l_1)^2 - 3u}; \end{aligned}$$

dies in (b) gibt

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{27}(l_2 - l_1)[8(l_2 - l_1)^2 - 3u] - \frac{8}{27}(l_2 - l_1)[4(l_2 - l_1)^2 - 3u] \\ &\quad \pm \left\{ \frac{2}{27}[8(l_2 - l_1)^2 - 3u] - \frac{8}{27}(l_2 - l_1)^2 \right\} \sqrt{4(l_2 - l_1)^2 - 3u} \\ \left\{ v - \frac{2}{27}(l_2 - l_1)[-8(l_2 - l_1)^2 + 9u] \right\}^2 &= \frac{1}{27^2}[8(l_2 - l_1)^2 - 6u]^2 [4(l_2 - l_1)^2 - 3u] \\ &= \frac{4}{27^2}[4(l_2 - l_1)^2 - 3u]^3 \\ \left\{ v - \frac{2}{3}(l_2 - l_1)u + \frac{16}{27}(l_2 - l_1)^2 \right\}^2 & \\ - \frac{4}{27^2} \{ 64(l_2 - l_1)^6 - 3 \cdot 4^3 \cdot 3(l_2 - l_1)^4 u + 3 \cdot 4 \cdot 3^3(l_2 - l_1)^2 u^2 - 27u^3 \} &= 0 \\ \frac{4}{27}u^3 - \frac{4}{27}(l_2 - l_1)^2 u^2 + v^2 - \frac{36}{27}(l_2 - l_1)uv + \frac{32}{27}(l_2 - l_1)^2 v &= 0 \\ 4u^3 - 4(l_2 - l_1)^2 u^2 + 27v^2 - 36(l_2 - l_1)uv + 32(l_2 - l_1)^2 v &= 0, \end{aligned}$$

d. h. wir erhalten wirklich, indem wir für u und v ihre obigen Werte $x^2 + z^2 - l_1 l_2$ und $2(l_2 x^2 - l_1 z^2)$ einsetzen, die Gleichung (37) des 2. Hauptschnittes.

„Auf einer Strecke konstanter Länge ($l_1 + l_2$) denke man sich drei Punkte vermerkt, nämlich 1. den Anfangspunkt, 2. den von ihm um l_1 entfernten Punkt und 3. den Endpunkt; bezeichnet man diese drei Punkte der Reihe nach mit

$I, O, III \dots$ (Gleitstück zur Konstruktion des II. Hauptschnittes in Fig. XIII),
 $O, I, II \dots$ („ „ „ „ III „ bei „ „),
 $II, III, O \dots$ („ „ „ „ I „ „ „ „),

und denkt sich von jeder solchen Strecke, dem „Gleitstück“ des betreffenden Hauptschnittes, eine zu ihm senkrechte und in der Hauptschnittsebene verbleibende Gerade t starr mitgeführt, so umhüllt t den betreffenden Hydeschen Hauptschnitt, falls der Punkt

III des Gleitstückes gezwungen wird, auf der Spur der Ebene $s = 0$

I „ „ „ „ „ „ „ „ „ $x = 0$
 II „ „ „ „ „ „ „ „ „ $y = 0$

zu gleiten.“

Mit anderen Worten: „Zur Konstruktion des

II. Hauptschnittes gleite das zugehörige Gleitstück $IOIII$ mit III auf der X -, und mit I auf der Z -Achse,

III. Hauptschnittes gleite das zugehörige Gleitstück $OIII$ mit I auf der Y -, und mit II auf der X -Achse,

I. Hauptschnittes gleite das zugehörige Gleitstück $IIIII O$ mit II auf der Z -, und mit III auf der Y -Achse;

dann umhüllt die senkrecht zum Gleitstücke in O befestigte und in der betreffenden Hauptschnittsebene mitgeführte Gerade t den Hydeschen Hauptschnitt; oder, was dasselbe ist, es nimmt die durch O zum Gleitstücke senkrecht angebrachte Ebene der Reihe nach alle Lagen der Tangentialebene der Hydeschen Fläche in den Punkten dieses Hauptschnittes an.“

In der Tat, bezeichnen wir in der Fig. XIII den Winkel des Gleitstückes und der x -Achse mit α und denken uns zu einer beliebigen Lage des Gleitstückes $IIII$ das Momentanzentrum C als Schnitt des Lotes durch III zur x -Achse und des Lotes durch I zur s -Achse konstruiert, so wird der Fußpunkt $P = P(x, s)$ des von C auf t gefällten Lotes die Stelle angeben, in welcher t die von ihr umhüllte Kurve berührt; die Gleichung der letzteren ergibt sich daraus, daß in der Figur XIII

$$\overline{pIII} = (l_1 + l_2) \cos \alpha, \quad \overline{IIIC} = (l_1 + l_2) \sin \alpha,$$

also

$$\overline{CP} = \overline{QP} - \overline{QC} = l_2 - \overline{IIIC} \sin \alpha = l_2 - (l_1 + l_2) \sin^2 \alpha = (l_2 \cos^2 \alpha - l_1 \sin^2 \alpha)$$

und demgemäß

$$x = \overline{pIII} - \overline{CP} \cos \alpha, \quad s = \overline{IIIC} + \overline{CP} \sin \alpha,$$

daher wirklich

$$x = (l_1 + l_3) \cos \alpha - (l_2 \cos^2 \alpha - l_1 \sin^2 \alpha) \cos \alpha, \quad s = (l_1 + l_3) \sin \alpha \\ + (l_2 \cos^2 \alpha - l_1 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

wird, in vollster Übereinstimmung mit der Form 37' der Hauptschnittsgleichung 37.

Eine andere, allerdings *nur* für den II. Hauptabschnitt der Hydeschen Fläche *reelle* Konstruktion ist noch hervorzuheben:

Die Koordinaten der von uns mit 3 und 1 zu bezeichnenden Schnittpunkte der starr am Gleitstücke *IIII* in *O* angebrachten Geraden *t* ($x \cos \alpha - s \sin \alpha = l_1 \cos^2 \alpha - l_3 \sin^2 \alpha$) mit dem um das Rechteck *pIIICI* der Figur XIII beschriebenen Kreise ($x \cos \alpha + s \sin \alpha = \frac{x^2 + s^2}{l_1 + l_3}$)

genügen der Gleichung der beiden festen unter dem Winkel $\pm \omega = \arctg \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$ gegen die *X*-Achse gelegten und den II. Hauptschnitt in den Entfernungen $\pm e_{II} = \pm e = \pm \sqrt{d_3 d_1} = \pm 2\sqrt{l_3 l_1}$ vom Anfange berührenden Spuren

$$x^2 l_3 - s^2 l_1 = 0$$

der cyklichen Ebenen μ und ν ; daher *liegen* und *bleiben* die auf *t* starr gedachten Punkte 3 und 1 bei jeder starren Elementarbewegung des Gleitstückes *IIII* um jedes Momentanzentrum *C* (da *C3* stets zu μ , *C1* zu ν senkrecht steht) *fortwährend* Punkte dieser beiden Spuren. Die hiernach konstante Länge der Strecke $\overline{31}$ ist, wie man aus ihrer Speziallage entweder in μ oder ν oder parallel zu einer der beiden Hauptachsen ersehen kann, gleich $e_{II} = 2\sqrt{l_3 l_1}$.

Dies führt zur interessanten Konstruktion des II. Hauptschnittes als *Envelope einer Geraden t*, deren *konstantes Stück von der Länge* $e_{II} (= 2\sqrt{l_3 l_1} = 2 \times \overline{O3} = 2 \times \overline{O1})$ mit seinen Endpunkten (3 und 1) auf den Spuren der Ebenen μ und ν gleitet. Diese Spuren werden zu (vom Mittelpunkt *p* ausgehenden) reellen *Doppeltangenten* des *Hauptschnittes*, welcher hienach als „*schiefe Astrois*“ bezeichnet werden könnte.¹⁾

1) Vgl. Gino Loria „Spezielle ebene Kurven“, S. 224 Fig. 57a in der 1902 bei Teubner, Leipzig, erschienen deutschen Ausgabe. Den Namen einer „*schiefen Astrois*“ auch auf den mit zwei reellen Doppelpunkten versehenen I. Hauptschnitt anzuwenden, dürfte *vielleicht*, ihn aber auch noch auf den ovalen und nicht mit reellen Spitzen versehenen III. Hauptschnitt mit seinen isolierten Punkten *M* und *N* anzuwenden, dürfte schwerlich *Anklang finden*, obgleich für diese Haupt-

Besondere Fälle.

Von besonderen Fällen sind nur zwei hervorzuheben, jener bei welchem $d_2 = d_1$, und der andere, bei dem $d_2 = 0$ wird.

1.

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 \\ \left(\begin{array}{l} l_2 = l_1, \quad e = \pm d_1 = \mp \frac{1}{2} d_2 = \mp l_2 \\ \overline{pZ} = p\mathfrak{L}, \quad \overline{pM} = \overline{pN} = pH \end{array} \right). \end{aligned}$$

Die zyklischen Ebenen μ , ν werden Winkelhalbierende der durch die y -Achse gelegten Koordinatenebenen und stellen selbst neue Symmetrieebenen vor und zwar sowohl für die bezüglich μ und ν konzyklischen Kurven \mathfrak{C} , als auch für die Parameterfläche (\mathfrak{P}), die Waelschischen einander ergänzenden Achsenkongruenzen K (\mathfrak{f}) des Schraubenbündels und deren Hydeseche Brennfläche; letztere wird zur

Sternballfläche Hydes:

$$(x^2 + y^2 + s^2 - 4l_1)^2 + 27l_1^2(x^2 + s^2) = 0. \quad (\text{Fig. XIV.})$$

Die Knotenpunkte M und N sind in die Scheitelpunkte $H = H_\beta$ der y -Achse $(0, \mp l_2, 0)$ gertickt, ihre Tangentialkegel (Gleichung 33) fallen als doppelt zu zählende Ebenen mit der beim betreffenden Scheitel H_β ohnedies zu $y = 0$ parallelen Tangentialebene zusammen und diese Hydeseche Fläche hat in diesen H_β dreifache singuläre Punkte eigener Art:

Während jede Gerade durch einen solchen Punkt bei demselben 3 Punkte mit der Fläche gemein hat, haben die in der zugehörigen Tangentialebene ($y = \mp l_2$) liegenden Strahlen durch H_β 4 Punkte mit der Fläche gemeinsam, ja sogar zwei von diesen Strahlen der Tangentialebene, nämlich die in die neuen Symmetrieebenen μ , ν ($s \mp x = 0$) fallenden Geraden

$$f_1, \varphi_1 \text{ durch den Punkt } M(y = -l_2, \quad s \pm x = 0)$$

$$f_2, \varphi_2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad N(y = +l_2, \quad s \mp x = 0)$$

schnittgestalten nicht bloß die früher von uns angegebene stets reelle Konstruktion, sondern auch jene der eben beschriebenen analoge gilt, nämlich als Enveloppe einer Gleitstrecke konstanter Länge (e_I , bzw. e_{III}), deren (nicht reelle) Endpunkte auf den Spuren der zu μ und ν analogen (bei der Hydesechen Fläche als singulär auftretenden und durch die X -, bzw. Z -Achse gelegten) imaginären Ebenenpaare gleiten. Die Bezeichnung als „Parastroiden“ (Parallelkurven einer regulären Astrois, G. Loria S. 651) ist für alle drei Hauptschnittgestalten zu empfehlen.

haben sechs zusammenfallende Punkte an dieser Stelle mit der Fläche gemein, also sonst überhaupt keinen weiteren mehr. Diese ausgezeichneten Geraden f_1, φ_1 durch M und f_2, φ_2 durch N sind nach unseren Entwicklungen die gemeinsamen Fokalachsen aller gleichbündigen Hyperboloide $F(\varphi)$, deren cyklische Ebenen μ, ν sind, und wir können den Hydeschen Sternball definieren als Hüllfläche jener Hyperboloide $F(\varphi)$, welche 1. die in zwei parallelen Ebenen liegenden 4 Geraden, welche die Spuren eines zu beiden Ebenen und untereinander senkrechten Ebenenpaares μ, ν bilden, zu gemeinsamen Fokalachsen haben und 2. durch die Kreispunkte von μ und ν hindurchgehen.

Die Knoten H_β sind in ihrer Tangentialebene ($y = \mp l_2$) isoliert und die einzigen reellen Punkte der Schnittkurve dieser Tangentialebene mit der Fläche. H_β ist hierbei vierfacher Punkt dieser Schnittkurve, wobei dessen vier Tangenten paarweise in den Spuren f und φ von μ und ν zusammenfallen; sowohl f als φ sind Grenzlagen von Tangenten zweier zusammengedrückter Spitzen; die reelle *Kuspidalkurve* \mathcal{C}_β des Hydeschen Sternballes besteht nämlich aus den beiden Kreisen \mathcal{K} der Ebenen μ, ν über MN als Durchmesser, wobei μ und ν den Ort der Spitzentangente bilden; denken wir uns also eine Ebene $y = \text{const.}$ der Lage der Tangentialebene ($y = \mp l_2$) in einem Punkte H_β (M oder N) genähert, so kann man sich deutlich vorstellen, wie in ihm zwei Spitzen, nämlich die Spurpunkte eines der beiden Kreise \mathcal{K} (mit der Spitzentangente in μ , welche später zu f wird), und ebenso zwei andere Spitzen, die Spurpunkte des anderen Kreises \mathcal{K} (mit der Spitzentangente in ν , welche später zu φ wird) zusammenrücken.

Der II. Hauptschnitt des Sternballes, infolge der Spezialisierung $l_2 = l_1$ darstellbar durch:

$$\begin{cases} x = l_1 \cos \alpha (3 - 2 \cos^2 \alpha) \\ s = l_1 \sin \alpha (3 - 2 \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

(aus Gleichung (37')) läßt in dem gegen x, s um 45° gedrehten Koordinatensysteme mit den Achsen ξ und ζ in den Spurenlagen von μ, ν entsprechend:

$$\begin{cases} x = \frac{\xi + \zeta}{\sqrt{2}} \\ s = \frac{-\xi + \zeta}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

bei Einführung des Winkels $\alpha' = 45^\circ + \alpha$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha' + \cos \alpha') \\ \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha' - \cos \alpha') \end{cases}$$

auch die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} \xi = 2l_1 \cos^3 \alpha' \\ \zeta = 2l_1 \sin^3 \alpha' \end{cases}$$

zu, ist also die *reguläre Astrois*

$$\xi^{\frac{2}{3}} + \zeta^{\frac{2}{3}} = (2l_1)^{\frac{2}{3}}.$$

Diese Astrois kann bekanntlich auch als Einhüllende einer Strecke $\overline{31}$ konstanter Länge $(\pm 2l_1 = \mp l_2)$ erzeugt werden, deren Endpunkte 3 und 1 bezüglich auf der ξ - und ζ -Achse gleiten, wie auch in der Fig. XV b angedeutet wurde; α' ist hierbei der veränderliche Winkel dieser Strecke mit der ξ -Achse.

Der I. und der diesem kongruente III. Hauptschnitt der Hydeschen Sternballfläche (Fig. XV a = XIV c, durch Spezialisierung $(l_2 = l_1)$ der auf S. 238 gefundenen Konstruktion ermittelt) ist ein zweifach symmetrisches Oval, dessen auf die y -Achse fallende Hauptachse MN doppelt so groß ist als die andere; dieses Oval ist besonders wegen seines Verhaltens in seinen Hauptscheiteln H_β , den dreifachen Punkten M und N interessant. In diesen H_β hat jede beliebige durchgelegte Gerade der Hauptschnittebene drei Punkte mit dem Ovale gemein außer der zur Y -Achse senkrechten Tangente, welcher vier solche Punkte in H_β znkommen.

Die bei diesen H_β auftretende Singularität¹⁾ stellt den Übergang her zwischen den Formen Fig. XII a des I. Hauptschnittes und Fig. XII c des III. Hauptschnittes der Hydeschen Brennfläche vom allgemeinen Typus Fig. XI; in den H_β der Fig. XIV a c sind zwei Spitzen und ein Doppelpunkt auf jene eigentümliche Weise zusammengerückt, welche wir dort skizziert haben; denkt man sich dieses Hauptschnittoval des Hydeschen Sternballes durch einen wandernden Punkt erzeugt, so darf man die Vorstellung annehmen, daß derselbe bei jedem der Hauptscheitel H_β erst weiter wandere, nachdem er ein unendlich kleines Stück zurückgekehrt war.

Denkt man sich die obigen Hauptschnitte als Leitlinien von (bezüglich μ und ν) koncyklischen Kurven \mathbb{C} , so geben diese auf der Fläche stetig in einander übergehenden Kurven ein plastisches Bild des Hydeschen Sternballes mit seinem reellen Kreispaares \mathbb{K} als Kupidalkurve.

1) Vgl. in Salmon-Fiedlers Raumgeometrie II (1880) die bei β in Artikel 502 beschriebenen und auch in Artikel 513 erwähnten besonderen Singularitäten.

Alle Sternballflächen sind einander ähnlich. Dasselbe gilt auch von den Hydeschen Rotationsflächen, auf welche wir nunmehr stoßen werden, wenn wir den Sonderfall $d_3 = 0$ untersuchen, welcher sich vom Falle $d_1 = 0$ nur durch die vertauschte Bezeichnung der Z - und X -Achse unterscheidet.

2.

$$d_3 = 0$$

$$(p_I - p_{II}, \quad l_2 = 0, \quad l_1 = -l_2, \quad e = 0, \quad Z = M = N = p).$$

In diesem Falle treten die cyklischen Ebenen μ, ν in $s = 0$ zusammen, die koncyklischen Kurven \mathfrak{C} werden Kreispaaire um die Z -Achse und alle gleichbündigen einschaligen Hyperboloide $F(p)$ Drehungsflächen um die Z -Achse, wobei jeder Drehungskegel um die Z -Achse einmal für ein bestimmtes $F(p)$ als Leitkegel auftritt; die einander ergänzenden Kongruenzen $K\left(\frac{g}{I}\right)$ Waelschs kann man durch Drehung der Erzeugenden des Plückerschen Cylindroides¹⁾:

$$(x^2 + s^2)y \mp 2l_1xs = 0$$

(des Achsenortes eines im Bündel R_{III} enthaltenen Schraubenbüschels R_{II}) um die Z -Achse, eine seiner beiden sich im Hauptpunkte p senkrecht schneidenden Kanten gewinnen.

Hierbei ist zu bemerken, daß die unter einem *größeren* Winkel als 45° gegen die xy -Ebene geneigten Cylindroidkanten jene gleichbündigen Hyperboloide beschreiben, welche die sich ergebende Brennfläche, die *Hydesche Drehungsfläche*: (Fig. XV)

$$(x^2 + y^2 + s^2)^3 - l_1^2(x^2 + y^2 + s^2)^2 - 18l_1^2(x^2 + y^2 + s^2)s^2 + 27l_1^2s^4 + 16l_1^4s^2 = 0$$

(aus Gleichung (29), $d_1 = 2l_1$) in *imaginären* Kreispaairen berühren. Dies kann man unseren obigen Ausführungen aus der für $d_3 = 0$ spezialisierten Figur III entnehmen, da das Intervall für p , falls die Berührung entlang reeller (zur xy -Ebene symmetrischen Kreise) $\mathfrak{C}_{(p)}$ stattfinden soll, wegen $p_I = p_{II}$:

$$p_I < p < \frac{1}{2}(p_I + p_{III})$$

(vgl. S. 223) wird. Für Parameter $p > \frac{1}{2}(p_I + p_{III})$ bleibt in der besonderen gemäß $p_I = p_{III}$ sich ergebenden Figur III die zu dem (dort mit K_{II} zusammenfallenden) Kreise K_I gehörige Ordinate kleiner als

1) Vgl. Ball oder Zindler, auch Gr. im 48. Bd. dieser Zeitschrift, S. 72.

die zur Ellipse $E(r)$ gehörige, d. h. es bleibt der Radius $r_{(p)}$ der Orthogonalpunktskugel, welche $\mathfrak{C}_{(p)}$ auf $F(p)$ ausschneidet, kleiner als die reelle Halbachse des zugehörigen gleichbündigen Hyperboloides $F(p)$.

Für $p = \frac{1}{2}(p_I + p_{III})$ erhält man als Grenzlage jenes gleichbündige Hyperboloid mit einer gleichseitigen Hyperbel als Meridianschnitt, welches von den Zwickpunktskanten des obigen Cylindroides beschrieben wird und die Hydesche Brennfläche entlang ihres in $(s = 0)$ gelegenen Äquatorialkreises $(x^2 + y^2 = l_1^2)$ so innig berührt, daß beide Flächen dort vier benachbarte Kreise gemein haben.

Jede gegen die xy -Ebene unter einem kleineren Winkel als dem (zu den Zwickpunktskanten gehörigen) Winkel 45° geneigte Kante g des obigen Cylindroides berührt dagegen die Hydesche Brennfläche in zwei reellen Punkten, welche bei der Rotation von g um die Z -Achse auf einem Kreispaaire $\mathfrak{C}(p)$ wandern und durchdringt diese Brenn- und Grenzfläche außerdem noch in zwei Punkten, welche bei der Drehung das Kreispaar $\mathfrak{C}'(p)$ der Brennfläche beschreiben, welches den Restschnitt des durch Drehung von g erzeugten gleichbündigen Hyperboloides $F(p)$ mit der Brennfläche bildet.

Während für die gleichbündigen Rotationshyperboloide $F(p)$ um die s -Achse, deren Erzeugende mit der letzteren Winkel einschließen, welche kleiner sind als 45° , das Berührungskreispaar $\mathfrak{C}(p)$ imaginär wird, bleibt der Restschnitt jedes reellen Hyperboloides $F(p)$ mit der Brennfläche, das Kreispaar $\mathfrak{C}(p)$ immer reell.

Die reellen Knotenpunkte M und N der Hydeschen Fläche, die Zentra der hier zusammenfallenden reellen Basisbüschel, sind im Anfange p zusammengetreten, und die Hydesche Drehungsfläche hat in diesem ihren Mittelpunkt einen Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt, close-point) mit der doppelt zu zählenden xy -Ebene als Tangentialebene; außerdem sind die imaginären Knotenpunkte auf der s -Achse $(\pm 2l_1\sqrt{-1})$ bemerkenswert.

Die reelle *Kuspidalkurve* unserer Hydeschen Fläche, das Kreispaar \mathfrak{C}_ϱ , ist der Schnitt des gleichseitigen Rotationshyperboloides F_ϱ

$$F_\varrho \quad x^2 + y^2 - 2s^2 = \frac{8}{9}l_1^2$$

mit seiner Orthogonalpunkts- und Grenzpunktskugel

$$x^2 + y^2 + s^2 = \varrho^2 = \frac{4}{3}l_1^2,$$

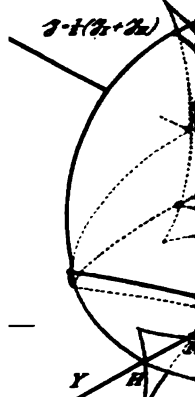
hat also die Gleichungen

$$\mathfrak{C}_\varrho \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{8}{9}\varrho^2 = \frac{32}{27}l_1^2 \\ s = \pm \frac{1}{3}\varrho = \pm \frac{2}{3}l_1\sqrt{3} \end{array} \right\}.$$

Fig.



Fig. IV.



*in Figur. IV bis IX sind die
Schnitte der Ellipsen
eingetragen.*

Die Drehungskegel, welche dem gleichseitigen Hyperboloide F_ϱ und der Hydeschen Brennfläche entlang ihrer Kuspidualkurve, des Kreispaares \mathfrak{C}_ϱ angelegt sind, haben die Schnittpunkte ($\mp \varrho$) der Z -Achse mit der obigen Kugel des Spitzenkreispaares \mathfrak{C}_ϱ zu Scheiteln.

Die Meridiankurve (Figur XV)

$$(x^2 + s^2)^3 - l_1^2 (x^2 + s^2)^2 - 18 l_1^2 (x^2 + s^2) s^2 + 27 l_1^2 s^4 + 16 l_1^4 s^2 = 0$$

läßt gemäß der Gleichung (37) die Parameterdarstellung:

$$\begin{cases} x = l_1 \cos \alpha (1 + \sin^2 \alpha) \\ s = l_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha \end{cases}$$

und jene hiermit verbundene kinematische Konstruktion zu, die (als besonderer Fall in der S. 238 beschriebenen enthalten ist und welche) wir sogleich als Konstruktion der Hydeschen Drehungsfläche beschreiben:

„Man lasse eine Strecke OI konstanter Länge l_1 sich mit ihrem einen Endpunkte O beliebig in der xy -Ebene, dagegen mit dem anderen Endpunkte I nur beliebig auf der s -Achse bewegen, wobei sie stets eine in O angebrachte zu ihr senkrecht bleibende Ebene Z starr mitführe, dann umhüllt die Ebene t die Hydesche Rotationsfläche.“

In der Meridianschnittfigur XV ist gezeigt, wie mit Hilfe des Momentanzentrums C für eine Bewegung des Gleitstückes OI in der Meridianebene zu jeder Tangentialebene t der Berührungspunkt P zu finden ist.

Wird der Winkel α des Gleitstückes mit der xy -Ebene so gewählt, daß $\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$ wird, so fällt P auf einen der beiden (die Kuspidualkurve bildenden) Kreise \mathfrak{C}_ϱ .

Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad.

Von J. HORN in Clausthal.

(Zweiter Aufsatz.)

In dem Aufsätze, welcher unter gleichem Titel im 47. Bd. dieser Zeitschrift, S. 400—428, erschienen ist, habe ich kleine Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrade unter der Einwirkung von Kräften untersucht, welche von den Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängen, aber nicht als lineare Funktionen betrachtet werden. Insbesondere handelte es sich im ersten Abschnitt des erwähnten Aufsatzes¹⁾ um die periodischen Schwingungen, welche durch Kräfte veranlaßt werden, die lediglich von den Koordinaten abhängen.

Die Untersuchungen dieses ersten Abschnittes sollen in der gegenwärtigen Arbeit eingehender durchgeführt werden. Es handelt sich teils um die Herleitung weiterer Formeln, namentlich solcher, die zur unmittelbaren Anwendung geeignet sind, teils um die Berechnung weiterer Glieder in den früher aufgestellten Reihen, teils um eine andere Methode zur Behandlung des Gegenstandes.

Die Veranlassung zur Wiederaufnahme dieser Untersuchungen boten Arbeiten von F. Richarz, P. Schulze und F. A. Schulze²⁾, welche einige hierher gehörige Formeln mathematisch abgeleitet, auf physikalische Vorgänge (Schwingungen des Unifilarmagnetometers und der magnetischen Wage) angewandt und experimentell geprüft haben.³⁾

§ 1.

Die in I, §§ 1—4 gegebenen Reihenentwicklungen sollen mit einer größeren Anzahl ausgerechneter Glieder angeschrieben werden, ohne daß auf die Herleitung noch einmal eingegangen wird. Zur Herleitung der

1) Hinweise auf den früheren Aufsatz werden im folgenden durch I unter Hinzufügung des § gegeben.

2) F. Richarz und P. Schulze, asymmetrische Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts (Archives néerlandaises, Serie 2, Bd. 6, 1901; Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 8, 1902). — P. Schulze, Inauguraldissertation mit demselben Titel, Greifswald 1901. — P. Schulze, über das Unifilarmagnetometer (Ann. d. Phys. Bd. 8, 1902). — F. A. Schulze, die Schwingungsdauer und Dämpfung asymmetrischer Schwingungen (Ann. d. Phys. Bd. 9, 1902).

3) Vgl. § 6 des vorliegenden Aufsatzes.

Formeln kann auch die in § 4 und § 5 des gegenwärtigen Aufsatzes angegebene Methode benutzt werden.

Die Lage eines Systems mit von der Zeit t unabhängigen Verbindungen sei durch eine einzige Koordinate x bestimmt. Durch passende Wahl von x und der Einheit der Zeit t^1) sei die lebendige Kraft auf die Form

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

die von den Kräften bei der Verrückung dx geleistete Arbeit auf die Form Qdx

$$Q = -x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

gebracht, und zwar sei Q eine ganze Funktion von x oder eine Potenzreihe, welche für hinreichend kleine Werte von $|x|$ konvergiert. Dann lautet die Differentialgleichung der Bewegung (vgl. I, § 1):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ verschwindet in den beiden äußersten Lagen $x = c$ und $x = \bar{c}$, zwischen welchen sich das System hin und her bewegt; nimmt man c als gegeben an, so ist

$$\bar{c} = -c + \frac{2}{3} a_2 c^3 - \frac{4}{9} a_3 c^3 + \left(\frac{16}{27} a_2^2 + \frac{2}{3} a_2 a_3 + \frac{2}{5} a_4 \right) c^4 + \dots$$

Die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ ist in der Gleichgewichtslage $x = 0$ gleich $\pm c'$ und zwar ist

$$c' = -c - \frac{1}{3} a_2 c^3 - \left(\frac{1}{18} a_2^2 + \frac{1}{4} a_3 \right) c^3 - \left(\frac{1}{64} a_2^3 + \frac{1}{12} a_2 a_3 + \frac{1}{5} a_4 \right) c^4 + \dots$$

Die Dauer ω einer einfachen Schwingung (die halbe Periode der Bewegung) wird dargestellt durch

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\pi} &= 1 + \left(\frac{5}{12} a_2^2 + \frac{2}{3} a_3 \right) c^2 - \left(\frac{5}{18} a_2^3 + \frac{1}{4} a_2 a_3 \right) c^3 \\ &+ \left(\frac{395}{576} a_2^4 + \frac{275}{192} a_2^2 a_3 + \frac{57}{256} a_3^2 + \frac{7}{8} a_2 a_4 + \frac{5}{16} a_5 \right) c^4 + \dots \end{aligned}$$

Der Übergang aus der Lage $x = c$ in die Lage $x = 0$ erfordert die Zeit²⁾

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} + \frac{2}{3} a_2 c - \frac{2}{9} a_2^2 c^3 + \left(\frac{41}{64} a_2^3 + \frac{7}{8} a_2 a_3 + \frac{8}{15} a_4 \right) c^3 + \dots,$$

der Übergang aus der Lage $x = 0$ in die Lage $x = \bar{c}$ die Zeit

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} - \frac{2}{3} a_2 c + \frac{2}{9} a_2^2 c^3 - \left(\frac{41}{64} a_2^3 + \frac{7}{8} a_2 a_3 + \frac{8}{15} a_4 \right) c^3 - \dots$$

1) Vgl. I, § 1. — In § 6 und § 7 wird von diesen Transformationen abgesehen.

2) Vgl. die Herleitung in § 4.

Die Reihen für \bar{c} , c' und ω , ω_1 , ω_2 sind für hinreichend kleine Werte von $|c|$ konvergent.

Die Koordinate x und die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ zur Zeit t^1) lassen sich in Potenzreihen von c entwickeln, welche Funktionen von

$$u = \frac{\pi}{\omega} t$$

mit der Periode 2π zu Koeffizienten haben; diese Reihen sind bei beliebigen u konvergent, wenn $|c|$ hinreichend klein ist. Sie lauten

$$x = c\psi_1(u) + c^2\psi_2(u) + c^3\psi_3(u) + c^4\psi_4(u) + \dots;$$

$$\psi_1 = \cos u,$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_2 \cos u - \frac{1}{8}a_2 \cos 2u,$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{8}a_2^2 + \left(\frac{39}{144}a_2^2 + \frac{1}{32}a_2\right) \cos u + \frac{1}{9}a_2^2 \cos 2u + \left(\frac{1}{48}a_2^2 - \frac{1}{32}a_2\right) \cos 3u,$$

$$\begin{aligned} \psi_4 = & \left(\frac{25}{48}a_2^3 + \frac{21}{32}a_2a_3 + \frac{3}{8}a_4\right) - \left(\frac{119}{432}a_2^3 + \frac{35}{96}a_2a_3 + \frac{1}{8}a_4\right) \cos u \\ & - \left(\frac{3}{8}a_2^3 + \frac{1}{8}a_2a_3 + \frac{1}{6}a_4\right) \cos 2u - \left(\frac{1}{48}a_2^3 - \frac{1}{32}a_2\right) \cos 3u \\ & - \left(\frac{1}{432}a_2^3 - \frac{1}{96}a_2a_3 + \frac{1}{120}a_4\right) \cos 4u \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

und

$$\frac{dx}{dt} = c\chi_1(u) + c^2\chi_2(u) + c^3\chi_3(u) + c^4\chi_4(u) + \dots;$$

$$\chi_1 = -\sin u,$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2}a_2 \sin u + \frac{1}{2}a_2 \sin 2u,$$

$$\chi_3 = \left(\frac{31}{144}a_2^3 + \frac{11}{32}a_2\right) \sin u - \frac{2}{9}a_2^2 \sin 2u + \left(\frac{5}{32}a_2 - \frac{1}{16}a_2^2\right) \sin 3u,$$

$$\begin{aligned} \chi_4 = & -\left(\frac{61}{432}a_2^3 + \frac{1}{96}a_2a_3 - \frac{1}{8}a_4\right) \sin u + \left(\frac{11}{36}a_2^3 + \frac{13}{24}a_2a_3 + \frac{1}{8}a_4\right) \sin 2u \\ & + \left(\frac{1}{16}a_2^3 - \frac{3}{32}a_2a_3\right) \sin 3u + \left(\frac{1}{108}a_2^3 - \frac{1}{24}a_2a_3 + \frac{1}{80}a_4\right) \sin 4u \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Durch Umstellung der Glieder in den Reihen für x und $\frac{dx}{dt}$ erhält man trigonometrische Reihen von u , deren Koeffizienten Potenzreihen von c sind. Es ist

$$x = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + A_4 \cos 4u + \dots;$$

$$A_0 = \frac{1}{2}a_2c^2 - \frac{1}{2}a_2^2c^3 + \left(\frac{25}{48}a_2^3 + \frac{21}{32}a_2a_3 + \frac{3}{8}a_4\right)c^4 + \dots,$$

$$A_1 = c - \frac{1}{2}a_2c^3 + \left(\frac{39}{144}a_2^2 + \frac{1}{32}a_2\right)c^3 - \left(\frac{119}{432}a_2^3 + \frac{35}{96}a_2a_3 + \frac{1}{8}a_4\right)c^4 + \dots,$$

$$A_2 = -\frac{1}{6}a_2c^3 + \frac{1}{9}a_2^2c^3 - \left(\frac{3}{8}a_2^3 + \frac{1}{8}a_2a_3 + \frac{1}{6}a_4\right)c^4 + \dots,$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{48}a_2^3 - \frac{1}{32}a_2\right)c^3 - \left(\frac{1}{48}a_2^3 - \frac{1}{32}a_2a_3\right)c^4 + \dots,$$

$$A_4 = -\left(\frac{1}{432}a_2^3 - \frac{1}{96}a_2a_3 + \frac{1}{120}a_4\right)c^4 + \dots \quad \text{usw.}$$

1) Für $t=0$ sei $x=c$, $\frac{dx}{dt}=0$.

2) Die hier mit A_0 bezeichnete Größe war in I, § 4 mit $\frac{1}{2}A_0$ bezeichnet.

und

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + B_4 \sin 4u + \dots; \\ B_1 &= -c + \frac{1}{8}a_2c^3 + \left(\frac{31}{144}a_2^2 + \frac{11}{32}a_3\right)c^5 - \left(\frac{61}{432}a_2^3 + \frac{1}{96}a_2a_3 - \frac{1}{8}a_4\right)c^7 + \dots, \\ B_2 &= \frac{1}{3}a_2c^3 - \frac{2}{9}a_2^2c^5 + \left(\frac{11}{36}a_2^3 + \frac{13}{24}a_2a_3 + \frac{1}{8}a_4\right)c^7 + \dots, \\ B_3 &= \left(\frac{2}{32}a_2 - \frac{1}{16}a_2^2\right)c^5 + \left(\frac{1}{16}a_2^3 - \frac{3}{32}a_2a_3\right)c^7 + \dots, \\ B_4 &= \left(\frac{1}{108}a_2^3 - \frac{1}{24}a_2a_3 + \frac{1}{80}a_4\right)c^7 + \dots \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

§ 2.

Im Anschluß an § 1 und I, §§ 1—4 bestimmen wir die Zeit t , welche das System braucht, um aus der äußersten Lage c in die Lage x zu gelangen.

Wir entwickeln

$$x = c\psi_1(u) + c^3\psi_2(u) + c^5\psi_3(u) + \dots,$$

indem wir

$$c^2 \cos 2u = 2(c \cos u)^2 - c^2, \quad c^3 \cos 3u = 4(c \cos u)^3 - 3c^3(c \cos u), \quad \dots$$

setzen, in eine Potenzreihe von $c \cos u$, deren Koeffizienten Potenzreihen von c sind¹⁾:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{3}a_2c^3 - \frac{4}{9}a_2^2c^5 + \dots \\ &+ c \cos u \cdot \left[1 - \frac{1}{8}a_2c + \left(\frac{5}{36}a_2^2 + \frac{1}{8}a_3\right)c^3 + \dots\right] \\ &+ (c \cos u)^3 \cdot \left[-\frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{9}a_2^2c + \dots\right] + (c \cos u)^5 \cdot \left[\frac{1}{12}a_2^2 - \frac{1}{8}a_3 + \dots\right] + \dots;\end{aligned}$$

hieraus ergibt sich $c \cos u$ als Potenzreihe von x und c , welche konvergiert, wenn die absoluten Beträge dieser Größen hinreichend klein sind:

$$\begin{aligned}c \cos u &= x + \frac{1}{3}a_2x^3 + \frac{1}{8}a_2xc - \frac{2}{3}a_2c^3 + \left(\frac{5}{36}a_2^2 + \frac{1}{8}a_3\right)x^5 \\ &+ \frac{1}{9}a_2^2x^3c - \left(\frac{17}{36}a_2^2 + \frac{1}{8}a_3\right)xc^3 + \frac{2}{9}a_2^2c^5 + \dots.\end{aligned}$$

Einer beliebig gegebenen Lage x zwischen c und \bar{c} entspricht ein bestimmter Wert von $\cos u$, zu welchem ein Wert $u = u_1$ zwischen 0 und π und ein Wert $u = u_2 = 2\pi - u_1$ zwischen π und 2π gehört.

Die Lage x wird zum ersten mal zur Zeit $t_1 = \frac{\omega}{\pi}u_1 < \omega$, zum zweiten

1) Die Reihe für x , deren Glieder $c^s\psi_n(u)$ als ganze rationale Funktionen von c und $s = c \cos u$ dargestellt werden, ist für $|c| \leq r$, $|s| \leq r$ (r positiv, hinreichend klein) unbedingt und gleichmäßig konvergent, sie läßt sich also als Potenzreihe von c und s darstellen, welche für $|c| \leq r$, $|s| \leq r$ konvergiert.

mal zur Zeit $t_2 = \frac{\omega}{\pi} u_2 = 2\omega - t_1 > \omega$ erreicht, und zwar mit entgegengesetzt gleichen Werten der Geschwindigkeit x' . Ist z. B. $c > 0$, so ist $x' < 0$ für $t = t_1$, $x' > 0$ für $t = t_2$.

Eine Formel für $c \sin u$ erhält man auf folgende Weise. In der Reihe

$$x' = c\chi_1(u) + c^3\chi_3(u) + c^5\chi_5(u) + \dots$$

setzen wir

$$\begin{aligned} c^3 \sin 2u &= c \sin u \cdot 2c \cos u \\ &= c \sin u \cdot (2x + \frac{2}{3}a_2x^3 + \frac{2}{5}a_4xc - \frac{4}{5}a_2c^3 + \dots), \\ c^5 \sin 3u &= 3c^3 \cdot (c \sin u) - 4(c \sin u)^3 \quad \text{usw.}; \end{aligned}$$

wir erhalten für x' eine nach ungeraden Potenzen von $c \sin u$ fortschreitende Reihe, deren Koeffizienten Potenzreihen von x und c sind:

$$\begin{aligned} -x' &= c \sin u \cdot [1 - \frac{2}{3}a_2x - \frac{1}{3}a_2c - \frac{2}{3}a_2^2x^3 + \frac{2}{5}a_2^2xc + (\frac{5}{12}a_2^2 - \frac{5}{8}a_4)c^3 + \dots] \\ &\quad + (c \sin u)^3 \cdot [\frac{2}{3}a_2 - \frac{1}{4}a_2^2 + \dots] + \dots \end{aligned}$$

Beachtet man, daß

$$x'^2 = c^2 - x^2 + \frac{2}{3}a_2(x^3 - c^3) + \dots$$

ist (§ 4 oder I, § 1), so ergibt sich für $c \sin u$ das Produkt aus x' und einer Potenzreihe von x und c , welche konvergiert, wenn $|x|$ und $|c|$ hinreichend klein sind:

$$c \sin u = -x' [1 + \frac{2}{3}a_2x + \frac{1}{3}a_2c + (\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{2}{3}a_4)x^3 + \frac{2}{5}a_2^2xc + (\frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{12}a_4^2)c^3 + \dots]$$

Da durch ein Paar zusammengehöriger Werte x, x' die äußersten Lagen c und \bar{c} bestimmt sind, so läßt sich die zum Übergang aus einer der Lagen c, \bar{c} in die Lage x erforderliche Zeit, sowie die halbe Periode ω durch x, x' ausdrücken.

Die durch die Bedingungen $x = c, \frac{dx}{dt} = 0$ für $t = 0$ bestimmte Lösung x unserer Differentialgleichung nimmt für $t = \omega$ den Wert \bar{c} an, während $\frac{dx}{dt}$ wieder gleich Null wird. Setzt man $t = \omega + t$, so wird die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = a_2x^3 + a_4x^5 + \dots,$$

und die betrachtete Lösung erfüllt die Bedingungen $x = \bar{c}, \frac{dx}{dt} = 0$ für $t = 0$. Demnach bleibt sowohl der Ausdruck für x als auch derjenige

für $\frac{dx}{dt}$ ungeändert, wenn man c durch \bar{c} und t durch $t = t - \omega$ oder $u = \frac{\pi}{\omega} t$ durch $u - \pi$ ersetzt.

Es ist also

$$\bar{c} \cos(u - \pi) = -\bar{c} \cos u = x + \frac{1}{3}a_2x^3 + \frac{1}{3}a_2x\bar{c} - \frac{2}{3}a_2\bar{c}^3 + \left(\frac{5}{36}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3\right)x^5 \\ + \frac{1}{9}a_2^2x^3\bar{c} - \left(\frac{17}{36}a_2^2 + \frac{1}{8}a_3\right)x\bar{c}^3 + \frac{2}{9}a_2^2\bar{c}^3 + \dots;$$

addiert man hierzu den Ausdruck für $c \cos u$, so erhält man

$$\frac{c + \bar{c}}{2} \cos u = x + \frac{1}{3}a_2x^3 + \frac{1}{3}a_2x \cdot \frac{c + \bar{c}}{2} - \frac{2}{3}a_2 \cdot \frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} \\ - \left(\frac{5}{36}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3\right)x^5 + \frac{1}{9}a_2^2x^3 \cdot \frac{c + \bar{c}}{2} \\ - \left(\frac{17}{36}a_2^2 + \frac{1}{8}a_3\right)x \cdot \frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} + \frac{2}{9}a_2^2 \cdot \frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} + \dots.$$

Die Addition des Ausdrucks für $c \sin u$ zu

$$\bar{c} \sin(u - \pi) = -\bar{c} \sin u \\ = -x' \left[1 + \frac{2}{3}a_2x + \frac{1}{3}a_2\bar{c} + \left(\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3\right)x^3 + \frac{2}{9}a_2^2x\bar{c} + \left(\frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{18}a_2^2\right)\bar{c}^3 + \dots \right]$$

ergibt

$$\frac{c - \bar{c}}{2} \sin u = -x' \left[1 + \frac{2}{3}a_2x + \frac{1}{3}a_2 \cdot \frac{c + \bar{c}}{2} + \left(\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3\right)x^3 \\ + \frac{2}{9}a_2^2x \cdot \frac{c + \bar{c}}{2} + \left(\frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{18}a_2^2\right) \cdot \frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} + \dots \right].$$

Ist $\pm c'$ der Wert der Geschwindigkeit x' in der Gleichgewichtslage $x = 0$, so ist nach I, § 1:

$$c'^2 = x'^2 + x^2 - \frac{2}{3}a_2x^3 - \frac{2}{4}a_3x^4 - \dots, \\ c = c' + \frac{1}{3}a_2c'^3 + \left(\frac{5}{18}a_2^2 + \frac{1}{4}a_3\right)c'^5 + \dots,$$

also:

$$c = A + Bc', \quad \bar{c} = A - Bc',$$

wobei gesetzt ist:

$$A = \frac{1}{3}a_2(x'^2 + x^2) - \frac{2}{9}a_2^2x^3 + \dots, \\ B = 1 + \left(\frac{5}{18}a_2^2 + \frac{1}{4}a_3\right)(x'^2 + x^2) + \dots.$$

Setzt man $B^2c'^2 = R$, also

$$R = x'^2 + x^2 - \frac{2}{3}a_2x^3 - \frac{1}{2}a_3x^4 + \left(\frac{5}{9}a_2^2 + \frac{1}{2}a_3\right)(x'^2 + x^2)^2 + \dots,$$

so hat man

$$c = A + \sqrt{R}, \quad \bar{c} = A - \sqrt{R}$$

oder

$$\frac{c + \bar{c}}{2} = A, \quad \frac{c - \bar{c}}{2} = \sqrt{R}.$$

Nach der letzten Formel ist der positive oder der negative Wert von \sqrt{R} zu nehmen, je nachdem der Wert c , welchen x für $t = 0$ annimmt, positiv oder negativ ist. Beachtet man noch die Gleichungen

$$\frac{c^2 + \bar{c}^2}{2} = \left(\frac{c + \bar{c}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c - \bar{c}}{2}\right)^2 = A^2 + R,$$

$$\frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} = \left(\frac{c + \bar{c}}{2}\right)^3 + 3 \frac{c + \bar{c}}{2} \left(\frac{c - \bar{c}}{2}\right)^2 = A^3 + 3AR$$

u. s. w., so erhält man

$$\sqrt{R} \cos u = x - \frac{1}{3}a_2x^3 - \frac{2}{3}a_2x'^2 - \left(\frac{1}{18}a_2^2 + \frac{1}{4}a_3\right)x^3 - \left(\frac{13}{36}a_2^2 + \frac{1}{8}a_3\right)xx'^2 + \dots$$

und

$$\sqrt{R} \sin u = -x' \left[1 + \frac{2}{3}a_2x + \left(\frac{17}{36}a_2^2 + \frac{5}{8}a_3\right)x^2 + \left(\frac{1}{18}a_2^2 + \frac{1}{4}a_3\right)x'^2 + \dots \right].$$

Die in

$$u = \frac{\pi}{\omega} t$$

enthaltene halbe Periode ω läßt sich als Potenzreihe von x, x' darstellen. Da ω ungeändert bleibt, wenn man c in \bar{c} verwandelt, so hat man:

$$\frac{\omega}{\pi} = 1 + \left(\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3\right) \frac{c^2 + \bar{c}^2}{2} + \dots = 1 + \left(\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3\right) R + \dots,$$

wo die weggelassenen Glieder mindestens vom vierten Grad in x, x' sind. Es ist also

$$\frac{\omega}{\pi} = 1 + \left(\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3\right)(x^2 + x'^2) - \left(\frac{5}{18}a_2^3 + \frac{1}{4}a_2a_3\right)x^3 + \dots$$

§ 3.

An die Stelle der bisherigen Anfangsbedingung $t = 0, x = c, \frac{dx}{dt} = 0$ trete jetzt die Bedingung

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = x'_0,$$

wo x_0, x'_0 Größen von hinreichend kleinem absoluten Betrage sind, während die Differentialgleichung der Bewegung ungeändert bleibt.

Die am Ende von § 2 aufgestellten Formeln lassen sich hier anwenden, wenn man das Paar zusammengehöriger Werte x, x' durch die jetzigen Anfangswerte x_0, x'_0 ersetzt. Die Dauer ω einer einfachen Schwingung ergibt sich aus:

$$\frac{\omega}{\pi} = 1 + \left(\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3\right)(x_0^2 + x_0'^2) - \left(\frac{5}{18}a_2^3 + \frac{1}{4}a_2a_3\right)x_0^3 + \dots$$

Die äußersten Lagen c und \bar{c} berechnen sich aus

$$c = A + \sqrt{R}, \quad \bar{c} = A - \sqrt{R},$$

wo

$$A = \frac{1}{3}a_2(x_0^3 + x_0'^3) - \frac{2}{3}a_2^2x_0^3 + \dots,$$

$$R = x_0^3 + x_0'^3 - \frac{2}{3}a_2x_0^3 - \frac{1}{3}a_2x_0'^3 + (\frac{5}{9}a_2^2 + \frac{1}{9}a_2)(x_0^3 + x_0'^3)^2 + \dots$$

ist. Je nachdem man den positiven oder den negativen Wert von \sqrt{R} nimmt, ist $c > 0$ der größte oder $c < 0$ der kleinste Wert von x .

In § 2 wurde die Zeit t berechnet, welche das System braucht, um aus der Lage c in die Lage x mit der Geschwindigkeit x' zu gelangen. Eben so groß ist die Zeit, in welcher das von der Lage x mit der Geschwindigkeit $-x'$ ausgehende System in die Lage c kommt. Um die Zeit t_0 zu berechnen, welche der Übergang des jetzt betrachteten Systems aus der Anfangslage x_0 (Anfangsgeschwindigkeit x_0') in die äußerste Lage c erfordert, hat man in den Formeln für $\sqrt{R} \cos u$ und $\sqrt{R} \sin u$ in § 2 t durch t_0 , x durch x_0 und $-x'$ durch x_0' zu ersetzen. Man erhält so

$$\begin{aligned} \sqrt{R} \cdot \cos \frac{\pi}{\omega} t_0 &= x_0 - \frac{1}{3}a_2x_0^3 - \frac{2}{3}a_2x_0'^3 \\ &\quad - (\frac{1}{18}a_2^2 + \frac{1}{4}a_2)x_0^3 - (\frac{13}{36}a_2^2 + \frac{1}{8}a_2)x_0x_0'^3 + \dots \end{aligned}$$

und

$$\sqrt{R} \cdot \sin \frac{\pi}{\omega} t_0 = x_0' [1 + \frac{2}{3}a_2x_0 + (\frac{17}{36}a_2^2 + \frac{5}{8}a_2)x_0^3 + (\frac{1}{18}a_2^2 + \frac{1}{4}a_2)x_0'^3 + \dots].$$

Gelangt das System nach Ablauf der Zeit t_0 zum ersten mal in eine äußerste Lage, die wir c nennen, so muß $t_0 < \omega$ sein; das Vorzeichen von c und damit auch dasjenige von \sqrt{R} stimmt mit dem Vorzeichen von x_0' überein.

Indem man jetzt von der Bedingung

$$t = t_0, \quad x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

ausgeht, sieht man, daß die Formeln in § 1 für x und $\frac{dx}{dt}$ hier gültig sind, wenn t durch $t - t_0$ ersetzt, also $u = \frac{\pi}{\omega} (t - t_0)$ gesetzt wird.

Wir leiten indessen den Ausdruck für x als Funktion von t direkt aus der Differentialgleichung her. Setzt man

$$w = \frac{\pi}{\omega} t,$$

so geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{\pi^2}{\omega^2} \frac{d^2x}{dw^2} + x = a_2x^3 + a_3x^5 + \dots,$$

worin

$$\frac{x^2}{\omega^2} = 1 - \left(\frac{5}{8}a_2^2 + \frac{3}{4}a_3\right)(x_0^2 + x_0'^2) + \dots$$

ist; die Anfangsbedingungen sind

$$w = 0, \quad x = x_0, \quad \frac{dx}{dw} = \frac{\omega}{\pi} x'_0 = x'_0 + \left(\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3\right)(x_0^2 + x_0'^2)x'_0 + \dots$$

Demnach erscheint x als Potenzreihe von x_0, x'_0 , welche konvergiert, wenn die absoluten Beträge dieser Größen hinreichend klein sind. Wenn wir

$$x = X_1 + X_2 + X_3 + \dots$$

setzen, wo X_n eine ganze Funktion n ten Grades von x_0, x'_0 darstellt, so haben wir nacheinander die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 X_1}{dw^2} + X_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 X_2}{dw^2} + X_2 = a_2 X_1^2$$

u. s. w. mit den Anfangsbedingungen

$$X_1 = x_0, \quad \frac{dX_1}{dw} = x'_0,$$

$$X_2 = 0, \quad \frac{dX_2}{dw} = 0$$

u. s. w. für $w = 0$ zu integrieren. Es ergibt sich

$$X_1 = x_0 \cos w + x'_0 \sin w,$$

$$X_2 = \frac{1}{2}a_2(x_0^2 + x_0'^2) - \frac{1}{2}a_2(x_0^2 + 2x_0'^2)\cos w + \frac{3}{2}a_2x_0x_0'\sin w \\ - \frac{1}{6}a_2(x_0^3 - x_0'^3)\cos 2w - \frac{1}{3}a_2x_0x_0'\sin 2w$$

u. s. w. Als periodische Funktion w mit der Periode 2π läßt sich x in eine Fouriersche Reihe entwickeln

$$x = A_0 + A_1 \cos w + A_2 \cos 2w + \dots + B_1 \sin w + B_2 \sin 2w + \dots;$$

$$A_0 = \frac{1}{2}a_2(x_0^2 + x_0'^2) + \dots,$$

$$A_1 = x_0 - \frac{1}{2}a_2(x_0^2 + 2x_0'^2) + \dots, \quad B_1 = x'_0 + \frac{3}{2}a_2x_0x_0' + \dots,$$

$$A_2 = -\frac{1}{6}a_2^2(x_0^3 - x_0'^3) + \dots, \quad B_2 = -\frac{1}{3}a_2x_0x_0' + \dots \quad \text{u. s. w.}$$

Wir untersuchen jetzt die Bewegung unseres Systems unter der Voraussetzung, daß es zur Zeit $t = 0$ die Gleichgewichtslage $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = c'$ verläßt. Wir haben in den Formeln des gegenwärtigen Paragraphen $x_0 = 0, x'_0 = c'$ zu setzen; wir können aber auch an § 1 und I, § 1 ff. anknüpfen.

Das System erreicht nach Ablauf der Zeit ω_1 die Lage $x = c$ oder nach Ablauf der Zeit ω_2 die Lage $x = \bar{c}$, je nachdem es die Lage $x = 0$ mit der Geschwindigkeit c' oder mit der Geschwindigkeit $-c'$ verläßt. Demnach geht c in \bar{c} und ω_1 in ω_2 über, wenn man c' in $-c'$ verwandelt; $\omega = \omega_1 + \omega_2$ bleibt also bei der Zeichenänderung von c' ungeändert. Setzt man $\omega_1 - \frac{\omega}{2} = f(c')$, so ist $\omega_2 - \frac{\omega}{2} = f(-c')$; die Addition der beiden Gleichungen ergibt $f(c') + f(-c') = 0$, d. h. $f(c')$ ist eine ungerade Funktion von c' .

Nach I, § 1 ist

$$c = c' + \frac{1}{3}a_2c'^3 + \left(\frac{5}{18}a_2^2 + \frac{1}{4}a_3\right)c'^5 + \dots,$$

$$\bar{c} = -c' + \frac{1}{3}a_2c'^3 - \left(\frac{5}{18}a_2^2 + \frac{1}{4}a_3\right)c'^5 + \dots;$$

die in § 1 aufgestellten Ausdrücke für ω , ω_1 , ω_2 gehen hiernach über in

$$\frac{\omega}{\pi} = 1 + \left(\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{2}{3}a_3\right)c'^2$$

$$+ \left(\frac{385}{576}a_2^4 + \frac{105}{64}a_2^2a_3 + \frac{105}{288}a_3^2 + \frac{7}{8}a_2a_4 + \frac{5}{16}a_5\right)c'^4 + \dots;$$

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} + \frac{2}{3}a_2c' + \left(\frac{64}{81}a_2^3 + \frac{4}{3}a_2a_3 + \frac{5}{15}a_4\right)c'^3 + \dots,$$

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} - \frac{2}{3}a_2c' - \left(\frac{64}{81}a_2^3 + \frac{4}{3}a_2a_3 + \frac{5}{15}a_4\right)c'^3 - \dots.$$

Setzt man

$$w = \frac{\pi}{\omega} t,$$

so hat man

$$x = c'\eta_1(w) + c'^3\eta_3(w) + c'^5\eta_5(w) + \dots;$$

$$\eta_1 = \sin w,$$

$$\eta_3 = \frac{1}{3}a_2 - \frac{2}{3}a_2 \cos w + \frac{1}{6}a_2 \cos 2w,$$

$$\eta_5 = \left(\frac{5}{144}a_2^2 + \frac{9}{32}a_3\right) \sin w + \frac{2}{9}a_2^2 \sin 2w + \left(\frac{1}{32}a_3 - \frac{1}{48}a_2^2\right) \sin 3w$$

u. s. w.; η_n ist eine gerade oder eine ungerade Funktion von w mit der Periode 2π , je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Wenn man in der Reihe für x in § 1 c durch c' ausdrückt und

$$u = \frac{\pi}{\omega} (t - \omega_1)$$

setzt, so erhält man

$$x = c'\xi_1(u) + c'^3\xi_3(u) + c'^5\xi_5(u) + \dots;$$

$$\xi_1 = \cos u,$$

$$\xi_3 = \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{6}a_2 \cos 2u,$$

$$\xi_5 = \left(\frac{37}{144}a_2^2 + \frac{9}{32}a_3\right) \cos u + \left(\frac{1}{48}a_2^2 - \frac{1}{32}a_3\right) \cos 3u \quad \text{u. s. w.}$$

oder

$$A_0 = \frac{1}{3} a_2 c'^2 + \dots,$$

$$A_1 = c' + \left(\frac{37}{144} a_2^2 + \frac{9}{32} a_3\right) c'^2 + \dots,$$

$$A_2 = -\frac{1}{6} a_2 c'^2 + \dots,$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{48} a_2^2 - \frac{1}{32} a_3\right) c'^2 + \dots$$

u. s. w. Je nachdem n gerade oder ungerade ist, enthält ξ_n nur die Kosinus der geraden oder nur der ungeraden Vielfachen von u . Denn das System, welches zur Zeit $t=0$ von der Lage $x=0$ mit der Geschwindigkeit $x'=c'$ ausgeht, befindet sich zur Zeit $t=\omega_1$ in der Lage $x=c$, zur Zeit $t=2\omega_1$ in der Lage $x=0$ mit der Geschwindigkeit $x'=-c'$. Setzt man $t=2\omega_1+t_1$, so ändert sich die Form der Differentialgleichung nicht, die Anfangsbedingungen werden $t_1=0$, $x=0$, $\frac{dx}{dt_1}=-c'$; wenn man

$$u_1 = \frac{\pi}{\omega} (t_1 - \omega_2)$$

setzt, ist

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c'^n \xi_n(u_1);$$

wegen

$$u_1 = \frac{\pi}{\omega} (t - 2\omega_1 - \omega_2) = \frac{\pi}{\omega} (t - \omega_1 - \omega) = u - \pi$$

ist

$$\xi_n(u) = (-1)^n \xi_n(u - \pi),$$

w. z. b. w. Demnach enthält A_n nur gerade oder ungerade Potenzen von c' , je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Nun läßt sich schreiben:

$$\xi_{2m} = \sum_{r=0}^m \mathfrak{A}_r \cos^{2r} u = \sum_{r=0}^m \mathfrak{A}_r (\cos^2 u)^r (\cos^2 u + \sin^2 u)^{m-r},$$

$$\xi_{2m+1} = \sum_{r=0}^m \mathfrak{B}_r \cos^{2r+1} u = \cos u \sum_{r=0}^m \mathfrak{B}_r (\cos^2 u)^r (\cos^2 u + \sin^2 u)^{m-r};$$

also sind

$$c^{2m} \xi_{2m}, \quad \frac{c^{2m+1} \xi_{2m+1}}{c \cos u}$$

ganze homogene Funktion m ten Grades von $(c \cos u)^2$ und $(c \sin u)^2$. Daher läßt sich x als Potenzreihe von $c \cos u$ und $c \sin u$ darstellen, welche konvergiert, wenn die absoluten Beträge dieser Argumente hinreichend klein sind, und nur gerade Potenzen von $c \sin u$ enthält.

§ 4.

Wir schlagen jetzt einen anderen Weg ein, um die Zeit t zu berechnen, welche das System braucht, um aus der äußersten Lage c in eine beliebige Lage x zu gelangen. Daraus ergeben sich insbesondere auch die Formeln für ω , ω_1 , ω_2 . Die weitere Verfolgung dieses Weges führt in § 5 zu den aus § 1 und I, §§ 3—4 bekannten Reihenentwicklungen von x .

Ist die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

und die bei der Verrückung dx geleistete Arbeit

$$Qdx = (-x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) dx,$$

ist ferner

$$x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad t = 0,$$

so liefert das Prinzip der lebendigen Kraft die Gleichung:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \int_c^x Q dx$$

oder

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \Phi(x) = c^2 - x^2 + \frac{2}{3} a_2 (x^3 - c^3) + \frac{2}{4} a_3 (x^4 - c^4) + \frac{2}{5} a_4 (x^5 - c^5) + \dots$$

Man hat

$$\Phi(x) = (c - x)(x - \bar{c}) \Phi_1(x),$$

wo

$$\bar{c} = -c + \frac{2}{3} a_2 c^2 - \frac{4}{9} a_2^2 c^3 + \left(\frac{16}{27} a_2^3 + \frac{2}{3} a_2 a_3 + \frac{2}{5} a_4 \right) c^4 + \dots$$

und

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= 1 - \frac{2}{3} a_2 x - \frac{1}{2} a_3 x^2 - \left(\frac{4}{9} a_2^2 + \frac{1}{3} a_3 \right) c^2 \\ &\quad - \frac{2}{5} a_4 x^3 - \left(\frac{1}{3} a_2 a_3 + \frac{2}{5} a_4 \right) x c^3 + \left(\frac{8}{27} a_2^3 + \frac{1}{3} a_2 a_3 \right) c^3 + \dots \end{aligned}$$

Potenzreihen sind, welche für hinreichend kleine Werte von $|c|$ bzw. von $|x|$ und $|\bar{c}|$ konvergieren.

Gehört x dem Intervall $c \dots \bar{c}$ an, so ist die Zeit t , nach welcher die Lage x zum erstenmal erreicht wird, dargestellt durch

$$t = \mp \int_c^x \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = \mp \int_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} \sqrt{\Phi_1(x)}},$$

wo das Zeichen $-$ oder $+$ gilt, je nachdem c positiv oder negativ ist, während alle vorkommenden Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind.

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}} = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \dots,$$

wobei gesetzt ist:

$$g_0 = 1 + \left(\frac{2}{9}a_2^2 + \frac{1}{4}a_3\right)c^2 - \left(\frac{4}{27}a_2^3 + \frac{1}{6}a_2a_3\right)c^3 + \dots,$$

$$g_1 = \frac{1}{3}a_2 + \left(\frac{2}{9}a_2^2 + \frac{5}{12}a_2a_3 + \frac{1}{6}a_4\right)c^2 + \dots,$$

$$g_2 = \left(\frac{1}{6}a_2^2 + \frac{1}{4}a_3\right) + 0 \cdot c + \dots,$$

$$g_3 = \left(\frac{5}{24}a_2^3 + \frac{1}{4}a_2a_3 + \frac{1}{6}a_4\right) + \dots \text{ u. s. w.}$$

Nimmt man $c > 0$, also $\bar{c} < 0$ an, so ist

$$t = \int_x^c (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \dots) \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}}$$

$$= [g_0 + \frac{1}{2}g_1(c+\bar{c}) + g_2(\frac{3}{8}(c+\bar{c})^2 - \frac{1}{2}c\bar{c}) + g_3(\frac{5}{16}(c+\bar{c})^3 - \frac{3}{4}c\bar{c}(c+\bar{c})) + \dots] \int_x^c \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}}$$

$$+ [g_1 + \frac{3}{4}g_2(c+\bar{c}) + g_3(\frac{5}{8}(c+\bar{c})^2 - \frac{3}{2}c\bar{c}) + (\frac{1}{2}g_2 + \frac{5}{12}g_3(c+\bar{c}) + \dots)x + \frac{1}{2}g_3x^2 + \dots] \sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}$$

Aus der Gleichung

$$x' = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} \cdot \sqrt{\Phi_1(x)}$$

folgt

$$\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} = -\frac{x'}{\sqrt{\Phi_1(x)}},$$

ferner ist

$$\int_x^c \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} = \arccos \frac{x - \frac{c+\bar{c}}{2}}{\frac{c-\bar{c}}{2}},$$

wo der Wert von \arccos zwischen 0 und π zu nehmen ist. Setzt man für \bar{c} und $\frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}}$ die oben angeschriebenen Reihen ein, so erhält man

$$t = [1 + (\frac{5}{12}a_2^2 + \frac{3}{8}a_3)c^2 - (\frac{5}{18}a_2^3 + \frac{1}{4}a_2a_3)c^3 + \dots] \arccos \frac{x - \frac{c+\bar{c}}{2}}{\frac{c-\bar{c}}{2}}$$

$$- x' [\frac{1}{3}a_2 + (\frac{7}{36}a_2^2 + \frac{1}{6}a_3)x + (\frac{37}{324}a_2^3 + \frac{5}{24}a_2a_3 + \frac{1}{16}a_4)x^2 + (\frac{145}{324}a_2^4 + \frac{10}{24}a_2a_3 + \frac{1}{6}a_4)c^2 + \dots]$$

hierin ist

$$\frac{x - \frac{c+\bar{c}}{2}}{\frac{c-\bar{c}}{2}} = \frac{x + \frac{1}{2}a_2xc - \frac{1}{2}a_2c^2 - \frac{1}{2}a_2^2xc^2 + \frac{1}{2}a_2^3c^3 + \dots}{c}$$

a) Falle $c < 0$, $\bar{c} > 0$ ist

$$\frac{dx}{(c-x)(x-\bar{c})} (g_0 + g_1 x + \dots) + \frac{1}{2} g_1 (c + \bar{c}) + \dots \int_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} - [g_1 + \dots] \sqrt{(c-x)(x-\bar{c})};$$

setzt

$$\int_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} = \arccos \frac{x - \frac{c+\bar{c}}{2}}{\frac{c-\bar{c}}{2}},$$

der der Wert von \arccos zwischen 0 und π zu nehmen ist, und

$$\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} = \frac{x'}{\sqrt{\Phi_1(x)}};$$

b) gilt die für t gefundene endgültige Formel auch jetzt.

a) zu einer gegebenen Lage x gehörige Geschwindigkeit x' erhält man aus $x'^2 = \Phi(x)$. Um den ersten Wert von t zu erhalten, nimmt man x' negativ oder positiv zu nehmen, je nachdem $c > 0$ oder

besonders erhält man die zum Übergang aus der Lage c in die Lage \bar{c} erforderliche Zeit ω , indem man in dem Ausdruck für t $x' = 0$ setzt:

$$\omega = \pi \left[1 + \left(\frac{5}{12} a_2^2 + \frac{2}{3} a_3 \right) c^2 - \left(\frac{5}{12} a_2^2 + \frac{1}{4} a_3 a_2 \right) c^3 + \dots \right].$$

a) Übergang aus der Lage $x=c$ in die Lage $x=0$ erforderliche Zeit ist der Wert von t für $x=0$; wegen

$$\begin{aligned} \arccos \left(-\frac{c+\bar{c}}{c-\bar{c}} \right) &= \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{c+\bar{c}}{c-\bar{c}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} a_2 c - \frac{1}{8} a_2^2 c^2 + \left(\frac{31}{162} a_2^3 + \frac{1}{3} a_3 a_2 + \frac{1}{6} a_4 \right) c^3 + \dots \\ -x' = c' = c - \frac{1}{2} a_2 c^2 - \left(\frac{1}{18} a_2^2 + \frac{1}{4} a_3 \right) c^3 + \dots \end{aligned}$$

1

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} a_2 c - \frac{1}{8} a_2^2 c^2 + \left(\frac{61}{81} a_2^3 + \frac{7}{6} a_3 a_2 + \frac{8}{15} a_4 \right) c^3 + \dots$$

Die zum Übergang aus der Lage $x=0$ in die Lage $x=\bar{c}$ erforderliche Zeit ist $\omega_2 = \omega - \omega_1$ oder

$$\omega_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} a_2 c + \frac{1}{8} a_2^2 c^2 - \left(\frac{61}{81} a_2^3 + \frac{7}{6} a_3 a_2 + \frac{8}{15} a_4 \right) c^3 + \dots$$

Wir fügen noch die Formel hinzu:

$$u = \frac{\pi}{\omega} t = \arccos \frac{x - \frac{c + \bar{c}}{2}}{\frac{c - \bar{c}}{2}}$$

$$- x' \left[\frac{1}{3} a_2 + \left(\frac{7}{36} a_2^2 + \frac{1}{6} a_3 \right) x + \left(\frac{27}{324} a_2^3 + \frac{5}{24} a_2 a_3 + \frac{1}{15} a_4 \right) x^2 + \left(\frac{49}{162} a_2^4 + \frac{2}{3} a_2 a_3^2 + \frac{1}{3} a_4 a_3 \right) x^3 + \dots \right]$$

§ 5.¹⁾

Wir setzen

$$v = \arccos \frac{x - \frac{c + \bar{c}}{2}}{\frac{c - \bar{c}}{2}} \quad (0 \leq v \leq \pi)$$

und entwickeln t in eine nach Sinus der Vielfachen von v fortschreitende Reihe.

Es ist

$$\begin{aligned} x &= \frac{c + \bar{c}}{2} + \frac{c - \bar{c}}{2} \cos v \\ &= \frac{1}{3} a_2 c^2 - \frac{2}{9} a_2^2 c^3 + \dots + \left(c - \frac{1}{3} a_2 c^2 + \frac{2}{9} a_2^2 c^3 + \dots \right) \cos v \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}} &= \frac{1}{\sqrt{\Psi(v)}} = [1 + \left(\frac{5}{12} a_2^2 + \frac{2}{3} a_3 \right) c^2 + \dots] \\ &+ \cos v \cdot \left[\frac{1}{3} a_2 c - \frac{1}{9} a_2^2 c^2 + \dots \right] + \cos 2v \cdot \left[\left(\frac{1}{12} a_2^2 + \frac{2}{3} a_3 \right) c^2 + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

Im Falle $c > 0$ ist

$$\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} = \frac{c-\bar{c}}{2} \sin v, \quad -\frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} = dv,$$

$$t = -\int_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}} = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{\Psi(v)}};$$

im Falle $c < 0$ haben wir

$$-\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} = \frac{c-\bar{c}}{2} \sin v, \quad \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} = dv,$$

$$t = \int_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}} = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{\Psi(v)}}.$$

1) Vgl. Weierstraß, Über eine Gattung reell periodischer Funktionen (Berliner Monatsberichte 1866; Werke Bd. II).

Also ist allgemein

$$t = v \cdot [1 + \frac{5}{12}a_2^2 + \frac{1}{8}a_3)c^2 + \dots] \\ + \sin v \cdot [\frac{1}{8}a_2c - \frac{1}{9}a_2^2c^2 + \dots] + \sin 2v \cdot [(\frac{1}{12}a_2^2 + \frac{1}{8}a_3)c^2 + \dots] + \dots$$

Für $v = \pi$ ist $x = \bar{c}$, also $t = \omega$; man erhält wieder den bekannten Wert für ω . Nun ist

$$u = \frac{\pi}{\omega}t = v + \sin v \cdot [\frac{1}{8}a_2c - \frac{1}{9}a_2^2c^2 + \dots] \\ + \sin 2v \cdot [(\frac{1}{24}a_2^2 + \frac{1}{16}a_3)c^2 + \dots] + \dots$$

Schließlich geben wir noch eine andere Herleitung der in I, § 3 und § 4 erhaltenen Reihenentwicklungen von x im Anschluß an die angeführte Abhandlung von Weierstraß.

Als gerade periodische Funktion von u mit der Periode 2π läßt sich $\cos v$ in eine Fouriersche Reihe von der Form

$$\cos v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nu$$

entwickeln. Es ist

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos v du;$$

$\cos v \cdot \frac{du}{dv} = \cos v \cdot \frac{\pi}{\omega} \frac{1}{\Psi(v)}$ läßt sich in eine nach Kosinus der Vielfachen von v fortschreitende Reihe entwickeln, deren konstantes Glied lautet:

$$\frac{1}{8}a_2c - \frac{1}{18}a_2^2c^2 + \dots;$$

wegen $\int_0^{\pi} \cos mv dv = 0$ ($m=1, 2, \dots$) ist

$$A_0 = \frac{1}{\pi}a_2c - \frac{1}{18}a_2^2c^2 + \dots$$

Ferner ist

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos v \cos nu du$$

oder, wenn man partiell integriert,

$$A_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin v \sin nu dv.$$

Setzt man

$$v = u - v = \sin v \cdot [\frac{1}{8}a_2c - \frac{1}{9}a_2^2c^2 + \dots] \\ + \sin 2v \cdot [(\frac{1}{24}a_2^2 + \frac{1}{16}a_3)c^2 + \dots] + \dots,$$

so ist

$$\begin{aligned}\sin nu &= \sin(nv + n\eta) = \sin nv \cos n\eta + \cos nv \sin n\eta \\ &= \sin nv \cdot (1 - \tfrac{1}{2}n^2\eta^2 + \dots) + \cos nv \cdot (n\eta - \tfrac{1}{6}n^3\eta^3 + \dots);\end{aligned}$$

man entwickelt die ungeraden Potenzen von η nach Sinus und die geraden Potenzen von η nach Kosinus der Vielfachen von v , so daß man für $\sin nu$ eine nach Sinus der Vielfachen von v fortschreitende Reihe erhält, deren Koeffizienten Potenzreihen von c sind:

$$\sin nu = p_{n1}(c) \sin v + p_{n2}(c) \sin 2v + p_{n3}(c) \sin 3v + \dots$$

Daraus folgt

$$\sin v \sin nu = \tfrac{1}{2} p_{n1} + \tfrac{1}{2} p_{n2} \cos v - \tfrac{1}{2} (p_{n1} - p_{n2}) \cos 2v + \dots$$

und

$$\int_0^\pi \sin v \sin nu dv = \tfrac{\pi}{2} p_{n1},$$

also

$$A_n = \tfrac{1}{n} p_{n1}(c).$$

Man findet

$$\sin u = [1 + (\tfrac{1}{32}a_2 - \tfrac{1}{48}a_2^2)c^2 + \dots] \sin v + \dots,$$

$$\sin 2u = [-\tfrac{1}{2}a_2c + \tfrac{1}{2}a_2^2c^2 + \dots] \sin v + \dots,$$

$$\sin 3u = [(\tfrac{1}{16}a_2^2 - \tfrac{3}{32}a_2)c^2 + \dots] \sin v + \dots$$

usw., also

$$A_1 = p_{11} = 1 + (\tfrac{1}{32}a_2 - \tfrac{1}{48}a_2^2)c^2 + \dots,$$

$$A_2 = \tfrac{1}{2} p_{21} = -\tfrac{1}{6}a_2c + \tfrac{1}{18}a_2^2c^2 + \dots,$$

$$A_3 = \tfrac{1}{3} p_{31} = (\tfrac{1}{48}a_2^2 - \tfrac{1}{32}a_2)c^2 + \dots$$

usw. Mithin ist

$$x = \tfrac{1}{2}a_2c^2 - \tfrac{2}{9}a_2^2c^2 + \dots + (c - \tfrac{1}{2}a_2c^2 + \dots)(A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \dots)$$

oder

$$\begin{aligned}x &= (\tfrac{1}{2}a_2c^2 - \tfrac{2}{9}a_2^2c^2 + \dots) + (c - \tfrac{1}{2}a_2c^2 + (\tfrac{29}{144}a_2^2 + \tfrac{1}{32}a_2)c^2 + \dots) \cos u \\ &\quad + (-\tfrac{1}{6}a_2c^2 + \tfrac{1}{9}a_2^2c^2 + \dots) \cos 2u + ((\tfrac{1}{48}a_2^2 - \tfrac{1}{32}a_2)c^2 + \dots) \cos 3u + \dots\end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$A_n = \tfrac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin v \sin nu dv \quad (n=1, 2, \dots)$$

geht durch partielle Integration über in

$$A_n = \frac{J_n}{n^2}, \quad J_n = \frac{2\pi}{n^2} \int_0^\pi \frac{d}{dv} (\sin v \sqrt{\Psi(v)}) \cos n u dv.$$

Wenn $|c| \leq r$ angenommen wird, wo r eine hinreichend kleine positive GröÙe bedeutet, so ist eine von n sowie von c und u unabhängige positive GröÙe K so vorhanden, daß $|J_n| < K$ ist. Demnach ist die Reihe

$$x = \frac{c+c}{2} + \frac{c-\bar{c}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nu$$

für alle reellen Werte von u und für $|c| \leq r$ unbedingt und gleichmäßig konvergent. Das Reihenglied $A_n \cos nu$ ist eine Potenzreihe von c und $s = c \cos u$ (in s ganz rational), welche für $|c| \leq r$, $|s| \leq 1$ konvergiert; folglich ist x eine in demselben Bereich konvergente Potenzreihe von c und s ; ordnet man diese nach Potenzen von c , so hat man die aus I, § 3 bekannte Reihe

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \psi_n(u).$$

§ 6.

In § 1 und I, § 1 wurden vereinfachte Ausdrücke für die lebendige Kraft und die Arbeit zu Grunde gelegt.

Ist die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \alpha_0 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2; \quad \alpha_0 > 0$$

und die Arbeit

$$Q dx = -(\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots) dx; \quad \beta_1 > 0,$$

so lautet die Differentialgleichung der Bewegung

$$\alpha_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots = 0$$

oder

$$\frac{d^2 x}{d \left(t \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}} \right)^2} + x + \frac{\beta_2}{\beta_1} x^2 + \frac{\beta_3}{\beta_1} x^3 + \dots = 0.$$

Die Formeln für den jetzigen Fall ergeben sich dadurch, daß man in §§ 1—5 und I, §§ 1—4 t durch $t \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}$ und α_n durch

$-\frac{\beta_n}{\beta_1}$ ($n=2, 3, \dots$) ersetzt. Infolge davon werden die Zeiten $\omega, \omega_1, \omega_2$ durch $\omega \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}, \omega_1 \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}, \omega_2 \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}$, die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ durch $\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \frac{dx}{dt}$ und die Geschwindigkeit c' in der Gleichgewichtslage $x=0$ durch $c' \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}$ ersetzt.

Demnach nehmen die früheren Formeln die folgende Gestalt an¹⁾.

$$\begin{aligned}\bar{c} &= -c - \frac{2\beta_2}{3\beta_1} c^3 - \frac{4\beta_2^2}{9\beta_1^2} c^5 + \dots, \\ c' &= \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}} \left\{ c + \frac{\beta_2}{2\beta_1} c^3 + \left(\frac{\beta_2}{4\beta_1} - \frac{\beta_2^2}{18\beta_1^2} \right) c^5 + \dots \right\}, \\ \omega &= \pi \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left\{ 1 + \left(\frac{5\beta_2^2}{12\beta_1^2} - \frac{3\beta_2}{8\beta_1} \right) c^2 + \left(\frac{5\beta_2^2}{18\beta_1^2} - \frac{\beta_2\beta_2}{4\beta_1^2} \right) c^4 + \dots \right\}, \\ \omega_1 &\left. \vphantom{\omega} \right\} = \frac{\omega}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left\{ \frac{2\beta_2}{3\beta_1} c + \frac{2\beta_2^2}{9\beta_1^2} c^3 + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Von der Übertragung der übrigen Formeln wollen wir absehen.

In den in der Einleitung angeführten physikalischen Arbeiten sind die Schwingungen eines durch Torsion des Aufhängefadens aus dem Meridian abgelenkten Magneten untersucht, für welche die Differentialgleichung gilt:

$$K \frac{d^2 x}{dt^2} = -D \sin(\gamma + x) + D \frac{\omega - \gamma - x}{\omega - \gamma} \sin \gamma$$

oder

$$\alpha_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_1 x + \beta_2 x^3 + \beta_3 x^5 + \dots = 0;$$

$$\alpha_0 = K, \quad \beta_1 = D \left(\frac{\sin \gamma}{\omega - \gamma} + \cos \gamma \right), \quad \beta_2 = -\frac{D}{2} \sin \gamma, \quad \beta_3 = -\frac{D}{6} \cos \gamma, \dots$$

Durch Drehung des Aufhängefadens um einen Winkel ω erhält der Magnet eine Gleichgewichtslage, welche mit dem Meridian den Winkel γ einschließt; mit dieser Gleichgewichtslage bildet der schwingende Magnet zur Zeit t den Winkel x ; K und D sind positive Konstante. Man vergleiche die obige Formel für \bar{c} mit der Formel für die Asymmetrie ε in der Arbeit von F. Richarz und P. Schulze, sowie die Formeln für $\omega, \omega_1, \omega_2$ mit den Formeln für T, T_r, T_i in der Arbeit von F. A. Schulze; die obigen Formeln für ω usw. stellen eine Verbesserung der Formeln für T usw. dar.

1) Nach § 1 läßt sich bei jeder Reihe ein weiteres Glied anschreiben.

Es sei jetzt die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2; \quad \alpha_0 > 0$$

und die Arbeit

$$Q dx = -(\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots) dx; \quad \beta_1 > 0.$$

Es genügt, die verschiedenen Behandlungsweisen dieses allgemeinen Falles kurz zu skizzieren; dabei sollen die Reihenentwicklungen mit der der früheren Arbeit entsprechenden Gliederzahl angeschrieben werden, damit unmittelbar anwendbare, jedoch nicht zu komplizierte Formeln zur Verfügung stehen.

Die Lagrangesche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \frac{dx}{dt}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q$$

geht, wenn man

$$t = \tau \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}$$

als unabhängige Veränderliche einführt, über in

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = a x^2 + b \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + a' x^3 + b' x \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \dots;$$

$$a = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad b = -\frac{\alpha_2}{2\alpha_0},$$

$$a' = \frac{\alpha_2}{\alpha_0} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_0 \beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_1}, \quad b' = \frac{\alpha_1^2}{2\alpha_0^2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$$

usw. Führt man

$$u = \tau \sqrt{1 + \lambda_2 c^2 + \dots} = \tau (1 + \frac{1}{2} \lambda_2 c^2 + \dots)$$

als neue Veränderliche ein und setzt man

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \psi_n(u),$$

während die Anfangsbedingungen

$$\psi_1(0) = 1, \quad \psi_2(0) = 0, \dots; \quad \psi_1'(0) = 0, \quad \psi_2'(0) = 0, \dots$$

vorgeschrieben sind, so lassen sich $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ so bestimmen, daß $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ periodische Funktionen von u mit der Periode 2π werden. Man findet so nach der Methode I, § 4 und § 10:

$$\lambda_2 = \frac{3\beta_2}{4\beta_1} - \frac{5\beta_1^2}{6\beta_1^2} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{2\alpha_0 \beta_1} + \frac{\alpha_1^2}{8\alpha_0^2} - \frac{\alpha_2}{2\alpha_0}$$

usw. Ist ω die halbe Periode in Bezug auf die Veränderliche t , ω_1 die halbe Periode in Bezug auf die Veränderliche t , so hat man

$$\pi = \omega_1 (1 + \frac{1}{2} \lambda_2 c^2 + \dots)$$

und

$$\omega_1 = \omega \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}},$$

also

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} (1 - \frac{1}{2} \lambda_2 c^2 + \dots)$$

oder

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left\{ 1 + \left(\frac{5\beta_1^2}{12\beta_1^2} - \frac{3\beta_2}{8\beta_1} - \frac{\alpha_1\beta_2}{4\alpha_0\beta_1} + \frac{\alpha_2}{4\alpha_0} - \frac{\alpha_1^2}{16\alpha_0^2} \right) c^2 + \dots \right\}.$$

Ist zur Zeit $t = 0$

$$x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

so ist zur Zeit t , wenn

$$u = \frac{\pi}{\omega} t$$

gesetzt wird,

$$x = c\psi_1(u) + c^2\psi_2(u) + c^3\psi_3(u) + \dots;$$

$$\psi_1 = \cos u,$$

$$\psi_2 = \left(\frac{\alpha_1}{4\alpha_0} - \frac{\beta_2}{2\beta_1} \right) + \frac{\beta_2}{3\beta_1} \cos u + \left(\frac{\beta_2}{6\beta_1} - \frac{\alpha_1}{4\alpha_0} \right) \cos 2u,$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = & \left(\frac{\alpha_1\beta_2}{6\alpha_0\beta_1} - \frac{\beta_1^2}{8\beta_1^2} \right) + \left(\frac{\alpha_2}{16\alpha_0} - \frac{7\alpha_1^2}{64\alpha_0^2} + \frac{5\alpha_1\beta_2}{48\alpha_0\beta_1} + \frac{29\beta_1^2}{144\beta_1^2} - \frac{\beta_2}{32\beta_1} \right) \cos u \\ & + \left(\frac{\beta_1^2}{9\beta_1^2} - \frac{\alpha_1\beta_2}{6\alpha_0\beta_1} \right) \cos 2u + \left(\frac{\beta_2}{32\beta_1} + \frac{\beta_1^2}{48\beta_1^2} - \frac{5\alpha_1\beta_2}{48\alpha_0\beta_1} + \frac{7\alpha_1^2}{64\alpha_0^2} - \frac{\alpha_2}{16\alpha_0} \right) \cos 3u \end{aligned}$$

usw. Die zur Zeit $t = \omega$ (für $u = \pi$) erreichte äußerste Lage $x = \bar{c}$ wird dargestellt durch

$$\bar{c} = -c - \frac{2\beta_2}{3\beta_1} c^2 - \frac{4\beta_1^2}{9\beta_1^2} c^3 + \dots$$

Man kann auch den jetzigen allgemeineren Fall auf den in §§ 1—5 und I, §§ 1—4 behandelten speziellen Fall zurückführen. Setzt man

$$\xi = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}} \int_0^x \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots} dx = \sqrt{\beta_1} \left(x + \frac{\alpha_1}{4\alpha_0} x^2 + \left(\frac{\alpha_2}{6\alpha_0} - \frac{\alpha_1^2}{24\alpha_0^2} \right) x^3 + \dots \right)$$

und

$$t = t \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}},$$

so wird

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{\alpha_1}{4\alpha_0} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\beta_1}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_1^2}{8\alpha_0^2} - \frac{\alpha_2}{6\alpha_0} \right) \left(\frac{\xi}{\sqrt{\beta_1}} \right)^3 + \dots,$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2,$$

$$Qdx = (-\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots) d\xi,$$

wobei gesetzt ist:

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \left(\frac{3\alpha_1}{4\alpha_0} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right),$$

$$a_3 = \frac{1}{\beta_1} \left(\frac{2\alpha_2}{8\alpha_0} - \frac{19\alpha_1^2}{24\alpha_0^2} + \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_0\beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_1} \right)$$

usw. Dadurch erhält die Differentialgleichung die frühere Form:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi = a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots$$

Bezeichnet man die äußersten Werte von ξ mit c und \bar{c} , so besteht zwischen c und c sowie zwischen \bar{c} und \bar{c} dieselbe Beziehung wie zwischen ξ und x ; es ist

$$c = \sqrt{\beta_1} \left(c + \frac{\alpha_1}{4\alpha_0} c^2 + \dots \right).$$

Führt man diesen Wert von c in die Formel:

$$\omega = \omega_1 \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} = \pi \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \{ 1 + (\frac{5}{12} a_2^2 + \frac{2}{3} a_3) c^2 + \dots \}$$

ein, so erhält man die oben angeschriebene Formel für ω . Ebenso ergeben sich aus

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left(\frac{2}{3} a_2 c - \frac{2}{3} a_3^2 c^2 + \dots \right),$$

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left(\frac{2}{3} a_2 c - \frac{2}{3} a_3^2 c^2 + \dots \right)$$

die Formeln

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left\{ \left(\frac{2\beta_2}{3\beta_1} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0} \right) c + \left(\frac{2\beta_2^2}{9\beta_1^2} - \frac{\alpha_1\beta_2}{6\alpha_0\beta_1} \right) c^2 + \dots \right\},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left\{ \left(\frac{2\beta_2}{3\beta_1} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0} \right) c + \left(\frac{2\beta_2^2}{9\beta_1^2} - \frac{\alpha_1\beta_2}{6\alpha_0\beta_1} \right) c^2 + \dots \right\}.$$

Schließlich läßt sich auch die in § 4 und § 5 dargestellte Methode unmittelbar auf unseren allgemeineren Fall anwenden. Das Prinzip der lebendigen Kraft

$$T = \int_0^x Q dx$$

ergibt

$$\begin{aligned} & (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \\ &= \beta_1 (c^2 - x^2) + \frac{2}{3} \beta_2 (c^2 - x^2) + \frac{2}{4} \beta_3 (c^4 - x^4) + \dots \end{aligned}$$

Hieraus erhält man die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = \pm c'$ in der Lage $x=0$:

$$c' = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}} \left[c + \frac{\beta_2}{3\beta_1} c^3 + \left(\frac{\beta_3}{4\beta_1} - \frac{\beta_2^2}{18\beta_1^2} \right) c^5 + \dots \right].$$

Nimmt man zunächst $c > 0$ an, so ist

$$t = \int_x^c \sqrt{\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots}{\beta_1 (c^2 - x^2) + \frac{2}{3} \beta_2 (c^2 - x^2) + \frac{2}{4} \beta_3 (c^4 - x^4) + \dots}} dx.$$

Der Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen gestattet die Faktorenerlegung

$$(c - x)(x - \bar{c}) \Phi_1(x),$$

wo \bar{c} die oben angeschriebene Potenzreihe von c und

$$\Phi_1(x) = \beta_1 \left\{ 1 + \frac{2\beta_2}{3\beta_1} x + \frac{\beta_3}{2\beta_1} x^2 + \left(\frac{\beta_3}{2\beta_1} - \frac{4\beta_2^2}{9\beta_1^2} \right) c^2 + \dots \right\}$$

ist. Es gilt die Reihenentwicklung

$$\sqrt{\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots}{\Phi_1(x)}} = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots;$$

$$g_0 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left[1 + \left(\frac{2\beta_2}{9\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{4\beta_1} \right) c^2 + \dots \right],$$

$$g_1 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left[\frac{\alpha_1}{2\alpha_0} - \frac{\beta_2}{3\beta_1} + 0 \cdot c + \dots \right],$$

$$g_2 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left[\frac{\alpha_2}{2\alpha_0} - \frac{\alpha_1^2}{8\alpha_0^2} + \frac{\beta_2^2}{6\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{4\beta_1} - \frac{\alpha_1 \beta_2}{6\alpha_0 \beta_1} + \dots \right]$$

usw. Wie in § 4 rechnet man

$$t = \int_x^c (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots) \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}}$$

aus; setzt man für g_0, g_1, g_2, \dots die angeschriebenen Werte ein und beachtet man, daß jetzt

$$\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} = -x \sqrt{\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots}{\Phi_1(x)}}$$

ist, so erhält man die Formel

$$t = \frac{\omega}{\pi} \arccos \frac{x - \frac{c + \bar{c}}{2}}{\frac{c - \bar{c}}{2}} - x' \left[\left(\frac{\alpha_1}{2\beta_1} - \frac{\alpha_0\beta_2}{8\beta_1^2} \right) + \left(\frac{\alpha_2}{4\beta_1} - \frac{3\alpha_1^2}{16\alpha_0\beta_1} + \frac{7\alpha_0\beta_2^2}{86\beta_1^2} - \frac{\alpha_0\beta_2}{8\beta_1^2} - \frac{5\alpha_1\beta_2}{12\beta_1^2} \right) x + \dots \right],$$

wo ω den bereits oben angegebenen Wert hat. Die endgültige Formel für t gilt auch im Falle $c < 0$. Für $x = \bar{c}$ geht t in ω , für $x = 0$ in ω_1 über.

Die Methode von § 5 überträgt sich leicht auf den jetzigen Fall; insbesondere liefert sie x in Form einer nach Kosinus der Vielfachen von $u = \frac{\pi}{\omega} t$ fortschreitenden Reihe, welche aus der oben aufgestellten Reihe $x = c\psi_1(u) + c^2\psi_2(u) + \dots$ durch Umstellung der Glieder hervorgeht.

Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie.

Von F. LUDWIG in Greiz.

Im 4. Heft des Jahrganges 1898 dieser Zeitschrift habe ich in einem Aufsatz über „die Variabilität der Lebewesen und das Gaußsche Fehlergesetz“ einen Überblick gegeben über die Arbeiten, die bis dahin auf dem mathematischen Grenzgebiet nach den biologischen Wissenschaften (Anthropologie, Zoologie, Botanik) hin erschienen waren. Inzwischen hat sich dieses Grenzgebiet mächtig erweitert, ohne daß meines Wissens deutsche Mathematiker sich mit diesen neuen interessanten Anwendungen ihrer Wissenschaft — von den Herausgebern der Fechnerschen Kollektivmaßlehre abgesehen — näher beschäftigt hätten, während die Mathematiker Englands und Amerikas unausgesetzt tätig waren. Eine neue internationale Zeitschrift, *Biometrika* (A Journal for the Statistical Study of Biological Problems edited in Consultation with Francis Galton by W. F. R. Weldon, Karl Pearson and C. B. Davenport) ist im Oktober 1901 erstmals erschienen und liegt bereits im II. Heft des II. Jahrganges vor. Ich glaubte daher im folgenden eine Übersicht über die seit dem Druck meines genannten Aufsatzes erschienenen Arbeiten auf dem Gebiet der Biometrie zu Nutz und Frommen der wissenschaftlichen Arbeiter diesseits und jenseits der Grenze geben zu sollen.

1. Variationsstatistik etc.

(„Biom.“ = *Biometrika*.)

1. *Amann, J.* Application du calcul des probabilités à l'étude de la variation d'un type végétal (*Bryum cirrhatum* Br. Eur.) Bull. Herb. Boissier. T 2. Genève et Bale. 1896. p. 577—590.

2. *Ammon, Otto.* Der Abänderungsspielraum. Ein Beitrag zur natürlichen Auslese. Berlin 1896, Ferd. Dümmler. 54 p.

3. *Ammon, Otto.* Über den Kopf-Index. („Die Umschau“. Jahrgang III. 1899. No. 29. 15. Juli. p. 574.)

4. *Ammon, Otto.* Zur Anthropologie der Badener. (Bericht über die von der anthropologischen Kommission des Karlsruher Altertumsvereins an Wehrpflichtigen und Mittelschülern vorgenommenen Untersuchungen, im Auftrag der Kommission bearbeitet. 707 pp. mit 24 Figuren im Text und 15 Tafeln. Jena 1899, Gustav Fischer.
- 4b. *Ammon, Otto.* Zur Theorie der reinen Rassetypen. *Ztschr. f. Morphologie und Anthropologie.* 1900. Bd. II. H. 3. p. 679—685.
5. *Bateson, M. A.* Heredity, Differentiation and other Conceptions of Biology. A Consideration of Professor Karl Pearson's Paper, On the Principle of Homotyposis. *Proceed. of the R. S.* Vol. 69. 1901. p. 193—205.
6. *Bateson, W.* On numerical variation in teeth with a discussion of the conception of homology. *Proc. Zool. Soc.* 1892. p. 102—115.
7. — On the colour variations of a beetle of the family Chrysomelidae statistically examined. *Proc. Zool. Soc.* 1895. p. 850—860.
8. — On progress in the study of variations. *Science Progress.* Vol. 7 (Vol. 2 of new Ser.). No. 6. I 1897. II 1898. 16 pp.
9. *Bateson, W.* and *H. H. Brindley.* On some cases of variation in secondary sexual characters statistically examined. *Proceed. of the Zool. Soc. of London.* 1892. p. 585—594.
10. *Blanchard, N.* On the Inheritance in Coat-Colour of Thoroughbred Horses (Grandsire and Grandchildren) *Biom.* V. I p. 361—364.
11. — On Inheritance (Grandparent and Offspring) in Thoroughbred Racehorses *Biom.* Vol. II p. 229—233.
12. *Blankinship* and *Davenport.* A precise criterion of species. *Science N. S.* Vol. 7 Nr. 177 1898 p. 685—695 (Allgem. Methode und Var. von *Typha latifolia* u. *angustifolia*).
13. v. *Bortkewitsch, L.* Das Gesetz der kleinen Zahlen. gr. 8°. VII, 52 pp. Leipzig (B. G. Teubner) 1898. — *Naturw. Rundschau.* 1898. No. 53. p. 693.
14. *Breton, Mary* and *Pearson, Karl.* Inheritance of the Duration of Life and the Intensity of Natural Selection in Man. *Biom.* Vol. I p. 50—89.
15. *Brewster, Edwin Tenney.* Variation and sexual selection in man. (Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XXIX. 1898. No. 2. p. 45—51.)
16. *Browne, E. T.* Variation in *Aurelia aurita* L. *Biom.* V. I p. 90—108.
17. *De Bruyker, Caesar.* Over correlatieve variatie bij de Rogge en de Gerst. (I. c. p. 42—56. Mit 6 Figuren.)
18. *De Bruyker, C.* Correlatieve variatie bij de Rogge. 2e mededeeling (Overgedrukt nit de Handelingen van het derde Vlaamsch natuur- en geneeskundig Congres gehouden te Antwerpen op 24 September 1899. p. 75—87.) Handelt weiter über Korrelation zwischen Länge der Ähren und des obersten Halmgliedes beim Roggen.
19. *Bumpus, H. C.* The variations and mutations of the introduced squar-row. (*Biol. Lectures Woods Holl.* (1896.) 1897. p. 1—15.)
20. *Bumpus, H. C.* On the identification of fish artificially hatched. (*Amer. Natural.* V. 32. 1898. No 378. p. 407—412.)
21. *Burkill, M. A.* On the Variation of the Flower of *Ranunculus arvensis* *Journ. Asiatic Society of Bengal* Vol. LXXI. Part. XI No. 2. 1902. p. 93—120.
22. *Byrne, L. W.* On the Number and Arrangement of the Bony Plates of the Young John Dory. *Biom.* Vol. II. p. 115—120.
23. *Chodat.* Note sur la variation numérique dans l'Orchis Morio. *Bull. de l'Herbier Boissier* II Série. 1901. I p. 682 ff.
24. *Darbishire, A. D.* Note on the Results of Crossing Japanese Waltzing mice with European Albino Races. *Biom.* Vol. II. p. 101—104, 165—173.
25. *Davenport, Ch. B.* Statistical methods with special reference to biological variation. 148. pp. New-York City (John Wiley & Sons) 1899.
26. *Davenport, Ch. B.* Biological Lectures from the Marine Biological Laboratory of Woods Holl Boston 1898. p. 267—272. (Aimes of the Quantitative Study of Variation.)
27. — The Statistical Study of Evolution. *The Popular Science Monthly* September 1901. p. 447—480.
28. *Davenport, Chas. B.* A History of the Development of the Quantitative Study of Variation *Science N. S.* Vol. XII. No 310. 1900. p. 864—870.
29. *Davenport, C. B.* On the Variation of the Statoblasts of *Pectinatella magnifica* from Lake Michigan at Chicago. *American Naturalist.* Vol. XXXIV. 1900. Boston. p. 959—968.
30. — On the Variation of the Shell of *Pecten irradians* Lamark from Long

Island. Am. Nat. Vol. XXXIV. 1900. p. 863—877.

31. *Dimon, Camp Abigail*. Quantitative Study of the Effect of Environment upon the Forms of *Nassa obsoleta* and *Nassa trivittata* from Cold Spring Harbor, Long Island. Biom. V. II. p. 24—43.

32. *Duncker, Gg.* Preliminary report on the results of statistical and ichthyological investigations made as the Plymouth Laboratory. (Journal of the Marine Biological Association. N. S. Vol. V. No. 2. April 1898. p. 172—175.)

33. *Duncker, Gg.* Bemerkung zu dem Aufsatz von H. C. Bumpus, „The variations and mutations of the introduced *Littorina*“ [Das Maß der Variabilität.] (Biolog. Zentralblatt. Bd. XVIII. 1898. No. 15. p. 569—573.)

34. *Duncker, Georg*. Die Methode der Variationsstatistik. (Sep.-Abdruck aus dem Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen von Wlh. Roux in Halle a. S. Bd. VIII. 1889. No. 1. p. 112—183. Mit 8 Figuren im Text. Leipzig (Wilhelm Engelmann).)

35. *Duncker, Georg*. Wesen und Ergebnisse der variationsstatistischen Methode in der Zoologie. (Verhandlungen der Deutschen zoologischen Gesellschaft. 1899. p. 209—226.)

36. *Duncker, Georg*. Kritisches Referat über Heincke (50). (Biolog. Zentralblatt. Bd. XIX. 1899. No. 11. 1. Juni 1899. p. 363—383.)

37. *Duncker, Georg*. On Variation of the rostrum in *Palaemonetes vulgaris* Herbst. The American Naturalist. Vol. XXXIV. No. 404. Aug. 1900. p. 621—633.

38. *Duncker, Georg*. Variation and Asymmetrie bei *Pleuronectus flesus* L. Sonderabdr. aus Wissenschaftl. Meeresuntersuchungen, herausgegeben von der Kommission zur Untersuchung der Deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Neue Folge III. Bd. Abt. Helgoland Heft 2. p. 333—402, Taf. XI—XIV. Kiel und Leipzig 1900.

39. *Elderton, Palin*. Tables for Testing the Goodness of Fitt of Theory to Observation. Biom. Vol. I. p. 155—168.

40. *Elderton, Palin*. Interpolation by Finite Differences. Two independent Variables. Biom. V. II. p. 105—107.

41. *Fancett Cicely D., Lee Alice*. A Second Study of the Variation and Correlation of the human Skull, with special reference to the Nagada Crania. Biom. V. I. p. 408—467.

42. *Fechner, G. T.* Kollektivmaßlehre Im Auftrag der Königl. Sächs. Ges. der Wissensch. herausgegeben von Gottl. Friedr. Lipps, 483 pp. Leipzig [Engelmann] 1897.

43. *Field, William L. W.* A contribution to the study of individual variation in the wings of Lepidoptera. (Proceedings of the American Acad. of Arts and Sciences. Vol. XXXIII. No. 21. June 1898. p. 389—396.)

44. *Galton, Francis*. The most suitable Proportion between the Values of First and Second Prices. Biom. Vol. I. p. 385—389.

45. *Gallardo, Angel*. La Phytostatistique. Bull. Congrès internat. de Bot. à l'Exposition Universelle de 1900. Paris. p. 102—109.

46. Les Mathématiques et la Biologie. Deuxième Congrès international des Mathématiciens Paris. 1900. p. 395—403.

47. — Las Matemáticas y la Biología. Anales de la Sociedad Científica Argentina. Buenos Aires. 1901. t. LI. p. 112—122.

48. — Concordancia entre les polígonos empiricos de variación y les correspondientes curvas teoricas. I. c. t. LII. 1901. p. 61—68.

49. *Gallardo, Angel*. Sur la variabilité tératologique chez la Digitale. Compt. rend. Congrès internat. de Bot. à l'Expos. Univers. de 1900. Paris. p. 108—111.

50. *Heincke, Fr.* Naturgeschichte des Heringa. 2 Bde. Text und 1 Band Tafeln. Bisher liegt 1 Band Text und der Tabellenband vor. (Abhandlungen des Deutschen Seefischereivereins. Bd. II. Heft 1—3. CXXXVI. 128 Quartseiten, Tabellenband erst XI, 206 pp., und 26 prächtig ausgeführten Tafeln mit 17 pp. Erläuterungen.)

51. *Helm, G.* Über statistische Beobachtungen biologischer Erscheinungen. (Sitzungsbericht und Abhandl. der Naturw. Gesellsch. Isis zu Dresden. 1899. Januar—Juni. p. 11.)

52. *Helm, Georg*. Die Wahrscheinlichkeitalehre als Theorie der Kollektivbegriffe. Ostwald Annalen der Naturphilosophie Leipzig. I 1902. S. 364—381. Zur Theorie auch Bruns in Wundt's Philos. Stud. Bd. 14. 1899. Lipps u. Wundt's Philos. Stud. Bd. 17. 1901.

53. *Hensgen, C.* Biometrische Untersuchungen über die Spielarten von *Helix nemoralis*. Biom. V. I. p. 468—492.

54. *Jost, L.* Über die Blüten-Anomalien bei *Linaria spuria*. (Biol. Zentralblatt. Bd. XIX. No. 5 u. 6.

- p. 145—195. — Ref. Bot. Zentralblatt. LXXX. 1899. p. 21—26.)
55. *Latter, Oswald H.* The Egg of *Cuculus Canorus*. Biom. V. I. p. 164—176.
56. *Lee, Alice* assisted by *Pearson, V.* Data for the Problem of Evolution in Man. VI. A First Study of the Correlation of the Human Skull. Philos. Transact. A Vol. 196. p. 225—264.
57. *Lee, Alice.* Prof. Dr. Ludwig. On Variation and Correlation in Plants. Biom. V. I. p. 316—318.
58. *Lee, Alice.* On Inheritance (Great-Grandparents and Great-great-grandparents and Offspring) in Thoroughbred Racehorses. Biom. V. II. p. 234—237.
59. *Levens, B. A., Whiteley M. A.* Data for the Problem of Evolution in Man. A Second Study of the Variability and Correlation of the Hand. Biom. Vol. I. p. 343—360.
60. *Ludwig, F.* Über Variationskurven. 1. Weiterer Ausbau der mathematischen Grundlage, Neue Anwendungen 2. Neue Fibonaccikurven und das Gesetz der Nebenzahlen. Botanisches Zentralbl. Bd. 75. 1898.
61. *Ludwig, F.* Über Variationspolygone und Wahrscheinlichkeitskurven. Bot. Zentralbl. Beihefte Bd. IX. H. 2. 1900.
62. — Über Variationspolygone und Wahrscheinlichkeitskurven. Bot. Zentralbl. XXI. 1900. No 15. (82 Bd. No. 2).
63. *Ludwig, F.* Een fundamenteel Verschil in de Veranderlijkheid bij het Dier en de Plant? Botanisch Jaarboek uitgegeven door het Kruidkundig Genootschap Dodonaea te Gent. Elfde Jahrgang 1899. p. 109—121.
64. *Ludwig, F.* Über neuere Ergebnisse der Variationsstatistik. Sonderabdr. aus d. 39—42. Jahresber. der Gesellsch. von Freunden d. Naturw. in Gera (Reuß). 1896—1899. 22. S.
65. *Ludwig, F.* Das Liebesorakel der Wucherblume und die Gesetze der pflanzlichen Variation. („Mutter Erde“. Jahr. II. 1900. No 8. p. 150—153. 4. Fig. — No. 9. p. 164—167. 5 Fig.)
66. *Ludwig, F.* Variationsstatistische Probleme und Materialien. Biom. Vol. I. p. 11—29, 316—318.
67. *Lutz, Frank E.* A study of the Variation in the Number of Grooves upon the Shells of *Pecten irradians* Lam. Science N. f. Vol. XII. 1900. p. 371—373.
68. *Lutz, Frank E.* Note on the Influence of Change in Sex on the Intensity of Heredity. Biom. Vol. II. p. 237.
69. *Macdonell, W. R.* Criminal Anthropometry and the Identification of Criminals. Biom. Vol. I. p. 177—227.
70. *Macdonell, W. R.* On the Influence of Previous Vaccination in cases of Smallpox. Biom. V. I. p. 375—384. A Further Study V. II. p. 135—144.
71. *Mac Leod, J.* Over de correlatie tusschen lengte en breedte van licht en schaduwbladen bij den groenen an den bruinen beuk. (Hendelingen van het tweede Vlaamsch natuur-en geneeskundig congres gehouden te Gent op 28. Augustus 1898. p. 29—41.)
72. *Mac Leod, J.* Over de veranderlijkheid van het aantal randbloemen en het aantal schijfbloemen bij de Korenbloem (*Centaurea Cyanus*) en over correlatie verschijnselen. (Hendelingen van het derde Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres gehouden te Antwerpen op 24. September 1899.)
73. *Mac Leod, J.* Over de correlatie tusschen het aantal meeldraden en het aantal stampers bij het speenkruid (*Ficaria ranunculoides*). (Botanisch Jaarboek Dodonaea. Elfde Jaarg. 1899. Gent. p. 91—107.)
74. *Matsdorff, C.* Variationskurven. Referate über die einschläg. Arbeiten in Just's Bot. Jahresb. 1897 ff. Jahre.
75. *Obermayer, Albert Edler v.* Ein Apparat zur Veranschaulichung des Fehlerverteilungsgesetzes. (Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrg. 1899. Wien — Ref. Naturw. Rundschau. XIV. 1899. No. 39. p. 500.)
76. *Obermayer, A. von.* Quincunx zur Veranschaulichung des Fehlergesetzes von *Francis Galton*, F. R. S. (Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrg. 1900. Heft 2. 3 pp.)
77. *Pearson, Karl.* Contributions to the mathematical theory of evolution. Philos. Transact. R. Soc. of London. Vol. 185 A. p. 71—110. 1894. — II. Skew Variation on homogeneous material. Philos. Trans. A 186. 1895. p. 343—414. — III. Repression, Heredity and Panmixia. Phil. Trans. A 187. 1896. p. 253—318.
78. *Pearson, K. and Lee, Alice.* On the distribution of frequency (variation and correlation) of the barometric height at divers stations. Phil. Trans. A. Vol. 199. 1897. p. 423—469.
79. *Pearson, K.* On the relative variation and correlation in civilised

and uncivilised races. *Proceed. Roy. Soc. Vol. 61. 1897. p. 343—357.*

80. *Pearson, K.* Mathematical contributions to the theory of evolution. Skew Variation in homogeneous Material. *Proceed. of the Roy. Soc. Vol. 57. 1894. p. 257—266.*

81. — Note on reproductive Selection. *Vol. 59. 1896. p. 302—305.*

82. — On telegony in man, etc. *Vol. 60. 1896. p. 273—283.*

83. — On a form of spurious correlation which may arise when indices are used in the measurement of organs. *Vol. 60. 1897. p. 489—498. Dazu Galton (p. 498—502).*

84. — Cloudiness, note on a nouvel case of frequency. *Vol. 62. 1897. p. 287—290.*

85. — On the law of ancestral heredity. *V. 62. 1898. p. 386—417.*

86. *Pearson, K. and Miss Cicely D. Fawcett.* On the Inheritance of the cephalic index. *Vol. 62. 1898. p. 413—417.*

87. *Pearson, K. and Filon, L. N. G.* VII. Mathematical contributions to the theory of Evolution: IV On the probable errors of frequency constants and on the influence of Random selection on variation and correlation. *Phil. Transact. Roy. Soc. London. Ser. A. Vol. 191. 1898. p. 229—311.*

88. *Pearson, Karl.* Mathematical contributions to the theory of evolution. V. On the reconstruction of the stature of prehistoric races. (*Philos. Transact. of the Roy. Soc. of London. Ser. A. Vol. 192. p. 179—244. London 1898.*)

89. *Pearson, K.* On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling. *Philosophical Magazine for July 1900. p. 157—175.*

90. *Pearson, Karl, Breton, M. Yule, G. U.* Data for the Problem of Evolution in Man. On the Correlation between Duration of Life and the Number of Offspring. *Proceed. Roy. Soc. Vol. 67. 1900. p. 159—179.*

91. *Pearson, Karl.* Mathematical Contributions to the Theory of Evolution VII. On the Correlation of Characters not Quantitatively measurable. *Philos. Transact. A. Vol. 195. 1900. p. 1—47.*

92. — Math. Contr. to the Theory of Evolution VIII. On the Inheritance of Characters not capable exact quan-

titative Measurement. *Phil. Trans. A. Vol. 195. 1900. p. 79—150.*

93. *Pearson, K.* Math. Contrib. to the Theory of Evolution IX. On the Principle of Homotyposis and its Relation to Heredity, to the Variability of the Individual and to that of the Race. P. T. Homotyposis in the Vegetable Kingdom. *Philos. Transact. A. Vol. 197. 1901. p. 285—379.*

94. *Pearson, K.* Note on Variation in Leaves of Mulberry Trees. *Biom. Vol. I. p. 258—261.* — On Inheritance in the Shirley Poppy. *Coop. Inv. of Pl. Biom. V. II. p. 56—100.*

95. *Pearson, K. and G. N. Yule.* Note on Variation of Ray-flowers of *Chrysanthemum leucanthemum* L at Keswick. *Biom. V. I. p. 319.*

96. *Pearson, K.* On the Fundamental Conceptions of Biology. *Biom. V. I. p. 320—344.*

97. *Pearson, K.* Variation in the Egg of *Passer domesticus*. *Biom. V. I. p. 256.*

98. *Pearson, K.* Note on Dr. Simpson's Measurements of *Paramaecium caudatum*. *Biom. V. I. p. 404—407.*

99. *Davenport and Pearson.* Strobilata of *Pectinatella magnifica*. *Biom. V. I. p. 128.*

100. *Pearson, Karl.* On the Systematic Fitting of Curves to Observations and Measurement. *Biom. Vol. I. p. 255—303. Vol. II. p. 1—23.*

101. — The Law of Ancestral Heredity. *Vol. II. p. 211—228.*

102. *Pearson.* Note on Francis Galton's Individual Difference Problem in Statistic.

103. *Powys, A. O.* Data for the Problem of Evolution in Man. Anthropometric Data from Austral. *Biom. Vol. I. p. 30—49.*

104. *Schuster, E. H. J.* Variation in *Eupagurus Prideauxii* Heller. *Biom. Vol. II. p. 191—210.*

105. *Sheppard, W.* New Tables of the Probability Integral. *Biom. V. II. p. 174—190.*

106. *Shull George, Harrison.* A Quantitative Study of Variation in the Bracts, Rays and Dish Florets of *Aster Shortii* Hook., *A. Novae-Angliae* L., *A. Punicus* L., *A. Prenanthoides* Muhl. from Yellow Springs Ohio. Contributions from the Biological Laboratory of Antioch College at Yellow Springs Ohio (W. L. Tower) No. 5. *American Naturalist. Vol. XXXVI. No. 422. 1902. p. 111—152.*

107. *Shull, G. H.* Seasonal Change in the Characters of *Aster prenanthoides* (Mühl.) Biom. V. II. p. 113—114.
108. *J. G. Simpson.* The Relation of Binary Fission to Variation. Biom. V. I. p. 400—403.
109. *Smallwood, M. E.* Statistical Studies on Sand Fleas Science N. S. Vol. XII. 1900. p. 371—373.
110. *Tower, W. L.* Variations in Color pattern produced by Changes in Temperature and Moisture (Variation on *Leptinotarsa decemlineata* Say, dem Colorado-Käfer). Science N. S. Vol. XII. 1900. No. 297. p. 371—373.
111. *Tower, W. L.* Variation in the Ray-flowers of *Chrysanthemum leucanthemum* at Yellow Springs, Ohio. Biom. V. I. p. 309—315.
112. *Vandevelde, J. J.* Over den invloed van de grotte der zaden op de kieming. (Bot. Jaarboek, uitgegeven door het Kruidkundig Genootschap Dodonaea te Gent. Jaargang X. 1898. p. 109—131. Met plaat III—IX [mit französischem Resumé].)
113. *Verschaaffelt, Ed.* Galtons regression to mediocrity bij ongeslachtelijke voortplanting. (Livre jubilaire dédié à Charles van Bambeke blz. 1—5.) Brussel (Lammertin) 1899. (Blattmessungen bei *Bellis perennis*.)
114. *Vöchting, H.* Über Blüten-Anomalien. Statistische morphologische, experimentale Untersuchungen. Berlin. Bornträger. 1899.
115. *Vogler, Paul.* Über die Variationskurven von *Primula farinosa*. Vierteljahrsschrift d. Naturf. Gesellsch. Zürich XLVI. 1901. p. 264—274.
116. *Vogler, Paul und Schröter.* Variationsstatistische Untersuchungen über *Fragilaria crotonensis* im Plankton des Zürichsees. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich XLVI. 1901. p. 185—206.
117. *Vogler, Paul.* Die Anwendung der Variationsstatistik zur Untersuchung von Planktondiatomeen. Flora od. Allg. bot. Ztg., Ergänzungsband 1892. 4 S.
118. *Vogler, Paul.* Variationskurven bei Pflanzen mit tetrameren Blüten. Arb. aus d. bot. Mus. d. eidg. Polytechnikums. Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellsch. zu Zürich XXVII. 1902. p. 429—436.
119. *De Vries, Hugo.* Over het omkeeren van halve Galton curven. (Bot. Jaarboek, uitgegeven door het Kruidkundig Genootschap Dodonaea te Gent 1899. p. 29—61. Met Plaat I. — Ref. Bot. Zentralbl. Bd. LXXVIII. 1899. p. 43—51.)
120. *De Vries, Hugo.* Über Kurven-selektion bei *Chrysanthemum segetum*. (Berichte der Deutschen Bot. Ges. Bd. XVII. 1899. p. 84—98. — Ref. Bot. Zentralbl. Bd. LXXX.)
121. *De Vries, Hugo.* Über die Periodizität der partiellen Variationen. (Berichte der Deutschen Bot. Ges. Bd. XVII. 1899. p. 46—51. — Ref. Bot. Zentralblatt. LXXX. 1899. p. 21—28.)
122. *De Vries, Hugo.* Über die Abhängigkeit der Fasciation vom Alter bei zweijährigen Pflanzen. (Bot. Zentralbl. Bd. LXXVII. 1899.)
123. *De Vries, Hugo.* On biostrepis in its relation to cultivation. (Annals of Botany. Vol. XIII. No. 51. Sept. 1899. p. 395—420.)
124. *De Vries, Hugo.* Over het periodisch optreden der anomalien op monstreuze planten. (Bot. Jaarboek, uitgegeven door het kruidkundig Genootschap Dodonaea te Gent. Jaargang XI. 1899. p. 46—67. Met plaat I.)
125. *De Vries, H.* Alimentation et sélection. (Sep.-Abdr. ohne Quellenangabe. 1900. p. 17—38.)
126. *De Vries, Hugo.* Mutations-theorie. Amsterdam. 1902.
127. *Warren, Ernest.* Variation and Inheritance in the Parthenogenesis Generations of the Aphid *Hyalopterus tri-rhodus* Walk. Biom. V. I. p. 129—154.
128. *Warren, E.* On observation on inheritance in parthenogenesis. (Proc. Roy. Soc. London. Vol. 65. No. 415. 1890. p. 154—158.)
129. *Weldon, W. F. R.* On the principal objections urged against the theory of natural selection. (Rep. 68. Meet. Brit. Assoc. Bristol 1899. p. 887—902. — Nature. V. 58. No. 1408. 1898. p. 499—506.)
130. *Weldon, W. F. R.* Über die Haupteinwände gegen die Theorie der natürlichen Auslese. (Rede zur Eröffnung der zoologischen Section d. Brit. Assoc. Bristol 1898. — Nature. LVIII. 1898. p. 499. — Naturw. Rundschau. 1898. No. 52 u. 53.)
131. *Weldon, W. F. R.* Change in Organic Correlation of *Ficaria ranunculoides* during the Flowisms Season. Biom. V. I. p. 125.
132. — Variation and Correlation in Lesser Celandine from divers Localities Properative Investigations on Planta. Biom. V. I. p. 145—164.

133. *Weldon, W. F. R.* A First Study of Natural Selection in *Clausilia laminata* Nom. Biom. V. I. p. 109—128.

134. *Whithead, Henry.* Variation in the Moscatel (*Adoxa moschatellina*). Biom. V. II. p. 108—112.

135. *Yule Udm, G.* Variation in the number of Sepals in *Anemone nemorosa* L. Biom. V. I. p. 307—308.

136. *Yule, G. Udm.* Notes on the Theory of Association of Attributes in Statistics. Biom. V. II. p. 121—134.

Die Entwicklung der jungen Wissenschaft wird übersichtlich dargestellt besonders durch die Arbeiten von Bateson (8), Davenport (26, 27, 28), Duncker (35), Angel Gullardo (45, 46, 47, 48), Ludwig (66).

Als Anleitung zu variationsstatistischen Untersuchungen können außer den früher von mir citierten Werken besonders dienen die Lehrbücher von Davenport (25), Georg Duncker (34), Fechner (42).

Nach verschiedener Richtung haben der mathematische Ausbau und die allgemeinen Theorien, welche in Betracht kommen, wesentliche Erweiterungen und Ergänzungen — namentlich durch die Arbeiten von Karl Pearson erfahren (71, 80, 83, 84, 87, 89, 91, 92, 93, 5, 100, 101, 102, 105, 108, 113, 119, 121, 129, 136, 2, 3, 27, 50, 39, 40, 44, 51, 52, 60, 61, 62, 63 und 68, 71, 81, 85, 96, 125, 126, 129, 130).

Auf Anthropometrie und andere biometrische Probleme der Anthropologie beziehen sich die Abhandlungen 3, 4, 6, 14, 15, 41, 56, 59, 69, 70, 79, 82, 86, 88, 90, 103. Außer anderen Anwendungen auf die Zoologie, die sich in einzelnen der citierten Abhandlungen niedergelegt finden, sind Gegenstand der neueren biometrischen Untersuchungen gewesen: von Säugetieren: Pferde und Pferderassen (10, 11, 58), japanische Tanzmäuse und weiße Mäuse (24); von Vögeln: Sperling (19, 97) und Kuckuck (55); Fische (20, 26, 32, 38, 50); ferner Schnecken und Muscheln (30, 31, 33, 53, 67, 133); Kruster (37, 104); Käfer (7, 110); Schmetterlinge (43), Blattläuse (127, 128), Moostierchen (29, 99), Seesterne (60), Quallen (16), Infusorien (98).

Gegenstand der phytometrischen Arbeiten waren: Algen (116, 117); Lebermoose (*Marchantia* 61); Laubmoose (1); Orchideen (23); Gramineen (17, 18, 61, 66); Ranunculaceen: *Ficaria verna* (66, vgl. die frühere Arbeit von Burkill, ferner 21, 64, 72, 131, 132), *Ranunculus*, *Caltha*, *Trollius* (60, 61, 64); *Anemone* (135); *Amygdaleen* (66); *Papilionaceen* (61); *Compositen*: *Bellis* (60), *Petasites* (61), *Homogyne* (66), *Solidago* 2 Arten (61), *Chrysanthemum* (61, vgl. auch die daselbst erörterte Notiz von Lucas; 65, 66, 95, 111, 120, 126), *Tussilago* (60), *Aster* (107, 107); *Centaurea* (72); *Caprifoliaceen*: *Lonicera* (61), *Adoxa* (134); *Scrofulariaceen* (teratolog.) *Linaria* (54, 114), *Digitalis* (49), sonstige Mißbildungen (122, 123, 124), *Primulaceen*: *Primula farinosa* (60, 61, 115); ferner Blätter von Rot-Buche (62, 71), Hainbuche (63), Maulbeerbaum (94).

2. Spaltungsgesetz der Bastarde von Arten und Varietäten.

1. *Bateson and Miss E. R. Saunders.* Experiments. Reports to the Evolution Committee of the Royal Society London Harrison and Sons. 1902. 160 pp.

2. *Correns, C.* Über Levkojenbastarde. Zur Kenntnis der Grenzen der Mendel-

schen Regeln. Bot. Zentralbl. Bd. 84. 1900. No. 43. p. 97—113.

3. *Correns, C.* Bastarde zwischen Maisrassen mit besonderer Berücksichtigung der Xenien. Bibliotheca botanica herausgeg. von Luerssen. Stuttgart 58.

4. *Correns, C. G.* Mendels Regel über das Verhalten der Nachkommenschaft der Rassenbastarde. Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. Bd. 18. 1900. p. 158—168.
5. *Fruhwiert.* Neue Forschungen und ihre Verwertung bei der Pflanzenzüchtung. Jahrbuch d. Deutschen Landwirtschaftsgesellsch. Bd. 17. 1902. p. 220—236.
6. *Mendel, Gregor, Johann.* Über Gesetzmäßigkeiten bei Vererbung nach einer Bastardierung. Abh. d. naturf. Ges. Brunn. 1865. Vol. 4. p. 1. Abgedruckt in Goebel Flora 1900, Ergänzungsband und in Ostwalds Klassikern der exakt. Wissensch. No. 121.
7. *Tschermak, E.* Über künstliche Kreuzung bei *Pisum sativum*. Wien. 1900. 91 S.
8. *Tschermak, E.* Weitere Beiträge über Verschiedenartigkeit der Merkmale bei Kreuzung von Erbsen und Bohnen. Ber. d. D. B. Ges. Bd. 19. 1901. p. 35—51. Zeitschr. f. landwirtsch. Versuchsw. in Österr. 1901. 95 S.
9. *Tschermak, E.* Über Züchtung neuer Getreiderassen mittelst künstlicher Kreuzung. Kritisch historische Betrachtungen. Zeitschr. f. landwirtsch. Versuchswesen in Österr. 1901. 32. S.
10. *Tschermak, E.* Über die gesetzmäßige Gestaltungsweise der Mischlinge (Fortgesetzte Studie an Erbsen und Bohnen) l. c. 1902. 80. S.
11. *De Vries.* Sur la loi de disjonction des hybrides. Compt. rend. de l'Acad. des scienc. Paris 26. Mars 1900.
12. *De Vries, H.* Das Spaltungsgesetz der Bastarde. Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. Bd. 18. 1900. p. 83—90.
13. *De Vries, H.* Über erbungleiche Kreuzungen. Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. Bd. 18. 1900. p. 435—443.
14. *De Vries, H.* Sur l'origine expérimentale d'une nouvelle espèce végétale. Compt. rend. des séances de l'acad. d. sciences Paris 21. 1900. p. 124.
15. — Sur la mutabilité de l'Oenothera Lamarckiana l. c. p. 193.
16. — Variabilité et mutabilité. Congrès internat. de Bot. à l'Exposition univers. de 1900. Paris. 6 S.
17. *De Vries, H.* La loi de Mendel et les caractères constants des hybrides. Compt. rend. des séances de l'Acad. d. Sc. Paris. 2. Févr. 1903. 3 S.
18. — Die Mutationslehre. Veit Leipzig. II. Bd. 1902.
19. *Weldon, W. F. R.* Mendels Laws of Alternative Inheritance in Peas. Biom. V. I. 228—264.
20. — On the Ambiguity of Mendels Categories. Biom. V. II. p. 44.

Die merkwürdigen Gesetzmäßigkeiten bei der Vererbung von Merkmalen bei Bastarden, welche der Brünner Abt Gregor Johann Mendel 1865 entdeckt hatte, haben unabhängig von einander und zunächst unbekannt mit der Arbeit Mendels (6) fast gleichzeitig Hugo de Vries (11, 12), C. Correns (3, 4, 5) und E. Tschermak bestätigt und durch die Wahrscheinlichkeits- und math. Kombinationslehre begründet und in weiterer Folge vor den bestätigenden Experiment abgeleitet. Indem sie mit den verschiedensten Pflanzenspecies und -varietäten experimentierten, fanden sie bald die vererblichen Merkmale verschieden und konnten für sie verschiedene weitere Gesetzmäßigkeiten nachweisen. Zuletzt haben Bateson und Miß Saundes noch mit Schmetterlingen (*Pieris Napi* und der Varietät *bryoniae* derselben und *Pararge egeria* und der Varietät *egerides*) und mit Varietäten von *Atropa Belladonna* und *Lychnis vespertina*, mit Arten von *Datura* und *Matthiola* experimentiert und die Mendelsche Lehre weiter geprüft und erweitert (1). Inzwischen hatte H. de Vries die Entstehung neuer Arten durch Mutation nachgewiesen (14, 15, 16, 18) und den Unterschied zwischen Mutation und Variation wie zwischen Art und Varietät neu und scharf festgelegt, so daß es ihm in seiner jüngsten Arbeit (17), wie es uns scheint, gelungen ist, mit einem Schlag Licht in den scheinbaren Wirrwarr der neu ermittelten Tatsachen und die scheinbaren Ausnahmen des Spaltungsgesetzes der Bastarde zu bringen und seine Hypothese tiefer zu begründen, nach welcher die bei der Kreuzung in Betracht kommenden Merkmale an

gewisse materielle Einheiten gebunden sind. Sie stellen die eigentlichen Einheiten dar, während das Individuum, die Varietät und Species aus ihnen zusammengesetzte komplexe Größen sind. Eine übersichtliche, leichtfaßliche Darstellung der Ergebnisse von Mendel, de Vries, Correns, Tschermak etc. gibt (5) (vgl. auch Naturw. Rundschau 1902 No. 51, 52); während die letzten Untersuchungen in (18) und (17) niedergelegt sind.

Kleinere Mitteilungen.

Über die darstellend-geometrische Konstruktion der Schmiegungebene einer Raumkurve in einem gegebenen Punkt.

Die Aufgabe, bei einer durch Grundriß und Aufriß gegebenen Kurve die Schmiegungebene in einem beliebigen Punkt zu konstruieren, wird in den mir bekannten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie (z. B. dem von Chr. Wiener, Band I, S. 212, Nr. 255, und dem von Rohn-Papperitz, Band I, 2. Auflage, S. 335, Nr. 458) auf die folgende Weise gelöst. Es werden auf der Kurve, deren Tangente im gegebenen Punkt als bekannt vorausgesetzt wird, in der Nähe dieses Punktes willkürlich einige Punkte angenommen und mit dem gegebenen Punkt durch Geraden verbunden, dann die Spuren dieser Geraden mit einer Tafel, z. B. der Grundrißtafel, konstruiert, worauf an den Ort dieser Spuren in der gleichnamigen Spur der erwähnten Tangente der gegebenen Kurve die Tangente gezogen wird, welche Tangente die betreffende Spur der gesuchten Schmiegungebene ist. Es gibt noch ein anderes Verfahren, das mir bei der Ausführung einige Vorteile zu bieten scheint. Man projiziere die gegebene Kurve C parallel der (wieder als bekannt angesehenen) Tangente T im gegebenen Punkt p auf irgend eine Tafel, dann wird die erhaltene Kurve C' in der Projektion p' von p eine Spitze haben, wenn p ein gewöhnlicher Punkt von C ist, und die Tangente von C' in p' wird wieder die fragliche Spur der gesuchten Schmiegungebene von C in p vorstellen. Die Konstruktion bleibt richtig, wenn p ein singulärer Punkt von C ist.¹⁾

Stuttgart.

R. MEHMKE.

1) Die Art des Punktes p' der Kurve C' entspricht dem „Tangentenanblick“ von C in p , vgl. diese Zeitschrift, S. 64 des laufenden Bandes. — Die Projektion von C aus einem beliebigen (nicht dem unendlich fernen) Punkte der Tangente T führte selbstverständlich auch zum Ziel, wäre aber für die wirkliche Ausführung weniger geeignet.

Auskünfte.

F. M., K. In der Tat wird schon in der ersten Auflage von B. Guglers Lehrbuch der deskriptiven Geometrie (Nürnberg 1841) das Wort *Spitze* ausschließlich für den Rückkehrpunkt erster Art gebraucht und für den Rückkehrpunkt zweiter Art das Wort *Schnabel* (nicht „Schnabelspitze“). Eingeführt werden diese Benennungen auf S. 143. — Außer den auf S. 90 des laufenden Bandes dieser Zeitschrift genannten Werken von Wolff, Klingenfeld und Pohlke gibt es allerdings nicht wenige andere, in denen ebenfalls *Punkte mit kleinen lateinischen Buchstaben* statt mit großen bezeichnet sind, z. B.: J. C. G. Hampel, Geometrische Konstruktionen, Weimar 1839; W. Marx, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Nürnberg 1885; A. Mannheim, Géométrie cinématique, Paris 1894. Eine etwas vollständigere Liste wäre sicher ganz erwünscht. M.

J. H., S. Der in der Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, Bd. 1, S. 1028, Anm. 423 erwähnte *antilogarithmische Maßstab* zur Bestimmung von Flächeninhalten ist, wie unsere Anfrage bei seinem Erfinder, Herrn Joh. Schnöckel, vereid. Landmesser in Düren (Rhld.), Kölnerstr. 101, ergeben hat, bis jetzt nicht in den Handel gekommen, kann jedoch beim Erfinder bestellt werden. Wir können noch mitteilen, daß Herr Schnöckel neue Anwendungen des antilogarithmischen Maßstabes gefunden hat, die er in dieser Zeitschrift veröffentlichen wird. M.

Bücherschau.

Study, E. Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Leipzig 1902. B. G. Teubner. XIII u. 603 S. gr. 8°.

Die Beziehungen zwischen den Gebilden der Liniengeometrie und den Lehren der Kinematik und Dynamik eines starren Körpers sind schon in den ersten Anfängen beider Disziplinen bei Möbius und Plücker hervorgetreten und seither nach vielen Richtungen ins einzelne ausgearbeitet und verwertet worden. Der Verfasser hat jedoch diese Gebiete zum erstenmale systematisch unter den Gesichtspunkten der Gruppentheorie und Mengenlehre bearbeitet und nicht nur neue Einzelheiten hinzugefügt, sondern auch die Grundlagen für ein festes Urteil über die Tragweite seiner Methoden an sich und für verwandte Gebiete geschaffen.

Schon in einer Reihe von Aufsätzen, welche in den Berichten der sächsischen Akademie, der deutschen Mathematikervereinigung und den mathematischen Annalen erschienen sind, hat der Verfasser einen Teil seiner Methoden, aber auch seinen grundsätzlichen kritischen Standpunkt gegenüber den Arbeiten anderer Autoren auseinandergesetzt, und auch hier nimmt er Gelegenheit, darauf zurückzukommen und nachdrücklich die Forderung zu vertreten, daß auch auf dem Gebiete der Geometrie den Grenz- und Ausnahmefällen dieselbe Beachtung zuteil werde, wie im Gebiete der Analysis. Wir berichten nun über den Inhalt.

Neben die bisher ausschließlich zur Zusammensetzung von Kräften verwendete Figur des Stabes, d. i. einer auf einer bestimmten Geraden verschiebbaren Strecke, stellt der Verfasser im ersten Abschnitt zwei andere Figuren: den Keil, d. i. ein um die gemeinsame Gerade drehbares Ebenenpaar und den Quirl, d. i. die Figur eines Punktes und einer Ebene. Er zeigt, daß diese Figuren ebenso einer geometrischen Addition fähig sind, welche durch zwei Figuren, das Keiltrapez und das Quirltrapez, erklärt werden können und dem Parallelogramm der Kräfte analog sind. Dabei finden nach dem Programm des Verfassers die Ausartungen und die als uneigentliche Stäbe, Keile, Quirle zu bezeichnenden Figuren ihre eingehende Erörterung.

Zu diesen tritt nun die Figur des Motors, das ist eines in bestimmte Reihenfolge gesetzten Geradenpaares, dessen Gerade einander nicht rechtwinklig schneiden oder kreuzen. Die beiden nacheinander um diese Geraden des Motors ausgeführten Umwendungen (Drehungen um den Winkel π) liefern eine Schraubenbewegung, welche die gemeinsame Normale der beiden

Geraden des Motors zur Achse, den doppelten kürzesten Abstand derselben zur Schiebungsgröße und deren doppelten Winkel zur Drehung hat.

Damit erkennt man die Möglichkeit, einem Motor eine allgemeine Schraubung zuzuordnen und die Zweckmäßigkeit der Vorschrift, Motoren einander gleichzusetzen, welche zur selben Schraube gehören. Einer allgemeinen Summe von Stäben (heteraptischen Summe) läßt sich also die Figur des Motors zuordnen.

Es ergeben sich drei Arten von Superposition von Bewegungen, welche als lineare, korrelative und stereometrische unterschieden werden, neben welche eine geometrische und eine stereometrische Addition der Motoren gestellt wird.

Die Quelle aller dieser verschiedenen Konstruktionen und ihrer in Ausartungen wieder vielfach durchbrochenen Analogien wird darin aufgedeckt, daß die betrachteten Konstruktionen aus einem geschlossenen System solcher im nichteuklidischen Raum durch Grenzübergang hergeleitet werden können, wobei jedoch einzelne Teile und Beziehungen des Gesamtsystems ihren Sinn verlieren.

Während bisher vorwiegend elementargeometrische Methoden zur Verwendung kommen, wird im zweiten Abschnitt die analytische Geometrie und mit ihr die symbolische Darstellung herangezogen, um die Ergebnisse des ersten Abschnittes algebraisch zu begründen und neue Methoden zu gewinnen. Das wichtigste Hilfsmittel zu diesem Zwecke ist die Einführung dualer Größen, d. h. bikomplexer Größen von der Form $a + b\varepsilon$, wo a und b gewöhnliche komplexe Größen, ε dagegen eine neue Einheit bezeichnet, für welche $\varepsilon^2 = 0$ ist.

Es zeigt sich dann, daß man die Verhältnisse von drei reellen dualen Größen $x_1 : x_2 : x_3$ als Koordinaten eines Strahles verwenden kann. Es sind im Grunde die Verhältnisse von sechs reellen Größen, welche im Plücker'schen Sinne als Koordinaten eines Gewindes (linearen Komplexes) aufzufassen sind. Der durch die dualen Koordinaten bestimmte Strahl ist dann die Hauptachse des Gewindes oder vielmehr eines ganzen coaxialen Bündels von solchen.

Die Einführung dieser dualen Größen gestattet nun die Erklärung dualer Winkelgrößen und ihrer trigonometrischen Funktionen, so daß eine Übertragung der sphärischen Trigonometrie auf den Strahlenraum entsteht.

Diese an sich schon sehr interessante Tatsache wird noch dahin erweitert, daß man nunmehr den einzelnen Figuren, Keil, Motor etc., alternierende duale Formen in der Weise zuordnen kann, daß den verschiedenen Arten der Addition auch eine einfache Addition der zugeordneten Formen entspricht.

Die Bewegungen erscheinen dann als orthogonale, lineare, duale Transformationen eines dualen, ternären Gebietes. Dieser Umstand leitet zu den Betrachtungen des dritten Abschnittes über, als deren Hauptproblem die Klassifikation der linearen Systeme von Gewinden (Dynamen, infinitesimalen Bewegungen) anzusehen ist. Dabei nehmen insbesondere die geometrischen Orte der Hauptachsen dieser Gebilde — Ketten genannt — besondere Aufmerksamkeit in Anspruch.

Die Methode des Verfassers geht nun dahin, daß er entsprechend dem sich selbst reziproken Charakter des Strahles die Strahlenmannigfaltigkeit des Raumes sich doppelt überdeckt denkt, und nun die Bestimmung trifft,

daß die dualen Koordinaten der Strahlen der einen Schicht kontragredient zu denen der andern Schicht linearen homogenen Transformationen unterworfen werden.

Nimmt man hierzu noch die Vertauschung der beiden Schichten und die Ähnlichkeitstransformation, so entsteht eine Gruppe, welche als die der radialen Kollineationen und Korrelationen bezeichnet wird und unter dem Namen der radialen Projektivität die Grundlage für das Weitere bildet. Analog wie Segre Antiprojektivität eingeführt hat, so lassen sich auch hier noch Antikollineationen und Antikorrelationen durch Übergang zu konjugiert-dual komplexen Größen definieren. Diese Transformationen umfassen dann alle, welche aus dem Normalennetz eines eigentlichen Strahles wieder ein solches hervorgehen lassen.

Um nun die zu entwickelnden Sätze möglichst einfach und ohne unnötige Beschränkungen aussprechen zu können, ist es notwendig, das Kontinuum der eigentlichen Strahlen zu einem abgeschlossenen im Sinne Cantors zu ergänzen, und zwar so, daß die radiale Projektivität ausnahmslos bestimmt eindeutig und stetig ist.

Die Aufgabe ist vollständig analog der in der Geometrie der Ebene auftretenden Frage nach der Definition der uneigentlichen Punkte und durch die Gruppe der Operationen bestimmt. So wie in der Ebene die Annahme der projektiven Gruppe die uneigentliche Gerade, dagegen die Annahme der Gruppe der Inversionen den uneigentlichen (unendlich fernen) Punkt zum Abschluß des Kontinuums erfordert, so zeigt sich hier, daß bei der Gruppe der radialen Projektivitäten die Definition der uneigentlichen Strahlen verschieden ausfallen muß von der Definition eben dieser in der projektiven (Plückerschen) Liniengeometrie. Besonders merkwürdig aber ist, daß dieser Forderung auf zwei verschiedene Arten entsprochen werden kann. Algebraisch findet diese Tatsache ihren Ausdruck darin, daß das Kontinuum der Strahlen auf zwei verschiedene Arten auf vierfach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten des Raumes von 8, resp. 17 Dimensionen abgebildet werden kann.

Es ist ferner klar, daß die Außerachtlassung der Unterschiede in der Definition der uneigentlichen Elemente ebenso zu Fehlern führen wird, wie wenn man projektive Sätze ohne weiteres, also mit den Grenzfällen, auf die Inversionsgeometrie übertragen wollte.

Nach Erledigung dieser besonders eingehend behandelten Fragen wendet sich der Verfasser nun zu dem weiteren Ausbau der Theorie der Systeme linearer Gewinde, der dazugehörigen Ketten und Kettenkongruenzen. Dabei erfährt auch die systematische Stellung der radial projektiven Geometrie zur euklidischen eine neue Beleuchtung.

Eine auszugsweise Wiedergabe ist aber schon wegen der Fülle der neu zu erklärenden Gebilde unmöglich.

Ein Anhang entwickelt eine neue Methode der Kinematik, welche so als natürliche Erweiterung der Strahlengeometrie im radialprojektiven Sinne erscheint.

Es zeigt sich nämlich, daß die Lage eines starren Körpers (Soma) zu einem festen solchen Körpers (dem Protosoma) durch die Verhältnisse von vier dualen Größen gegeben gedacht werden kann. Damit erscheinen die Somen als ein dual-quaternäres Größengebiet, und die ganze Algebra der linearen dualen Transformationen läßt sich für die Lehre von den Somen

und Somenketten verwerten, da die grundlegenden Formenbildungen auch einfache geometrische Bedeutung haben.

So sagt zum Beispiel die Kovariante der vereinigten Lage durch ihr Verschwinden aus, daß die beiden Somen durch Umschraubung auseinander hervorgehen. Aber auch eine bestimmte, einfache Metrik läßt sich entwickeln und in einfacher Weise ein Begriff der Entfernung zweier Somen als Invariante gegenüber orthogonalen Transformationen aufweisen, der einfach aus der halben Drehung und der halben Schiebung jener Schraubung zusammengesetzt ist, welche das erste Soma in das zweite überführt.

Der Ausbau der so begründeten Somengeometrie wird nun nach denselben Gesichtspunkten begonnen wie die der radialprojektiven Geometrie, deren Weiterbildung für vier Veränderliche sie ist.

Bei dieser Inhaltsangabe mußten wir uns begnügen, dem Leser über die wichtigsten Objekte und Gesichtspunkte zu berichten, welche der Verfasser geboten hat. Man mag hieraus ersehen, daß das Werk reichhaltig und eigenartig ist, nicht bloß in bezug auf Resultate, sondern auch, was vielleicht mehr ist, in bezug auf Methoden und Auffassungen.

Innsbruck.

WIETINGER.

**Veröffentlichung des Königl. Preussischen Geodätischen Instituts.
(Neue Folge Nr. 7.) Astronomisch-geodätische Arbeiten erster
Ordnung. Bestimmung der Längendifferenz Potsdam—Pulkowa
im Jahre 1901.**

Die Arbeit enthält die Beobachtungsergebnisse der deutschen Beobachter Herren Albrecht und Borraß bei der Längenbestimmung Potsdam—Pulkowa und hat im wesentlichen die Form anderer Längenbestimmungen des geodätischen Instituts. Die ca. 1 Stunde 9 Minuten betragende Längendifferenz wurde zu zwei Dritteln zu den Zeitbestimmungen, der Rest zu den Signalwechseln verwendet.

Jede vollständige Zeitbestimmung umfaßte fünf bis sechs Zenitsterne und einen Polstern. An jedem vollständigen Abend wurden sowohl in Potsdam wie in Pulkowa fünf solcher Gruppen beobachtet, davon die erste nur in Potsdam, die letzte nur in Pulkowa, die drei mittleren an beiden Orten.

Während des Durchganges je eines Sternes wurde das betreffende Passageinstrument einmal umgelegt und zehn Repsoldkontakte in jeder Lage benutzt. Das Niveau wurde gleichzeitig mit umgelegt und so die Neigung ohne Umhängen des Niveaus erhalten.

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels aus je einem Kontakte Kreis Ost und Kreis West ergibt sich im Mittel aus den beiden Beobachtern etwa zu:

$$m = \sqrt{(0.048)^2 + (0.0228)^2} \text{ sec } \delta.$$

Bei Herrn Albrecht scheint keine Helligkeitsgleichung vorhanden zu sein, wohl aber bei Herrn Borraß. Dies könnte sich in der Tat wohl dadurch erklären, daß das von ersterem durchgehend benutzte Instrument 81 mm Öffnung hatte, während das von letzterem benutzte Instrument bei nahezu gleicher Brennweite nur 68 mm Öffnung hatte.

Die Positionen der Sterne sind dem Berliner Jahrbuche entnommen worden mit Anbringung der Auwersschen Korrekturen. Trotzdem sind aber an den Rektaszensionen noch Korrekturen angebracht worden, um das Beobachtungsmaterial homogener zu machen. Diese Korrekturen scheinen, wenn man die Gesamtheit der Resultate betrachtet, im allgemeinen reell zu sein.

Die Signalwechsel wurden zwischen den Zeitbestimmungen des geodätischen Instituts unter strengem Ausgleich der Stromstärken ausgeführt. Obgleich zwischen Berlin und Petersburg nur ältere Eisendrahtleitungen vorhanden waren, hat sich doch keine merkbare Beeinflussung des Resultats herausgestellt, es bedurfte aber kräftiger Batterien von je 300 Meidinger Elementen.

So zeigen denn auch die Werte für die Stromzeit an den verschiedenen Beobachtungsabenden eine bemerkenswerte Übereinstimmung.

Übrigens haben die Beobachter am 22. September die Stromstärke variiert, ohne einen merklichen Einfluß auf die Signalwechsel zu finden (S. 35—36). Interessant ist, daß die Stromzeit auf der 1696 km langen Eisendrahtleitung Potsdam—Pulkowa mehr als doppelt so groß war, als auf der 1878 km langen Bronzedrahtleitung Potsdam—Bukarest.

Die Kontaktbreite und der tote Gang der Mikrometerschrauben sind durch wenige Messungen sehr genau erhalten worden.

Der mittlere Fehler der Uhrkorrektur aus einem Stern ergibt sich im Mittel zu $\pm 0^{\circ}034$, und zwar in Pulkowa wohl infolge des ungünstigeren Klimas etwas größer als in Potsdam.

Die Summe der persönlichen und instrumentellen Gleichung ergibt sich zu $-0^{\circ}025$, was hauptsächlich durch die Verschiedenheit der angewandten Instrumente bedingt zu sein scheint.

Der mittlere Fehler eines vollen Tagesresultates ergibt sich aus der Übereinstimmung der Tagesresultate untereinander zu $\pm 0^{\circ}018$.

Greifswald.

W. EBERT.

P. Güssfeldt. Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen und die Entwicklung der hierfür maßgebenden mathematisch-geometrischen Begriffe. XIX u. 377 S., 8^o. Braunschweig 1902 (auf dem Umschlag 1903).

Dieses Werk will vorwiegend vom pädagogischen Standpunkte beurteilt werden; auch so scheint es nicht ganz leicht, ihm vollkommen gerecht zu werden.

Die ersten 90 Seiten befassen sich mit den geometrischen und analytischen Grundlagen des zu behandelnden Stoffes und zwar unter Voraussetzung der geringstmöglichen Vorkenntnisse. Der dritte Abschnitt leitet mit den „tatsächlichen Grundlagen der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung“ über zum engeren Thema. Der Erläuterung der verschiedenen Koordinatensysteme, der aus der scheinbaren Bewegung der Himmelskugel hervorgehenden einfachen Beziehungen wird ein breiter Raum gewidmet. Der vierte Abschnitt „Zeit und Zeitmessung“, bringt zunächst die Definition des Prinzips aller Zeitmessung in der Form: „Durch identische Vorgänge werden identische Zeitintervalle erfüllt“. Dann folgt die Besprechung der

astronomischen Zeiteinheiten, der Kalenderrechnung, der Verwandlung der verschiedenen Zeitarten und eine Betrachtung des Sonnenlaufs in seiner Wirkung auf Klimate und Jahreszeiten. Im nächsten Abschnitt findet man eine elementare Darstellung der sphärischen Trigonometrie und ihrer Anwendung auf das astronomische Grunddreieck. Die Fehlertheorie des Universals im 6ten Abschnitt setzt die Kenntnis des Instrumentes und seiner Handhabung voraus, unterweist indes erschöpfend im richtigen Gebrauch.

Auf Seite 245 — das Buch zählt im ganzen 368 Seiten Text — beginnt der Vortrag der eigentlichen „Messungsmethoden für Zeit, Polhöhe und Azimut“, dem aber noch eine Erklärung von „Uhren, Uhrkorrektion und Uhrgang“, auf $4\frac{1}{2}$ Seiten vorangeschickt ist. Bei der Zeitbestimmung mittelst Zenitdistanzen wird das Universal angenommen und die Manipulation am Instrument und die Berechnung ausführlich beschrieben. Die Gangbestimmung einer Uhr nach dem Olbersschen Vorschlag (Verschwinden eines Sternes hinter der vertikalen Kante eines terrestrischen Gegenstandes) schließt sich kurz an. Sodann folgt eine wiederum umständliche Darlegung der Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen. Zur Polhöhenbestimmung wird auf $9\frac{1}{2}$ Seiten die Methode der Circummeridianhöhen gelehrt und die gleichzeitige Ermittlung von Zeit und Polhöhe durch die Beschreibung der indirekten Methode erledigt. Mit der Azimutsbestimmung durch die Sonne schließt dieser Abschnitt, für dessen sämtliche Methoden, wie nochmals hervorgehoben sei, dem Universal der Vorzug gegeben wird.

Bei der Behandlung der Fehlereinflüsse der verschiedenen Stücke des Grunddreiecks im 8ten Abschnitt hat der Verf. die Grundbegriffe der Differentialrechnung (bis auf den Taylorschen Lehrsatz) auf 6 Seiten dargelegt. Ohne Differentialrechnung die Frage einfacher zu lösen, hätte eher in dem Rahmen des Buches gepaßt. „Das nautische Jahrbuch und der Gebrauch fünfstelliger Logarithmen“, „Beispiele für das numerische Rechnen angestellter Beobachtungen“, „Meridianellipse und Gestirnsparallaxe“ füllen den 9ten, 10ten, 11ten Abschnitt. Der 12te bringt die „Methoden der Längenbestimmung“, von denen eingehend nur diejenige durch Sternbedeckungen

behandelt wird. — Der Anhang enthält Tafeln für $\log \frac{2 \sin^2 \frac{\tau}{2}}{\sin 1''}$ und für

$$\log \frac{2 \sin^4 \frac{\tau}{2}}{\sin 1''}.$$

Überblickt man den sachlichen Inhalt des Werkes, so erkennt man, daß es vertraut gemacht hat mit der Zeitbestimmung durch Höhen beim I. Vertikal und durch korrespondierende Höhen, mit der Polhöhenbestimmung durch Circummeridianhöhen und der Längenbestimmung durch Sternbedeckungen. Einige andere Methoden sind indes soweit gestreift worden, daß ein aufmerksamer Leser sie sich selbst leicht wird konstruieren können.

Straßburg i. E.

C. W. WIRTZ.

S. Günther. Astronomische Geographie. 16°, 170 Seiten. Leipzig 1902. Sammlung Götschen Nr. 92.

In dem kleinen Werkchen, welches alle Vorzüge Güntherscher Darstellung aufweist, fixiert der Verf. das Programm der astronomischen Geographie wie folgt: „Ermittelt sollen werden die Gestalt und Größe des Erdkörpers, dessen Bewegungsverhältnisse im Raume und die Methoden der geographischen Ortsbestimmung; letztere im ausdrücklichen Zusammenhang mit der Frage, ob das Koordinatensystem, auf welches man sich zu beziehen pflegt, als ein vollkommen stabiles oder als ein selbst in seiner Lage veränderliches anzuerkennen sei.“ Die hier angedeuteten Aufgaben finden eine ansprechende und kurze Darstellung, sodaß nicht nur der Laie, sondern auch der Physiker und Astronom das reichhaltige in 14 Kapitel gegliederte Buch noch mit Vergnügen durchlesen wird. Den Wert des Buches erhöhen nicht wenig die zahlreichen historischen Anmerkungen und Hinweise. Auch jedem, der als Lehrer mit dem Gegenstande zu tun hat, wird es sehr willkommen sein.

Straßburg i. E.

C. W. WIRTZ.

C. v. Dillmann. Astronomische Briefe. Neue Folge. Kometen, Sonne, Fixsterne. 8°. III u. 234 S. Tübingen 1901.

In schlichter und klarer Darstellung behandelt der Verfasser einige Kapitel der deskriptiven Astronomie. Die einzelnen Abschnitte stehen in keinem inneren Zusammenhang; jeder Brief ist vielmehr ein in sich geschlossenes Ganzes. Durch zahlreiche historische Einstreuungen wird der Stoff angenehm belebt. Hier und da stießen uns zwar schiefe Ausdrücke, aber keine direkten Unrichtigkeiten auf. Auch die nötige Vorsicht im Vortrag noch nicht gesicherten astronomischen Wissens wird man dem Buche nicht absprechen können.

Straßburg i. E.

C. W. WIRTZ.

Schubert (Hamburg). Neuer ewiger Kalender zur Bestimmung des Wochentages für jedes beliebige Datum nach und vor Christi Geburt, mit Berücksichtigung der Ausnahmejahre 42 vor bis 4 nach Christi Geburt und zur Bestimmung der Daten der christlichen Feste. 8°. 6 S. auf Carton. Leipzig 1902.

Das übersichtlich angeordnete Werkchen zerfällt in 5 Tabellen, von denen I und II der Bestimmung des Wochentages eines beliebigen vorgelegten Datums alten oder neuen Stils gewidmet sind. I ist in 3 Tabellen gespalten, gültig der Reihe nach für die Jahre nach Christo, vor Christo und die Ausnahmejahre 42 vor bis 4 nach Christo. Den gesuchten Wochentag findet man recht einfach durch Eingehen in 2 Tafeln mit je 2 Argumenten. Tabelle III und IV vermitteln in Verbindung mit I die Kenntnis des Osterdatums und Tabelle V die Festsetzung einiger von Ostern abhängiger Feste.

Straßburg i. E.

C. W. WIRTZ.

Neue Bücher.

Astronomie.

1. MÖHRIS, A. F., *Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper.* (Sammlung Götschen Nr. 11.) 10. verb. Aufl. bearb. v. Walt. F. Wislicenus. 12°, 170 S. m. 36 Abb. u. 1 Karte des nördl. Sternhimmels. Leipzig, Götschen. geb. in Leinw. M. 80.

Darstellende Geometrie.

2. MÜLLER, CARL HEINR., und PASSELER, OTTO, *Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie.* Ausgabe A. Vorzugsweise für Realgymnasien u. Oberrealschulen. Leipzig, Teubner. geb. M. 4.
— Dasselbe. Ausgabe B. Für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten. Ebenda. geb. M. 2.

Mechanik.

3. GAUSS, CARL FRIEDRICH, *Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts.* Übers. v. Rudolf H. Weber hrsg. v. H. Weber. (Ostwalds Klassiker Nr. 135.) Leipzig, Engelmann. 8°, 73 S. geb. M. 1.20.
4. MEHRTEKS, GEO. CHRISTOPH, *Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre.* (In 3 Bdn.) 1. Bd. Einführung in die Grundlagen. gr. 8°, XVI u. 423 S. m. 377 z. Tl. farb. Fig. Leipzig, Engelmann. M. 20; geb. in Leinw. M. 21.
5. SCHENK, JUL., *Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen.* gr. 8°, IV u. 59 S. m. 45 Fig. u. 1 Doppeltaf. Leipzig, Teubner. M. 1.60.

Physik.

6. ATKINSON, A. A., *Electrical and magnetic calculations; for the use of electrical engineers and artisans, teachers, students, and all others interested in the theory and application of electricity and magnetism.* 2^d edition, revised. New York, Van Nostrand. 12mo. 7 + 310 pp. Cloth. \$ 1.50.
7. BAUER, HEINZ, *Telegraphie ohne Draht, Röntgenstrahlen, Tesla-Licht. Eine Einführung in die neueren elektrophysikalischen Forschungen und deren praktische Ausgestaltung.* 8°, VII u. 230 S. m. 98 Abb. Berlin, Duncker. M. 4.
8. BERLINER, ARNOLD, *Lehrbuch der Experimentalphysik in elementarer Darstellung.* gr. 8°, XVI u. 857 S. m. 3 lith. Taf. u. 695 zum Tl. farb. Abb. Jena, Fischer. M. 14; geb. M. 16.50.
9. BORDIER, H., *Précis de physique biologique.* 2^e édit. revue et corrigée. In-12 avec 288 fig. dont 20 en coul. dans le texte et 1 pl. Paris, Doin. Cart. Frs. 8.
10. BOUSSINESQ, J., *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Tome II. Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité des tiges, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* Gr. 8°, XXXII et 625 p. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 18.
11. CLASSEN, J., *Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.* 1. Bd. *Elektrostatik und Elektrokinetik.* (Sammlung Schubert XLII.) 8°, X u. 184 S. Leipzig, Götschen. geb. in Leinw. M. 5.

12. FARADAY, MICHAEL, Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. XVI. und XVII. Reihe. Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. (Ostwalds Klassiker Nr. 134.) 8°, 103 S. m. 18 Fig. Leipzig, Engelmann. geb. M. 1.60.
13. — Dasselbe, XVIII. und XIX. Reihe. (Ostwalds Klassiker Nr. 136.) 8°, 58 S. m. 11 Fig. Ebenda. geb. M. 1.20.
14. FORTSCHRITTE, Die, der Physik im J. 1902. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 58. Jahrg. 1. Abtlg. Physik der Materie. gr. 8°, XI u. 496 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 20.
15. GRÜNBURG, VIKT., Hypothese zur Thermodynamik. Versuch einer leichtfaßl. Darstellung einiger Prinzipie der Molekulartheorie mit Zugrundelegung der Keplerschen Gesetze für die Planetenbewegung. gr. 8°, VI u. 73 S. m. 10 Fig. u. 7 Tab. Leipzig, Barth. M. 3.
16. HELFENSTEIN, A., Die Energie und ihre Formen. Kritische Studien. gr. 8°, IV u. 152 S. Wien, Deuticke. M. 4.20.
17. MAHLER, G., Physikalische Formelsammlung. (Sammlung Götschen Nr. 136.) 2. verb. Aufl. 12°, 190 S. m. 65 Fig. Leipzig, Götschen. geb. in Leinw. M. —.80.
18. MATTHIASEN, LUDWIG, Die astigmatische Brechung der Sonnenstrahlen im Regenbogen. Mit Anwendung von Kettenbruch-Determinanten dargestellt. (Publikationen des astronomisch-meteoronomischen Observatoriums zu Rostock.) 4°, 14 S. m. 9 Abb. auf 5 Taf. Rostock, Boldt.
19. MILLER, ANDR., Vergleich der elektrischen Kontakt- und Influenzwirkung. Progr. gr. 8°, 16 S. München, Kellerer. M. 1.
20. REYCHLER, A., Physikalisch-chemische Theorien. Nach der 3. Aufl. des Originals bearb. v. B. Kühn. gr. 8°, XII u. 389 S. m. Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 9; geb. in Leinw. M. 10.

Tafeln. Rechenapparate. Zeichenwerkzeuge.

21. D'OCAGNE, MAURICE, Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie. In-4°, 63 p. Paris, Gauthiers-Villars.
22. PELLEHN, G., Der Pantograph. 1608. 1903. Vom Urstorchschnabel zur modernen Zeichenmaschine. Mit 18 Abbildungen versch. Pantographen, 7 Textfiguren, 1 Übersicht der Übertragungssysteme. [Aus: „Deutsche Mechaniker-Zeitung“ m. e. Nachtrag.] Lex. 8°, 20 S. Berlin, Reimer. M. 1.
23. SCHRÖDER, C., Die Rechenapparate der Gegenwart, gesammelt, geordnet, beschrieben und begutachtet. 8°, 112 S. Magdeburg. M. 2.
24. TABLE DE LOGARITHMES à cinq décimales des nombres naturels de 1 à 10 000 et des lignes-trigonométriques des arcs du premier quadrant dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale de la circonférence, avec un Supplément et un Formulaire rédigés par M. Chollet. in-12°. Paris, Garnier frère. Cart. Frs. 3.
25. VANS, F. J., Handleiding voor het gebruik van de rekenliniaal van Dennert en Pape, Faber en Tavernier-Gravet. 8°, 32 blz. Rotterdam, Nijgh & van Ditmar. Fl. —.60.
26. WITKOWSKI, A. W., Tablice logarytmowe i goniometryczne czterocyfrowe. Osobne odbicie z „Tablic matematyczno-fizycznych“ autora. Warszawa, wydawnictwo redakcyi „Wiadomości Matematycznych“.

Verschiedenes.

27. HOLEMÜLLER, GUSTAV, Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik. 3. Teil. Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Oberklassen realistischer Vollarbeiten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschulmathematik. 2. Aufl., im Anschluß an die neuen preußischen Lehrpläne mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen bearbeitet. 8°, XIV u. 370 S. m. 223 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner.

28. SCHREBER, K., Die Kraftmaschinen. Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen, für Zuhörer aller Fakultäten an der Universität Greifswald gehalten. 8°, XII u. 348 S. m. 56 Abb. u. 1 Taf. Leipzig, Teubner.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- BAUER, GUSTAV, Vorlesungen über Algebra. Hrg. vom Mathematischen Verein München. Mit dem Bildnis Gustav Bauers als Titelbild. gr. 8°, VI u. 376 S. m. 11 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 13.
- BOUSSINESQ, J., Théorie analytique de la chaleur, s. N. B. („Neue Bücher“), Nr. 10.
- DICKSON, LEONARD EUGENE, Ternary orthogonal groups in a general field, and the groups defined for a general field by the rotation group. Reprints from the University of Chicago Decennial Publications. 1st ser. vol. IX. 4°, 26 pp. Chicago, The University of Chicago Press. \$ —.50.
- FENKNER, HUGO, Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. I. Teil: Ebene Geometrie. 4. umgearb. u. vermehrte Aufl. Berlin, Salle. M. 2.20.
- GAUSS, C. FR., Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten . . . , s. N. B. 3.
- HELFENSTEIN, A., Die Energie und ihre Formen, s. N. B. 16.
- HITTORF, W., Über die Wanderung der Ionen während der Elektrolyse. (1853—1859.) Erster Teil. Hrg. v. W. Ostwald. (Ostwalds Klassiker Nr. 21.) 2. erweiterte Aufl. 8°, 115 S. m. 1 Taf. Leipzig, Engelmann. geb. M. 1.60.
- HOLTMÜLLER, G., Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik. 3. T., s. N. B. 27.
- HUYGHENS, CHR., Abhandlung über das Licht (1678). Hrg. von E. Lommel. (Ostwalds Klassiker Nr. 20.) In 2. Aufl. durchgesehen u. berichtigt von A. J. v. Oettingen. 8°, 115 S. m. 75 Fig. Leipzig, Engelmann. geb. M. 2.
- KWIATKOWSKI, STEFAN, Über die Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven. Diss. gr. 8°, 51 S. Zürich, Speidel. M. 1.
- MASCHKE, HEINRICH, Invariants and Covariants of quadratic differential quantities of n variables. Reprint from the University of Chicago Decennial Publications, 1st ser. vol. IX. 4°, 14 pp. Chicago, The University of Chicago Press. \$ —.25.
- MATTHIESSEN, L., Die astigmatische Brechung der Sonnenstrahlen im Regenbogen, s. N. B. 18.
- MÜLLER, C. H., u. PRESLER, O., Leitfaden der Projektionslehre. Ausgabe A u. B, s. N. B. 2.
- ROBIN, GUSTAVE, Œuvres scientifiques. Mathématiques: Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Gr. 8°. Paris, Gauthier-Villars. Fra. 7.
- SCHENK, JUL., Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen, s. N. B. 5.
- SCHREBER, K., Die Kraftmaschinen, s. N. B. 28.
- SCHWERING, KARL, Sammlung von Ausgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. 2. Lehrgang. 2., verbesserte Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 1.20; geb. M. 1.50.
- WITKOWSKI, A. W., Tablice logarytmowe i goniometryczne asterocyfrowe, s. N. B. 26.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

- Blochmann, Dr. Rudolf** in Kiel, die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Nach einem auf der 34. Jahresversammlung des Deutschen Nautischen Vereins in Berlin gehaltenen Vorträge dargestellt. [24 S.] gr. 8. 1903. geh. n. \mathcal{M} —.60.
- Bucherer, Dr. A. H.**, Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektor-Analyse. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geb. \mathcal{M} 2.40.
- Burkhardt, H.**, Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. gr. 8. geh. 1. Lfg. [176 S.] 1901. n. \mathcal{M} 5.60; 2. Lfg. [S. 177—400.] 1902. n. \mathcal{M} 7.60; 3. Lfg. [S. 401—768.] 1903. n. \mathcal{M} 12.40. 4. (Schluß-)Lieferung. 1904. [Unter der Presse.]
- Brüsch, Dr. phil. Wilhelm**, Oberlehrer, Grundriß der Elektrotechnik für technische Lehranstalten. Mit 248 Abbildungen im Text. [XI u. 168 S.] gr. 8. 1902. geb. n. \mathcal{M} 3.—
- Ferraris, Galileo**, wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik gehalten in dem R. Museo Industrial in Turin. Deutsch herausgegeben von Dr. LEO FIMZI. Mit 161 Figuren im Text. [XII u. 358 S.] gr. 8. 1901. geb. n. \mathcal{M} 12.—
- Föppl, Prof. Dr. Aug.**, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. \mathcal{M} 44.—
 I. Band. Einführung in die Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 413 S.] 1900. geb. n. \mathcal{M} 10.—
 II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. \mathcal{M} 10.—
 III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geb. n. \mathcal{M} 12.—
 IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. 1901. [XV u. 506 S.] geb. n. \mathcal{M} 12.—
- Kohlrausch, Dr. F.**, Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Lehrbuch der praktischen Physik. Mit in den Text gedruckten Figuren. 9., umgearb. Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. [XXVII u. 610 S.] gr. 8. 1901. In biegsamen Leinwandband geb. n. \mathcal{M} 8.60.
 ——— kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [XIX u. 260 S.] gr. 8. 1899. In Leinw. geb. n. \mathcal{M} 4.—
- Kühler, J.**, Baurat in Eßlingen, die Proportion des goldenen Schnittes als das geometrische Ziel der stetigen Entwicklung und die daraus hervorgehende Fünfgestalt mit ihrer durchgreifenden Fünfgliederung. Mit 15 Figuren auf 4 Tafeln. [36 S.] gr. 8. 1903. geh. n. \mathcal{M} 1.60.
 ——— die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis!? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. \mathcal{M} 1.60.
- Musil, A.**, o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 302 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. \mathcal{M} 20.—
- Perry, Dr. John, F. R. S.**, Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. ROBERT FRICKZ, o. Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig, und FRITZ SÜCHTING, Oberingenieur am städtischen Elektrizitätswerke zu Minden i. W. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. geb. n. \mathcal{M} 12.—
- Routh, Edward John, Sc. D., LL. D., F. R. S., etc.**; Ehrenmitglied von Peterhouse, Cambridge; Mitglied des Senats der Universität London, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. Mit einem Vorwort von Professor Dr. Felix Klein zu Göttingen. gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. \mathcal{M} 24.—
 Einzelne:
 I. Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren im Text. [XII u. 473 S.] n. \mathcal{M} 10.—
 II. (Schluß-)Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren im Text. [X u. 544 S.] n. \mathcal{M} 14.—

Schenk, Dr. ing. Julius, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV n 30 S.] gr. 8. 1903. geh. n. $\text{M. } 1,60$.

Schreiber, Dr. K., die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV n 126 S.] gr. 8. 1903. geh. n. $\text{M. } 3,60$.

— die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltenen Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebräuchtesten Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 66 Abbildungen im Text. [XII n 348 S.] gr. 8. 1903. geh. n. $\text{M. } 6,-$, geh. n. $\text{M. } 6,80$.

EINLADUNG ZUM III. INTERNATIONALEN MATHEMATIKER-KONGRESS VOM 8.—13. AUGUST 1904 IN HEIDELBERG.

Der Ausschuß für die Vorbereitung
des III. internationalen Mathematiker-Kongresses:

A. Brill-Tübingen. M. Cantor-Heidelberg. M. Deitel-Strasbourg. W. v. Dyck-München. A. Gutzmer-Jena. G. Hauck-Berlin. D. Hilbert-Göttingen. F. Klein-Göttingen. A. Kneser-Berlin. L. Königberger-Heidelberg. A. Krazer-Karlsruhe. J. Lüroth-Freiburg. B. Mehmke-Stuttgart. F. Meyer-Königsberg. C. Runge-Hannover. H. Schubert-Hamburg. F. Schur-Karlsruhe. H. A. Schwarz-Berlin. P. Stäckel-Kiel. J. P. Tautlein-Karlsruhe. H. Weber-Strasbourg.

Wegen Programm-Zusendung bittet man sich zu wenden an
Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe i. B., Westendstraße 57.

Zu Versuchs- u. Lehrzwecken ist eine kleine Accumulatoren-Batterie mit 19 Elementen, 12 Ampère bei 3stündiger Entladung, sowie eine dazu passende Dynamomaschine und Schaltbrett mit allen erforderlichen Schaltapparaten und Meßinstrumenten unter äußerst günstigen Bedingungen zu verkaufen. Die Anlage ist erst vor kurzer Zeit aufgestellt und noch in Betrieb zu sehen.

Geft. Anerbieten unter **S. N. 2** an die Expedition dieser Zeitschrift, Leipzig, Poststr. 3. erbeten.

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

**ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.**

BEGRÜNDET 1855 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

NEUER VERLAUFGEHENS VON O. SCHLÖMILCH (1855–1896) UND M. CANTOR (1896–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, E. KLEIN,
C. DE LINTZ, H. A. LOEBST, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE UND **C. RUNGE**
IN ECKHART. IN HANNOVER.

19. BAND 3. HEFT

MIT 22 TAFELN IM THEIL.

Ausgegeben am 17. November 1903



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1903

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. HUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuscripte, Revisionsemplare u. a. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 39

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Hunge, Hannover-Kirchrode, Sauer Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 50 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. a. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als 30 genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 36 Druckbogen in 4 Heften und kostet 30 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte angegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

<i>Über die Spannungskurve gesättigter Dämpfe.</i> Von L. Gratz in München.	282
<i>Ein Beitrag zur Theorie der Notalischen Farbenringe.</i> Von Richard Gans in Tübingen. Mit 2 Figuren im Text.	296
<i>Über ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Form empirisch ermittelter Kurven.</i> Von Franz Berger in Wien. Mit 8 Figuren im Text.	306
<i>Über die Kreisbewegung an der Erdoberfläche.</i> Von Olaf Kragh in Nyköbing-Falster (Dänemark).	315
<i>Über die stetige Erzeugung gewisser Schleifenkurven, die einen beliebigen Winkel in gleiche Teile teilen.</i> Von A. Kempe in Rotterdam. Mit 7 Figuren im Text.	347
<i>Die durch Eigengewicht verursachte Deformation eines längs einer Mantellinie unterstützten Kreis-Cylinders.</i> Von H. Heimann in Zwickau i. S. Mit 3 Figuren im Text.	346
<i>Über die Zusammensetzung von Vektoren.</i> Von Friedrich Schur in Karlsruhe.	362
<i>Über die Zusammensetzung von Vektoren.</i> Von Georg Hamel in Karlsruhe.	362
<i>Ein Apparat zur Bestimmung des Flächeninhalts, des statischen Moments, Trägheitsmoments und beliebiger anderer Momente krummlinig begrenzter ebener Figuren.</i> Von J. Schnücker in Düsseldorf. Mit 8 Figuren im Text.	372
<i>Kleinere Mitteilungen</i>	382
<i>Bücherschau</i>	383
Barbar, Über die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen. Von C. W. Wirtz.	386
Andoyer, Théorie de la lune. Von C. W. Wirtz.	388
Dünser, Die älteste astronomische Schrift des Maimonides. Von C. W. Wirtz.	387
Lamberts Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Kometen. Von C. W. Wirtz.	388
Hayn, Selenographische Koordination. Von C. W. Wirtz.	388
<i>Neue Bücher</i>	389
<i>Eingelaufene Schriften</i>	391

Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

A. Borch, L. v. Borklanitz, K. Döhlmann, G. Hamel, K. Henn, W. Mert, A. Lüdln, R. Mehmke, O. Mohr, J. Pötschel, R. Reiche, C. Enge, J. Schnücker, H. Seifert, A. Sommerfeld, F. Stäckel, G. Valentin, S. Wellich, C. W. Wirtz, F. Wittmann, K. Wölffing.

Mitteilungen

39

der Verlagsbuchhandlung

B. G. Teubner  in Leipzig.

36. Jahrgang.

903.

Ausgabe B.

1903.

Alle Mitteilungen, die unentgeltlich in allen Sortimentsbuchhandlungen sowie auch von der Verlagsbuchhandlung zu haben sind, sollen das Publikum von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen.

Die mit * bezeichneten Bücher befinden sich unter der Presse oder in Vorbereitung.

Der Ausdehnung des Verlages entsprechend erscheinen die Mitteilungen in zwei Ausgaben. Die erste Ausgabe (A) zeigt zweimal jährlich die Neuerscheinungen auf wissenschaftlichem Gebiete an. Die zweite Ausgabe (B) erscheint einmal jährlich Ende August und kündigt die für Schule und Unterricht bestimmten Bücher, sowie Werke von allgemeinerem Interesse an. Von beiden Ausgaben werden, den Fächern entsprechend, Sonderausgaben versandt; auf Wunsch stehen die Gesamtausgaben zur Verfügung. Auch werden von allen größeren Werken, insbesondere auch von Unterrichtswerken, gern ausführlichere Prospekte zugestellt.

Zum mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien. Von Dr. E. Bardey. Dreizehnte Auflage, in der neuen Rechtschreibung. [IX u. 269 S.] gr. 8. geb. n. M. 2.40.

Anleitung zur Auflösung eingeleiteter algebraischer Gleichungen von F. Pießler. Neue, völlig umgearbeitete Ausgabe des gleichbetiteltten Buches von Dr. E. Bardey. [VIII u. 159 S.] gr. 8. geb. n. M. 2.60.

Vorangelegte f. Mitteilungen 1902 B (Zum mathem. u. naturw. Unterricht) S. 12.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Von Prof. F. Müller, Oberlehrer am Kaiserin-

1903. B. Zum mathem. u. naturwissensch. Unterricht.

1

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. Ann. 18, S. 535. 1881.

en
lie
ls-
ng
ne
na
en
en
en,
ar-
as
ch
lie
eit
ei
nd
e-
ng
he

zu
ls.
ge-
p,
so

Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, und R. Kutnewsky, Oberlehrer an der XII. Realschule in Berlin. Teil I. Zweite, verbesserte Auflage. Ausgabe A: für Gymnasien und Pre-gymnasien. [VII u. 237 S.] gr. 8. In Leinw. geb. n. M. 2.20. Ausgabe B: für reale Anstalten u. Reformschulen. [VIII u. 301 S.] gr. 8. In Leinw. geb. n. M. 2.80.

Bei der 2. Auflage des Teils I wurden auf Wunsch vieler Freunde des Buches die allgemeinen Übungen über Wurzeln etwas gekürzt und der freiwerdende Raum für logarithmische Aufgaben benützt. Der Fortfall der Kettenlehre (die auf besonderen Wunsch beigeheftet werden kann) ermöglichte eine starke Vermehrung der trigonometrischen Aufgaben, ohne den Umfang des Buches zu vergrößern. Neu aufgenommen wurde eine Reihe von Aufgaben aus der Schifffahrt und der Himmelskunde.

Den Benennungen für Teil II entsprechend wurde die größere Ausgabe als Ausgabe B bezeichnet. Die nunmehr lediglich für Gymnasien bestimmte Ausgabe A unterscheidet sich von der Ausgabe B nur dadurch, daß sie die Gleichungen 2. Grades mit mehreren Unbekannten und die trigonometrischen und stereometrischen Aufgaben nicht mehr enthält.

Beide Teile der beiden Ausgaben sind jetzt den neuen Lehrplänen angepaßt.

Die Sammlung hat sich rasch zahlreiche Freunde erworben und ist an vielen Anstalten eingeführt worden.

Ergebnisse zu Teil I der vorstehenden Sammlung (Ausg. A, 2. Aufl. M. — 80, Ausg. B M. — 60) werden nur an die Herren Lehrer direkt von der Verlagshandlung abgegeben.

H. Müller und F. Pietzker, Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. Vorstufe zu den Aufgabensammlungen von Bardey und Müller-Kutnewsky. gr. 8.

Ausgabe A: Für Gymnasien. [VIII u. 244 S.] geb. n. M. 2.40.

Ausgabe B: Für reale Anstalten und Reformschulen. [VIII u. 274 S.] geb. n. M. 2.60.

Das Rechenbuch bildet einen gemeinsamen Unterbau der beiden genannten Sammlungen und vereinigt die methodischen Vorzüge des Bardeyschen Werkes mit der Reichhaltigkeit und anregenden Vielseitigkeit der Müller-Kutnewskyschen Sammlung. Besonders berücksichtigt sind die folgenden Gesichtspunkte:

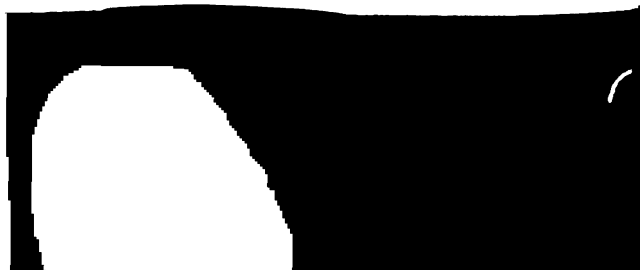
1. Erzielung einer gewissen Geläufigkeit im praktischen Rechnen. Dieser Gesichtspunkt war für den Aufbau und die Bemessung der Aufgaben für das Kopfrechnen bestimmend.

2. Vertrautheit mit der Anwendung dieser Rechenfertigkeit auf die Verhältnisse des bürgerlichen Lebens. Hier zeichnet sich das Rechenbuch aus durch die Fülle und Vielseitigkeit der für das Übungsmaterial herangezogenen Verhältnisse und Vorkommnisse, durch die Aufgaben aus dem praktischen Leben, die zugleich dazu dienen, den Gesichtskreis des Lernenden und seine Kenntnis der Wirklichkeit zu erweitern.

3. Eindringendes Verständnis für die zur Verwendung gelangenden Rechenoperationen. Die einzelnen durch Zahlenbeispiele erläuterten Regeln sind überall in klaren, leicht einprägbaren Sätzen zusammengefaßt.

4. Vorbereitung auf den späteren Unterricht in der Arithmetik. Diese Absicht tritt bereits bei der Ableitung der Rechen-

[Fortsetzung S. 4.]



Dr. E. Bardey's methodisch geordnete Aufgabensammlung,

mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik,
vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. 2. Auflage.
[VIII u. 395 S.] Geb. n. \mathcal{M} 3.20.

Dr. E. Bardey's arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch d. Arithmetik,

vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Real-
gymnasien. Geb. n. \mathcal{M} 2.60.

Neubearbeitungen von Prof. Piepfer und Prof. Presler.

„... Ich schließe mit dem Wunsch, daß der überaus sorgfältigen und mühevollen Arbeit
der Herausgeber die Anerkennung nicht fehlen möge, auf die sie in der Tat berechtigten An-
spruch hat.“
(Zeitschr. f. lateinl. Schulen 1901, Heft 8.)

„... Im Interesse einer stetigen Fortentwicklung der Lehrmethode und des Lehrstoffes
ist es mit Freuden zu begrüßen, daß die Verfasser sich an die mit so anerkannten Vorzügen ver-
sehenen Lehrbücher von Bardey möglichst eng angelehnt haben. Noch ist es der alte „Bardey“,
aber ein neuer, frischer Geist weht bereits hindurch, bald verständiger gruppierend, bald die
wichtigen Momente deutlicher und schärfer markierend, hier durch Form oder Inhalt fast wert-
lose Aufgaben ausmergend, dort im Sinne einer gesunden Konzentration Aufgaben aus den ver-
schiedensten Unterrichtszweigen einschleudend.“
(Archiv für Mathematik und Physik.)

Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie.

Planimetrie—Stereometrie. Ebene und sphärische Trigonometrie.

Nach analytisch-konstruktiver Methode bearbeitet von Dr. M. Schuster, Prof. an der Oberreal-
schule zu Oldenburg.

Ausgabe A: für Vollanstalten. 1. Teil: Planimetrie. [VIII u. 147 S.]
Mit 2 lithograph. Tafeln. gr. 8. 1899.

In Leinw. geb. n. \mathcal{M} 2.— — 2. Teil: Trigonometrie. [VII u. 112 S.]

Mit 1 lithogr. Tafel. gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. \mathcal{M} 1.60. —

3. Teil: Stereometrie. [VII u. 80 S.] Mit 1 lithogr. Tafel. gr. 8.
1901. In Leinwand geb. n. \mathcal{M} 1.40.

Ausgabe B: für Progymnasien u. Realschulen. Mit 2 lithogr. Tafeln.
[VII und 111 Seiten.]
gr. 8. 1900. In Leinwand gebunden n. \mathcal{M} 1.60.

Ausgabe C: für Mittelschulen. Bearbeitet unter Dr. Bieler, Rektor
der städt. Knabenmittelschule zu Cottbus. Mit 1 lithogr. Tafel. [VIII u.
88 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand gebunden n. \mathcal{M} 1.40.

Schweiz. Lehrerzeitung, Februar 1903:

„... Die Bücher sind geeignet, einen wesentlichen Fortschritt im geometrischen
Unterricht an den höheren Schulen anzubahnen... Ich benutze diese Bücher seit zwei
Jahren und habe sehr gute Erfahrungen gemacht.“

Zeitschrift f. lateinl. h. Schulen XIV. Jahrg., Heft 6:

„... Jetzt, da das ganze Lehrbuch vorliegt, kann man dasselbe als ein nach
Methode, Inhalt und Form wohlgeordnetes Werk bezeichnen, welches die Beachtung aller
Fachgenossen verdient. Ein nach den Grundsätzen dieses Buches erteilter Unterricht
wird die Jugend anregen und ihr das Gefühl des Könnens schaffen.“

1*

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. Ann. 18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

Die Mathematik auf den Gymnasien

und Realschulen. Für den Unterricht dargestellt von **Heinrich Müller**,

Professor am Königl. hohen Kaiserin-Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg. ↗

Erster Teil: Die Unterstufe. Lehrangabe der Klassen Quarta bis Untersekunda. geb. n. 2.50 M.

Ausgabe A: für Gymnasien und Progymnasien. 2. Auflage. geb. n. 1.60 M.

Ausgabe B: für reale Anstalten und Reformschulen. geb. n. 2.20 M.

Zweiter Teil: Die Oberstufe. Lehrangabe der Klassen Obersekunda und Prima. geb. n. 3.20 M.

Ausgabe A: für Gymnasien und Progymnasien. geb. n. 3.40 M.

Ausgabe B: für reale Anstalten und Reformschulen. Herausgegeben unter Mitwirkung von **Albert Hupe**, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Charlottenburg. I. Abteilung. geb. n. 2.80 M. II. Abteilung. geb. n. 2.40 M.

Ausgabe C: für Seminare und Präparandenanstalten. Bearbeitet von **A. Baltin** und **W. Maitwald**. geb. n. 2.20 M.

Ausgabe für Präparandenanstalten. Bearbeitet von **A. Baltin** und **J. Segert**. geb. n. 3.20 M.

Dr. Gille in *Lehrproben und Lehrgänge von Fries und Menge, Oktober 1899*:

„Das Lehrwerk von **H. Müller** enthält den gesamten, für höhere Schulen ausreichenden Stoff in übersichtlicher, klarer und exakter Darstellungsweise.... Der Plan ist ein reichlicher und wohlgeordneter Übungsstoff beigegeben.“

Oberlehrer **Stegemann** in *Hefmanns Zeitschrift, April 1900*:

„Das besprochene Unterrichtswerk ist ein in jeder Beziehung brauchbares und erstrebenswertes.“

Sammlung von Aufgaben aus der

Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen von **Müller und Rutnewsky**. ↗

Ausgabe A, I. Teil: Für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen.

2. Aufl. gr. 8. Preis: geb. n. 2.20 M.

II. Teil: Für die oberen Klassen der Gymnasien. Preis: geb. n. 3.20 M.

Ausgabe B, I. Teil: Für reale Anstalten und Reformschulen. 2. Aufl.

Preis: geb. n. 2.80 M.

II. Teil: Preis: geb. n. 3.40 M.

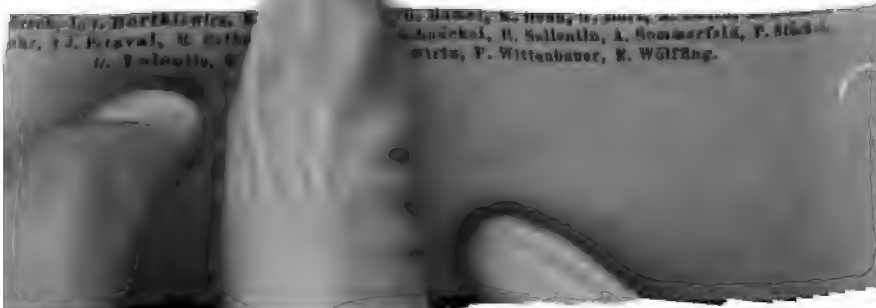
Ausgabe C: Für Seminare und Präparandenanstalten. Bearbeitet von **A. Baltin** und **W. Maitwald**. Preis: geb. n. 3. — M.

Ergebnisse zu Teil I sind nur gegen Einsendung des Betrages von 80 Pfg. direkt vom Verlage zu beziehen.

Die vorliegende, für die Mittellassen der höheren Schranstalten bestimmte Sammlung enthält Aufgaben für den rechenenden Teil aus sämtlichen Gebieten des mathematischen Unterrichts. Im Gegensatz zu bewährten Sammlungen, die sich lediglich auf ein Gebiet beschränken und deshalb den Gebrauch mehrerer Bücher nötig machen, falls der Lehrer nicht zum Vorführen greifen will, bringt sie neben reichlichem Übungsstoff für die Arithmetik und deren Anwendungen auch aus der Trigonometrie und Stereometrie Aufgaben, deren Mannigfaltigkeit allen auf dieser Stufe zu leistenden Ansprüchen genügen dürfte.

.... Und in der Tat verdient diese Sammlung eine weite Verbreitung. Sie ist außerordentlich reichhaltig, so daß der Lehrer nicht jedes Jahr auf denselben Übungsstoff angewiesen ist....

(Sächs. Schulzeitung 1902, Nr. 10)



Fortsetzung von S. 2.]

regeln und bei der Einführung der Bruchrechnung hervor und war naturgemäß maßgebend für die Gestaltung der Vorübungen zur Arithmetik.

Das Rechenbuch schließt sich eng an die neuen preussischen Lehrpläne an. Die Ausgabe A unterscheidet sich von B nur durch das Fehlen der Vorübungen zur Arithmetik.

Ergebnisse zu beiden Ausgaben (M. 1.20) sind nur gegen Einsendung des Betrags direkt vom Verlage zu beziehen.

*Der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung.

Mit reichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten zum Gebrauch an allen Lehranstalten bearbeitet von ERNST WIENECKE, Lehrer in Berlin. Mit 59 Figuren im Text. [IV u. 97 S.] gr. 8. geb.

Das Buch ist für die Hand des Lehrers bestimmt und bietet eine methodisch geordnete Stoffunterlage. Der propädeutische Kursus soll die Schüler fähig machen für die Aufnahme begrifflicher Wahrheiten und die notwendigsten praktischen Vorkenntnisse und Fertigkeiten in rein anschaulicher Weise, also unter Ausschaltung des logischen Schlusses vermitteln. Das erreicht der Verfasser, indem er in streng psychologisch begründeter Weise zunächst eine Einzelform behandelt, um eine klare Anschauung zu vermitteln. Diese Einzelform wird dargestellt durch eine Lehrfigur, die in allen Teilen genau gemessen wird. Indem diese schrittweise an der Tafel entsteht, erhalten die Schüler gründliche Einsicht, die dadurch erhöht wird, daß die Schüler die Lehrfigur schrittweise mitzeichnen. Um das dieser Figur Wesentliche herauszuarbeiten, schließt sich hieran die Behandlung derselben Figur in kontinuierlicher Formenreihe, welche erkennen läßt, was allen Figuren gemeinsam ist. Es wird also anschaulich aus der Anschauung selbst heraus der Begriff entwickelt. Die behandelten Grundformen (z. B. das gleichschenklige Dreieck) dienen später dazu, zusammengesetzte Formen (z. B. Quadrat und Rhombus) zu deuten. Hierbei weiß der Verfasser geschickt den geometrischen Beweis propädeutisch zu behandeln, indem er durch das Mittel der Umdeutung Unbekanntes durch Bekanntes klärt. — Die Mittel der Propädeutik sind Zeichnung, Messung, Berechnung und Überlegung. Der Unterrichtsgang ist selbständig ohne Rücksicht auf das wissenschaftliche System bestimmt und stellt eine in sich geschlossene Formenlehre dar. Dem praktischen Teil ist unter „Allgemeines“ eine kurze Begründung des methodischen Standpunktes vorausgeschickt. — Die durchaus gründliche Arbeit wird ein gutes Hilfsmittel für einen bildenden geometrischen Unterricht sein.

*Physikalisches Praktikum für Anfänger. Dargestellt in 25 Arbeiten von Dr. EMANUEL PFEIFFER, Professor an der Kgl. Industrieschule München. Mit 47 in den Text gedruckten Abbildungen. [VIII u. 154 S.] gr. 8. geb.

Die bisher existierenden Werke, welche sich mit der Anstellung praktischer Arbeiten im physikalischen Laboratorium befassen, streben wohl alle, wenn auch von verschiedenem Standpunkte aus, eine gewisse Vollständigkeit hinsichtlich des vorhandenen Lehrstoffes an. Infolge seines großen Umfangs bleibt es dann, weil Zeit und Raum mangeln, bei den allgemeineren Darlegungen; das Eingehen auf Einzelheiten wird der Tätigkeit des Lehrers überlassen. Da aber gerade diese Details für den Anfänger am wichtigsten und schwierigsten sind und eingehende Überwachung und Belehrung des einzelnen Praktikanten erfordern, so ist bei zu großer Schülerzahl die Gefahr vorhanden, daß das Arbeiten

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. Ann. 18, S. 535. 1881.

ein unrationelles, oberflächliches, ungenaues und deshalb wenig befriedigendes und nutzbringendes wird. Hier sucht das vorliegende Buch eine Lücke in unserer physikalischen Literatur auszufüllen, indem es die fundamentalsten Teile der Physik in 25 Arbeiten auf 150 Seiten behandelt. Die Auswahl beansprucht nicht Vollständigkeit und gleichmäßige Verteilung des Stoffes; dagegen hat sie sich in langjähriger Praxis für den Anfänger als brauchbar bewährt. Der Theorie jeder Aufgabe ist die kurze Einleitung gewidmet, in welcher die zum Rechnen gebrauchten (meist nicht abgeleiteten) Formeln übersichtlich zusammengestellt sind; sodann ist aber der praktischen Durchführung ein breiter Raum gelassen. Der Schüler wird an sorgfältiges und zuverlässiges Arbeiten gewöhnt, sowie mit den wichtigsten physikalischen Meßmethoden, mit rationaler Handhabung einfacher und feiner Meßapparate, mit den nötigen Hand- und Kunstgriffen zur Erzielung brauchbarer Resultate, mit den Grenzen der erzielbaren Genauigkeit und mit der Zusammenfassung seiner Beobachtungen in Zahlentabellen vertraut gemacht. Die zahlreich eingestreuten methodischen Bemerkungen, die nicht am Schreibtisch, sondern aus dem unmittelbaren Verkehr mit den Praktikanten entstanden sind, sollen den Schüler möglichst vor Zeitverlust und die Apparate vor Beschädigung schützen. Spezielles Augenmerk ist den 47 Abbildungen gewidmet; sie sind zum einen Teil schematische Figuren, zum anderen — was besonders hervorzuheben ist — Autotypen, welche aus photographischen Originalaufnahmen im Laboratorium hergestellt sind. Sie sollen die Apparate gewissermaßen im Betrieb zeigen. — Auf diese Weise hofft der Verfasser sein Ziel erreicht zu haben, nämlich den Praktikanten möglichst rasch und gründlich zu befähigen, mit einer gewissen Selbständigkeit auch unter ungünstigsten Verhältnissen höheren Anforderungen an seine praktischen Leistungen zu genügen.

Pfeiffer.

Leitfaden der Projektionslehre für Gymnasien und Realanstalten. Von Prof. Dr. C. H. MÜLLER, am Kgl. Kaiser-Friedrichs-Gymnasium zu Frankfurt a. M., und Prof. Otto PRESLER, an der Städtischen Oberrealschule zu Hannover.

Ausgabe A: Vorzugweise für Realgymnasien und Oberrealschulen [VIII u. 320 S.] gr. 8. Mit 223 Figuren i. Text. In Leinw. geb. n. M. 4.—

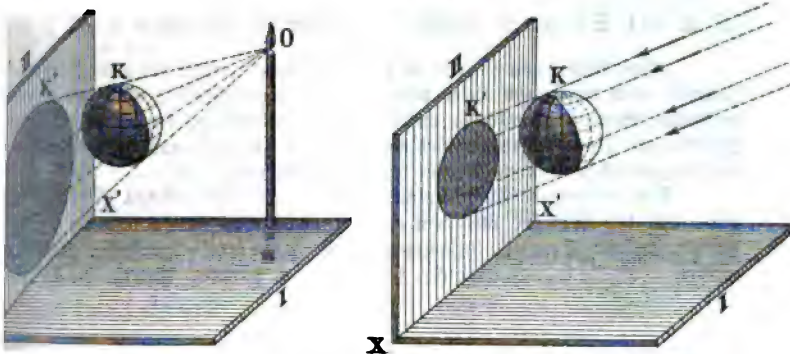
Ausgabe B: Für Gymnasien und sechstufige Realanstalten. [VI u. 138 S.] gr. 8. Mit 122 Figuren im Text. In Leinw. geb. n. M. 2.—

Diese Leitfäden der Projektionslehre führen sich im Neben-Titel als „Übungsbücher der konstruierenden Stereometrie“ ein. Hiermit ist die eigenartige Stellung der Bücher in der Schulbuch-Literatur gekennzeichnet. Sie umfassen nämlich in breiter, leicht lesbarer Darstellung den gesamten projektivischen (perspektivischen) Übungsstoff, soweit er auf stereometrischer Grundlage für höhere Schulen in Betracht kommen kann. Das Werk soll den entsprechenden Forderungen der neuen preußischen Lehrpläne (1901), sowie den Thesen der deutschen Mathematikertage (Gießen 1901) Genüge leisten und legt daher weniger Wert auf eine ausgedehnte Entwicklung der darstellenden Geometrie, als vielmehr auf die Anwendungen der Parallel-Projektion (Perspektive), der schiefen sowohl als der orthogonalen, in den verschiedenen Schulfächern, um zugleich ein heilsames Gegengewicht gegenüber dem oft maßlos rechnerischen Betriebe des mathematischen Unterrichts zu bieten. Von jenen Anwendungen sind hervorzuheben: Konstruktionen der systematischen Stereometrie, Krystallkunde, Physik, mathematische Erd- und Himmelskunde und insbesondere des

Brosch., 12 v. Buchstaben,
Hoch, 12 v. Buchstaben, 12 v. Buchstaben,
6. Auflage, 12 v. Buchstaben, 12 v. Buchstaben,

12 v. Buchstaben, 12 v. Buchstaben, 12 v. Buchstaben,
12 v. Buchstaben, 12 v. Buchstaben, 12 v. Buchstaben,
12 v. Buchstaben, 12 v. Buchstaben, 12 v. Buchstaben,

genannten Linear-Zeichnens. Ein Anhang behandelt auch die Zentral-Projektion (Perspektive) nebst den wichtigsten zentralen (arten-Entwürfen der Geographie. — Durch die beiden Ausgaben (A und B) ist auf die Unterschiede zwischen den humanistischen Gymnasien und den realistischen Vollanstalten hinreichend Rücksicht genommen. Dabei hat die Ausgabe B (für Gymnasien) so gestaltet werden können, daß sie zugleich den Lehrstoff für sechsstufige Realschulen enthält. Der sehr niedrig gesetzte Preis der Leitfäden ermöglicht die Einführung in allen genannten Anstalten, wobei berücksichtigt werden muß, daß sie für mehrere Fächer und eine Reihe von aufsteigenden Jahreskursen bestimmt sind. Ein ausführlicher Prospekt gibt die wesentlichsten Gesichtspunkte für den Gebrauch in ausführlicher Darstellung und hebt auch den Wert der Bücher für den angehenden Studenten und für das Selbststudium hervor.



Ans Müller und Frevler, Leitfaden der Projektionslehre, Ausg. B.

Reithobisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik von Prof. Dr. Gustav Holzmüller, Mitglied der Kaiserl. Leopold.-Karol. Akademie der Naturforscher, früher Mathematiker der Gymnasien zu Magdeburg und Elberfeld, Direktor a. D. der jetzigen Oberrealschule und der jetzigen Rgl. höheren Maschinenbauschule zu Hagen i. W. Dritter Teil: Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Oberklassen realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschul-Mathematik. Zweite Auflage, im Anschluß an die neuen preussischen Lehrpläne mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen bearbeitet. Mit 223 Figuren im Text. [XIV u. 370 S.] gr. 8. geb. n. M. 4.40.

Den neuen Lehrplänen entsprechend ist die Neuauflage des dritten Teiles erheblich erweitert worden, sowohl hinsichtlich der synthetischen als auch der analytischen Geometrie und ebenso der Stereometrie. Für die letztere ist eine Sammlung von Aufgaben beigelegt. Ganz neu ist eine Reihe von Anwendungen auf die mathematische Physik, besonders die Niveaulinien und Kraftlinien für gewisse Probleme des logarithmischen Potentials betreffend, wobei die quadratischen Einteilungen der Ebene durch Kurvenscharen eine besondere Rolle spielen. Die beiden ersten Bände sind inzwischen durch den Universitätsprofessor Zapina in Buenos Aires ins Spanische überetzt worden. Auch zu einer Überetzung ins Ungarische wurde die Erlaubnis erteilt.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, 18, S. 535. 1881.

Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geometrie und Stereometrie

nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Optik,
Physik, Technik, Volkswirtschaftslehre, für die oberen Klassen
höherer Schulen von Dr. A. Schülke, Professor am Gymnasium
zu Oosterode, Ost-Pr.

Mit 46 Figuren im Text.

[X u. 194 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand gebunden n. M. 2.20.

„Eine Arbeit von Schülke zu studieren erweckt immer ein ganz besonderes Interesse und bietet dem Leser neben dem geistigen Genuß auch den Vorteil reichlicher Belehrung. Um so mehr werden die Vorzüge da hervortreten, wo Schülke auf seinem eigenen Gebiete geschaffen hat und aus der Fülle seines erfahrungsreichen Wissens heraus seine Darbietungen giebt. . .

Die vorliegende Aufgabensammlung, die ein sehr reiches Material enthält, das der Verfasser mit dem an ihm gewöhnten Fleiße und der bis ins kleinste treuen Sorgfalt zusammengestellt hat, kann durchaus empfohlen werden. . .“

(Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr. XXXIV.)

Arithmetische Regelhefte

mit Wiederholungstafeln

von Dr. W. Eichhorn, Oberlehrer
in Frankfurt a/M.

In 4 Heften. gr. 8. 1900.

- Heft 1. Quarta (Quinta): Rechnen als Vorstufe der Mathematik. In dauerhaftem Umschlag n. M. —.40.
- Heft 2. Untertertia: Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Gleichungen. In dauerhaftem Umschlag n. M. —.40.
- Heft 3. Obertertia: Proportionen, Potenzen, Wurzeln, Gleichungen. In dauerhaftem Umschlag n. M. —.40.
- Heft 4. Untersekunda: Logarithmen, Reihen, Binet-Binet- und Rentenrechnung. In dauerhaftem Umschlag n. M. —.80.

„Diese Regelhefte schließen sich durchaus den neuen Lehrplänen und Lehraufgaben an und bilden vermöge ihrer eigenartigen Auffassung und Darstellungsweise und der dadurch ermöglichten besonderen Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse des praktischen Unterrichtsbetriebes ein äußerst brauchbares Hilfsmittel für den arithmetischen Anfangsunterricht an der Seite des eigentlichen Lehrbuches. . .“

(Zeitschrift f. lateinlose h. Schulen 1899, Heft 3/4.)

J. Schückel, H. Sallentin, A. Hammerfeld, F. Mühl,
W. Wirtz, F. Wittmann, E. Witting.

Lehrbuch der praktischen Geometrie. Bearbeitet für den Unterricht an Baugewerkeschulen und technischen Mittelschulen, sowie zum Gebrauch in der Praxis von Dr. M. DOLL und Professor NESTLE. Zweite, erweiterte und umgearbeitete Auflage. gr. 8. geb.

Die Erteilung des Unterrichts in der praktischen Geometrie an der Großh. Baugewerkeschule in Karlsruhe gab die Veranlassung zur Abfassung des Lehrbuches. Da an der Baugewerkeschule in Karlsruhe wie an vielen anderen technischen Mittelschulen in den letzten Jahren besondere Tiefbauabteilungen für den Unterricht in Erd-, Straßen-, Wasser- und Eisenbahnbau eingerichtet worden sind, so ist der Stoff in der neuen Auflage wesentlich vermehrt worden, indem der Theodolit aufgenommen worden ist, die verschiedenen Konstruktionen des Nivellierinstrumente, die Prüfung und Berichtigung dieser Instrumente ausführlich behandelt werden und die Absteckung von Kreisbogen, das Aufstellen von Lattenprofilen und das Einschnneiden der Schnurgerüste hinzugefügt worden ist. Wir hoffen, daß das Lehrbuch sich durch diese Erweiterung des Stoffes zu den alten Freunden neue erwerben werde.

Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. In 2 Teilen. I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. H. GANTER, Professor an der Kantonsschule in Aarau, und Dr. F. RUDIO, Professor am Polytechnikum in Zürich. Mit 53 Figuren im Texte. Fünfte, verbesserte Auflage. [VIII u. 188 S.] gr. 8. In Leinw. geb. n. M. 3.—

II. Teil. Die analytische Geometrie des Raumes. Von Prof. Dr. F. RUDIO. Mit 12 Figuren im Texte. Dritte, verbesserte Auflage. [X u. 184 S.] gr. 8. In Leinwand geb. n. M. 3.—

Die Zahl der Lehrbücher über analytische Geometrie, die von vornherein den zu behandelnden Stoff in enge, einem ersten Studium entsprechende Grenzen einschließen, innerhalb dieser Grenzen aber eine möglichst große Vollständigkeit, verbunden mit einer streng wissenschaftlichen Darstellung, anstreben, ist nicht sehr groß. Das vorliegende Lehrbuch will in diesem Sinne einem vielfach empfundenen Bedürfnis entgegenkommen. Es wendet sich in erster Linie an die oberen Klassen höherer Lehranstalten (Gymnasien, Realgymnasien etc.), ist aber auch so gehalten, daß es mit Vorteil zum Selbststudium wird benutzt werden können.

In sechs Abschnitten wird die analytische Geometrie des Punktes, der Geraden, des Kreises, der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel behandelt, in der Meinung, daß die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit den der Schule zugänglichen Mitteln nicht mehr in befriedigender Weise durchgeführt werden kann und daß man jedenfalls die dazu erforderliche Zeit viel vorteilhafter zu einem gründlicheren Studium der analytisch-geometrischen Eigenschaften der einzelnen Kegelschnitte verwenden wird. Von andern Werken unterscheidet sich das vorliegende Buch noch besonders dadurch, daß es der eigentlichen analytischen Geometrie der Ebene eine solche der geraden Linie

brausschickt, d. h. zuerst die Lagenverhältnisse von Punkten einer und derselben Geraden (der Abscissenachse) studiert und insbesondere im Anschluß an Möbius die Theorie des Teilverhältnisses, des Doppelverhältnisses und der harmonischen Punkte entwickelt.

Die Brauchbarkeit ihres Buches suchten die Verfasser durch ein sorgfältig ausgewähltes Übungsmaterial zu erhöhen. Die Gesamtzahl der auf sämtliche Paragraphen des Buches sich verteilenden Übungsaufgaben beträgt 451.

Auch in der vorliegenden fünften Auflage haben sich die Verfasser in wesentlichen darauf beschränkt, den Text auf das sorgfältigste zu evidieren. Neu bearbeitet wurden nur die beiden Paragraphen, die von den harmonischen Strahlen und von Kreisbüscheln handeln. Infolgedessen reichen die Nummern der §§ 27—39 teilweise von den entsprechenden der vierten Auflage ab.

Möge sich das Buch auch fernerhin der guten Aufnahme erfreuen, die ihm bisher zu teil geworden ist!

Die vorliegende dritte Auflage der analytischen Geometrie des Raumes (des zweiten Teiles der „Elemente der analytischen Geometrie“) stellt sich als eine sorgfältige Umarbeitung der zweiten Auflage dar. Alle Paragraphen wurden gründlich revidiert, damit das Buch, das jetzt eine so große Verbreitung gewonnen hat, in immer vollkommenerer Gestalt erscheine. Wesentlich vermehrt wurde das letzte Kapitel, insbesondere die Theorie der Flächen zweiten Grades. Der Verfasser suchte dadurch den vielfach geäußerten Wünschen gerecht zu werden, in der Meinung, daß nunmehr beispielsweise Studierende technischer Hochschulen nicht mehr nötig haben sollten, noch zu weiteren analytisch-geometrischen Hilfsmitteln ihre Zuflucht zu nehmen. Trotz dieser Vermehrung hat sich der Umfang des Buches nur unwesentlich verändert.

Vierstellige Logarithmentafeln. Für den Schulgebrauch zusammengestellt von Dr. A. SCHÜLKE. Vierte Auflage. [II u. 18 S.] gr. 8. Steif geh. n. \mathcal{M} — .60, in Leinw. geb. n. \mathcal{M} — .90.

Die Tafel gewährt von allen vierstelligen Tafeln wohl die größte Einfachheit, Übersichtlichkeit und Kürze der Rechnung, und sie ermöglicht durch Beifügung von zahlreichen Tabellen die häufigere Anwendung der Mathematik auf wirkliche Verhältnisse.

Diese Vorzüge haben bewirkt, daß nach dem amtlichen Verzeichnis der an höheren Lehranstalten Preußens eingeführten Schulbücher die Tafel am 1. Juli 1899 an 24 [gegenwärtig etwa an 40] Anstalten benutzt wird — ein Erfolg, den nach derselben Quelle andere vierstellige Tafeln auch nicht annähernd erreicht haben. Ferner sei darauf aufmerksam gemacht, daß die Benutzung der Tafel durch eine neuen erschienenen Aufgaben-Sammlung erleichtert wird, welche zahlreiche Beispiele aus der reinen und angewandten Mathematik für 4 Stellen und Dezimalteilung des Grades enthält.

Da nun durch die neuen Lehrpläne vierstellige Tafeln ausdrücklich gestattet sind, so kann die Tafel den Herren Fachlehrern der Mathematik zur Prüfung für etwaige Einführung angelegentlich empfohlen werden.

Habenicht, Schlüssel zur Gleichungslehre. [18 S.] gr. 8. geh. n. \mathcal{M} — .40.

Die Arbeit geht, um das Interesse der Lernenden dauernd zu fesseln, aus von Gleichungen und bespricht die einzelnen Rechnungsarten

2*

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius 13, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

immer da, wo sie zum Lösen der jedesmal vorliegenden neuen Gleichungen nötig sind.

So wird der abstrakt wissenschaftliche Charakter der bisherigen Lehrbücher, der in den Augen der Schüler im ersten Jahre etwas Stilles, weises, kapitelweise Eingeteiltes, scheinbar Zweckloses bietet, vermieden und die Lust zu lernen ununterbrochen wach gehalten.

Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten von Professor MARTIN GIRNDT, Königl. Oberlehrer. I. Teil: Lehre von den ebenen Figuren. 2. Aufl. Mit 233 Figuren im Text und 207 der Baupraxis entlehnt. Aufgaben. [X u. 87 S.] gr. 8. kart. n. *M* 2.40.

M. Cantor, politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. Zweite Auflage. [X u. 155 S.] gr. geb. n. M. 1.80.

Die zweite Auflage unterscheidet sich ihrer Anlage nach nicht so von der ersten, dagegen sind in Einzelheiten mancherlei Veränderungen zu bemerken. Einzelne irrige Zahlen sind richtiggestellt worden. Die am 1. Januar 1899 eingetretene Vereinheitlichung der deutschen Brancheneinrichtungen hat berücksichtigt werden müssen. Der Einfluß, welchen der im allgemeinen sinkende Zinsfuß auf den Tarif von Versicherungsgesellschaften ausübte, mußte Verwendung finden. Nicht minder wurde seit dem Erscheinen der ersten Auflage Satzungsveränderungen anderer Art bei Versicherungsgesellschaften vorgekommen, an welchen nicht vorbeigegangen werden durfte, u. s. w. Der Verfasser hofft durch all diese nicht unwesentlichen, wenn auch dem Raume nach nur geringfügigen Verbesserungen die Brauchbarkeit des Büchleins noch erhöht zu haben.

M. C.

Aus den Besprechungen der 1. Auflage:

Der Gegenstand ist vielfach erschöpfend behandelt und durch instruktive Beispiele erläutert, die Darstellung ist einfach und leicht verständlich, daher kann das Buch besten empfohlen werden.

Dr. Franz Wallentin (Z. f. d. ö. G. 1899, Heft 10)

Ein nützliches kleines Buch, das die für Finanzbeamte, Kapitalisten, Versicherungstechniker unentbehrlichen Rechnungsarten nicht nur gemeinverständlich darstellt, sondern auch historisch und rationell erläutert. Auch der Jurist, der nicht selten mit diesen Dingen zu tun hat, wird sich freuen, daß ihm der spröde Stoff hier einmal in angenehmer Form dargeboten wird.

R. Ehrenberg (Zeitschrift für Handelsrecht, 49. Bd., 1/2. Heft)

Selten ist auf so engem Raume ein so reicher und für den tüchtlichen Verkehr so wertvoller Wissensstoff zusammengetragen worden, wie in dem uns vorliegenden Buche Cantors; dabei ist die Art, wie gegeben ist, so ansprechend, daß auch derjenige, welcher für derlei Dinge keine Vorliebe empfindet, durch die Umstände aber genötigt ist, sich Belehrung zu verschaffen, durch die Lektüre befriedigt werden wird. Wir sind der Überzeugung, daß das von der Verlagshandlung gefällig ausgestattete Werkchen in den weitesten Kreisen Verbreitung finden werde, weil ja auch das Bedürfnis nach Belehrung über die darin in Sprache gebrachten Dinge sehr verbreitet ist. Lehrern der Mathematik möchten wir es aber ganz besonders empfehlen.

Czuber (Z. f. d. R. 1900, Heft 5)

Fortsetzung S. 1

Darstellende Geometrie.

Mit einer Sammlung von 1800 Dispositionen zu Aufgaben aus der darstellenden Geometrie.

von
Dr. Christian Beyel,

Dozent am Polytechnikum in Zürich.

Mit einer Tafel. [XII u. 189 S.] gr. 8. geb. n. M. 3.60.

„Das Werk hat mir nach Anordnung und Durchführung sehr gut gefallen, und sende Ihnen meine herzlichsten Glückwünsche zu demselben.“

Geh. Regr. G. Hauck, Prof. der techn. Hochschule in Charlottenburg.
„Je viens de lire l'ouvrage de M. Beyel, et je tiens à dire tout d'abord que, je crois point qu'il existe, au point de vue didactique, un tel ouvrage, un ouvrage, sur le sujet, et qui ait une importance comparable. Ce n'est rien qu'une révolution radicale dans la manière d'enseigner cet art. — J'estime qu'il est presque impossible de donner à un lecteur qui n'étudierait pas le livre lui-même une idée précise de l'excellence de sa doctrine.“

On comprend la facilité que donnent les dispositions aux professeurs pour indiquer aux élèves, sans étude préalable, des exercices toujours exécutables jusqu'à la fin, et éviter aux élèves, qui s'exercent d'eux-mêmes dans cette discipline, les fastidieux exercices qu'ils font trop souvent, lorsqu'ils prennent les données au hasard.

Malheureusement pour nous, le livre de M. Beyel est écrit en allemand.
E. Lemoinne (Paris). (Aus: L'enseignement mathématique, 1902, pag. 63)

„Voici un ouvrage qui mérite d'être signalé à tous ceux, qui enseignent la géométrie descriptive. Il se recommande tant par l'ordre méthodique dans lequel sont exposés divers problèmes que par le choix bien ordonné des exercices.“

Prof. H. Fehr (Université de Genève).

(Aus: Revue générale des sciences pures et appliquées, 1902, pag. 18)

„Das durch Knappheit und Klarheit ausgezeichnete Buch...“

Oberlehrer A. Hupe, Charlottenburg.

(Aus: Müller, die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen)

Lehrbuch der Experimentalphysik

von

Dr. Adolph Wüllner,

Professor der Physik an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen.

Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage.

4 Bände. gr. 8. geb. n. M. 56.—, in Hftbd. n. M. 64.—

I. Band. Allgemeine Physik und Akustik. Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen. [X u. 1000 S.] 1895. n. M. 12.—, in Hftbd. n. M. 14.—

II. — Die Lehre von der Wärme. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 336 S.] 1896. n. M. 12.—, in Hftbd. n. M. 14.—

III. — Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität mit einer Einleitung Grundzüge der Lehre vom Potential. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen u. Figuren. [XV u. 1415 S.] 1897. n. M. 18.—, in Hftbd. n. M. 22.—

IV. — Die Lehre von der Strahlung. Mit 299 in den Text gedruckten Abbildungen u. Figuren u. 4 lith. Tafeln. [XII u. 1042 S.] 1899. n. M. 14.—, in Hftbd. n. M. 17.—

Die wissenschaftlichen Vorträge dieses reich ausgestatteten Lehrbuches sind von Kritik einstimmig anerkannt worden. Dasselbe hat sich die Aufgabe gestellt, einerseits die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen bekannt zu machen, andererseits denjenigen, welche tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, als Vorträge zu dienen; es hat aber, ohne den ersten Zweck außer acht zu lassen, die zweite, wissenschaftliche Aufgabe mehr ins Auge gefaßt, als dies von den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik bis jetzt geschehen ist.

Die vorliegende 5. Auflage der Experimentalphysik hat die gleiche Haltung; die früheren Auflagen; das Buch soll unter dem steten Hinweis auf die Originalarbeiten eine Übersicht geben über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zur Zeit gelangt ist.

Der Schwerpunkt des Werkes liegt hiernach in den Experimentaluntersuchungen und deshalb sind alle wichtigeren neueren Untersuchungen, die bis zur Bearbeitung des betreffenden Bandes erschienen waren, aufgenommen; wo es wünschenswert war, wurde auch auf ältere Arbeiten zurückgegriffen. Die Erweiterung des experimentellen Materials verlangte auch ein tieferes Eingehen in die Theorien; dieselben sind so dargestellt, wie es ohne zu ausgedehnte Rechnungen möglich war. Das neu zu behandelnde Material war ein recht ausgedehntes, daher auch der ziemlich erhebliche gewachsene Umfang des Buches.

A. Hülsmann, Prof. der Physik an der Universität zu Bonn, H. Hertz, Prof. der Physik an der Universität zu Berlin, O. Mohr, J. J. Petzval, B. Reiche, E. Engel, J. Schönböck, H. Seelmann, A. Sommerfeld, P. Silberstein, G. Valentini, S. Weissbach, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, K. Wüllfing.

Fortsetzung von S. 12.]

In dem Buche ist eine große Summe theoretischen und praktischen Wissens niedergelegt und in anziehender, verständlicher, präziser und knapper Form zum Ausdruck gebracht; es umfaßt im ganzen mit den Tabellen nur 186 Seiten. Der Verfasser hat es verstanden, auch die einfachsten Materien in interessanter Weise darzustellen. Für den Leser, welchem der Stoff neu ist, ist das Studium des Büchleins meiner Ansicht nach dadurch möglichst erleichtert, daß es meist nur kurze Artikel enthält, der Leser findet zur rechten Zeit eine Ruhepause. Das Buch wird von Nutzen sein für den Verwaltungsbeamten, Kameralisten, Bankier, Kaufmann und jeden Geschäftsmann, welcher mit den nötigen elementaren Kenntnissen der Mathematik ausgestattet ist, für den Mathematiker und für den Lehrer der Mathematik an den verschiedensten Fachschulen, er wird hier sehr oft über den Kreis rein mathematischen Wissens hinausgeführt. Wenn sich auch nicht jeder Leser für alle Fragen interessiert, so wird doch jeder eine für ihn wichtige Frage behandelt finden. Der Preis des empfehlenswerten Büchleins ist nur 1.80 M. Möge dasselbe die verdiente Beachtung und Verbeirung finden!

Dr. Max Mack (Blätter für admin. Praxis, 1900, Heft 4/5).

**Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Ein-
schluß ihrer Anwendungen.** Herausgegeben im Auftrage
der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu
München, der Kaiserlichen Akademie der Wissen-
schaften zu Wien und der Königlichen Gesellschaft
der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mit-
wirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden. gr. 8.
geh. III. Band: Geometrie. Redigiert von W. Fr. Meyer.
in Königsberg. In 3 Teilen. II. Teil. 1. Heft. [160 S.]
M. 4.80.

Enthaltend: Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme. Von *Friedrich Dingeldey* in Darmstadt. (Mit 14 Figuren im Text.)

Bisher erschienen:

- I. Band. Arithmetik und Algebra redigiert von W. Fr. Meyer in Königsberg.
1. Heft. 1898. n. M. 3.40. 2. Heft. 1899. n. M. 5.40. 3. Heft. 1899.
n. M. 5.80. 4. Heft. 1899. n. M. 4.80. 5. Heft. 1900. n. M. 6.40. 6. Heft.
1901. n. M. 7.20. 7. Heft. 1902. n. M. 5.60.
- II. — Analysis, in 2 Teilen. H. Burkhardt in Zürich.
I. Teil. 1. Heft. 1899. n. M. 4.80. 2. u. 3. Heft. 1900. n. M. 7.50.
4. Heft. 1900. n. M. 4.80.
II. Teil. 1. Heft. 1901. n. M. 5.20.
- III. — Geometrie, in 3 Teilen. W. Fr. Meyer in Königsberg.
II. Teil. 1. Heft. 1903. n. M. 4.80.
III. Teil. 1. Heft. 1902. n. M. 5.40.
2/3. Heft. 1903. n. M. 6.80.
- IV. — Mechanik, in 2 Teilen. Felix Klein in Göttingen.
I. Teil. 1. Heft. 1901. n. M. 3.40. 2. Heft. 1901. n. M. 4.60.
II. Teil. 1. Heft. 1901. n. M. 3.80. 2. Heft. 1903. n. M. 3.80.
3. Heft. 1903. n. M. 4.60.
- V. — Physik, in 2 Teilen. A. Semmerfeld in Aachen.
I. Teil. 1. Heft. 1903. n. M. 4.80.
- In Vorbereitung:
- VI. 1. — Geodäsie und Geophysik E. Wiechert in Göttingen.
VI. 2. — Astronomie K. Schwarzschild in Göttingen.
VII. — Historische, philosophische und didaktische
Fragen behandelnd, sowie Generalregister. (Bearbeiter noch unbestimmt.)

Unter der Presse:

- | | |
|---------------------|--------------------|
| Band II, 1. Heft 5. | Band V, 1. Heft 1. |
| " III, 1. Heft 1. | " V, 2. Heft 1. |
| " IV, 1. Heft 3. | |

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius,
18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

19

89

en
lie
ls-
ng
ne
na
en
en
en,
ar-
ias
ch
lie
eit
dei
nd
de-
ng
he

zu
ls.
ge-
φ,
so

Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch

Lehrer und Studierende. Von HEINRICH WEBER, Profes
Straßburg, und JOSEF WELLSTEIN, Professor in Gießen
3 Bänden. Band I. [XIV u. 446 S.] gr. 8. geb. n. M

Voranzeige s. Mitteilungen 1902 B (Zur math. u. naturwissensch. Unterr.)

Das Werk, dessen erster Band soeben erschienen ist, richtet in erster Linie an die Lehrer, die darin Anregung finden sollen, Unterrichtsstoff auszuwählen und namentlich in den höheren Klassen vertiefen, sodann aber auch an Studierende, die eine Anlehnung an Elemente und Auffrischung und Ergänzung früher erworbener Kenntnisse suchen.

Durch das Zusammenwirken mehrerer Gelehrter hoffen die H. geber, die möglichste Vollständigkeit zu erreichen. Der erste umfaßt den algebraisch-analytischen Teil. Der zweite Band, der der Presse ist, wird die Geometrie nach ihren verschiedenen Seiten behandeln. Ein dritter Teil, dessen Druck gleichzeitig mit dem zweiten in Angriff genommen werden soll, wird die Anwendungen bringen. Stoff aus der darstellenden Geometrie, der Mechanik, Physik und Wahrscheinlichkeitsrechnung entnommen ist. Die Vorarbeiten sind so gediehen, daß die Vollendung des ganzen Werkes im nächsten erwartet werden darf.

Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens von Dr. HENRICH

BRUNS, Professor der Astronomie an der Universität zu Le
[VI u. 159 8.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.40, geb. n. *M.* 4.

Der Verfasser hatte bei den Übungen in seinem Seminar „wissenschaftliches Rechnen“ schon vor längerer Zeit damit begonnen, den Teilnehmern die zur Vorbereitung erforderlichen mathematischen Entwicklungen autographiert in die Hand zu geben, um dadurch für die Beschäftigung mit besonderen Aufgaben zu gewinnen. Aufzeichnungen werden hier in etwas erweiterter Gestalt der Öffentlichkeit übergeben, da es sich um Dinge handelt, für die es bisher an handlichen Zusammenstellungen fehlte, und die überdies außerhalb des Kreises der berufsmäßigen Rechner keineswegs so bekannt sind, wie es bei ihrer erprobten Nützlichkeit verdienen.

Die Darstellung ist, da es sich in erster Linie um einen Leitfaden für den akademischen Unterricht handelt, auf die zum Verständnis entbehrlichen Entwicklungen beschränkt; der Lehrer ist ohnehin genötigt, bei der Auswahl und Erläuterung der jedesmal zu stellenden Aufgaben auf die Vorbildung der Zuhörer Rücksicht zu nehmen. H. Bru

Vorlesungen über Algebra von Dr. GUSTAV BAUER, Geheh

o. Professor an der Universität München. Herausgegeben
Mathematischen Verein München. Mit dem Bildnis G.
Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. [VI u. 37
gr. 8. geh. n. *M* 12.—, geb. n. *M* 13.—

Am 18. November 1900 feierte Geheimrat Professor Dr. G. Bauer in unverminderter, geistiger und körperlicher Frische, noch tätig im akademischen Lehramte, seinen 80. Geburtstag. Zur Feier seltenen Ereignisses veranstaltete der „Mathematische Verein München“ von Studierenden der Universität und der Technischen Hochschule organisiert, einen Festabend und machte gewissermaßen als Ehre dem Jubilar das Anerbieten, dessen Vorlesungen über „Algebra“

ucke erscheinen zu lassen. Herr Professor Bauer erklärte sich damit verstanden und kam dem Mathematischen Vereine noch weiter entgegen, indem er das vom Verein aus verschiedenen Nachschriften zusammengestellte Manuskript vor der Drucklegung sorgfältig überarbeitete.

Das vorliegende Buch soll demnach nicht nur den Titel „Vorlesungen“ führen, sondern in der Tat Vorlesungen, wie sie gehalten wurden, wiedergeben. Es ist hervorgegangen aus Vorträgen über Algebra, die Herr Professor Bauer in der Zeit von 1870–1897 je in Wintersemestern von 2–3 Jahren an der Universität München gehalten hat. Diese Vorlesungen waren für Studierende im ersten oder zweiten Studienjahr bestimmt. Es werden deswegen keine Vorkenntnisse (außer der Elementarmathematik) vorausgesetzt, aus dem gleichen Grunde kann die Vorlesung aber auch nicht in alle Gebiete (z. B. in das der Substitutionen) vordringen. Der Zeit nach erstreckte sich die Vorlesung zweifellos über zwei Semester in der Weise, daß das Wintersemester hauptsächlich der theoretischen Betrachtung der Probleme, das Sommersemester der Lehre von den Determinanten und deren Anwendung zur Lösung dieser Probleme gewidmet war. Diese aus rein praktischen Gründen durchgeführte Teilung auch in dem Buche besonders hervorzuheben lag kein Grund vor; im übrigen entsprechen die beiden ersten Abschnitte dem Inhalte der Wintervorlesung, die beiden letzten der Sommervorlesung. Immerhin kann der Leser etwa vor Kapitel VII die Kapitel XXV bis XXVII über die Theorie der Determinanten lesen und sodann nach jedem weiteren Abschnitte über die Elimination, die Diskriminante u. s. w. die Ergänzungen durch Anwendung der Determinanten in den betreffenden Kapiteln des vierten Abschnittes einsehen. Das in den Noten I und II Gegebene wurde gelegentlich in Übungsstunden vorgetragen.

Daß das Buch dank dem freundlichen Entgegenkommen des Herrn Verlegers im Hinblick auf den besonderen Anlaß mit dem Porträt des Verfassers ausgestattet ist, wird dessen zahlreichen Freunden und Schülern gewiß zur Freude gereichen.

Der Unterzeichnete aber hat, aus Interesse für die Sache, gern die mit der Drucklegung verbundenen Arbeiten auf sich genommen.

München, März 1903.

Karl Doehlemann.

Niedere Zahlentheorie von Prof. Dr. PAUL BACHMANN. Erster Teil. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band X, 1. gr. 8. geb. n. M. 14. —

Das sich inhaltlich zumeist an den gleichnamigen Artikel der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften anschließende Werk kennzeichnet sich etwa als eine systematische Entwicklung des dort Gebotenen. Während sein zweiter Teil die additive Zahlentheorie behandeln soll, gibt der erste nach einer geschichtlichen Einleitung und einer eingehenderen Betrachtung des Zahlenbegriffs die multiplikative, auf die Teilbarkeit gegründete Zahlentheorie. Von den „Elementen“ des Verfassers durch anderweitige Begründung und vielfältig abweichenden Inhalt, wie insbesondere die verschiedenen Euklidischen Algorithmen, die Fareyschen Reihen, die Sternsche Entwicklung, eine systematische Darstellung aller jetzt bekannten Beweise des Reciprocitätsgesetzes, soweit sie hierher rechnen, die Theorie der höheren Kongruenzen u. a. wohl

1903. B. Zum mathem. u. naturwissensch. Unterr.

8

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, 18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

unterschieden, will das Werk als eine Art Supplementband zur „Gesamtdarstellung der Zahlentheorie“ seines Verfassers aufgefaßt werden und dürfte als solcher nicht unwillkommen sein.

Emanuel Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XIV u. 593 S.] gr. 8. In Leinw. geb. n. *M* 24.—

Auch in 2 Hälften:

I. [304 S.] geh. n. *M* 12.— II. [XIV u. 289 S.] geh. n. *M* 12.—

Der Verfasser bietet in dem vorliegenden Buche eine Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer hauptsächlichsten Anwendungsgebiete: Fehlerausgleichung, mathematische Statistik und Lebensversicherungsrechnung.

In dem grundlegenden ersten Teile wird auf die fundamentalen Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen; eine große Auswahl von Problemen, darunter selbstverständlich die klassischen, ist dazu bestimmt, in den Geist der Wahrscheinlichkeitssätze und ihren richtigen Gebrauch einzuführen.

Der zweite Teil begründet die Fehlertheorie und die aus ihr entspringende Methode der kleinsten Quadrate; Beispiele aus verschiedenen Wissenszweigen geben eine zureichende Vorstellung von der Verwendung dieses wichtigen Instruments zur Bearbeitung von Beobachtungsergebnissen.

Im dritten Teile werden die modernen Hilfsmittel der wissenschaftlichen Beurteilung und Ausnützung von Erfahrungstatsachen auf statistischem Gebiete erörtert; die Probleme der Sterblichkeits- und Invaliditätsmessung stehen im Vordergrund der Betrachtung.

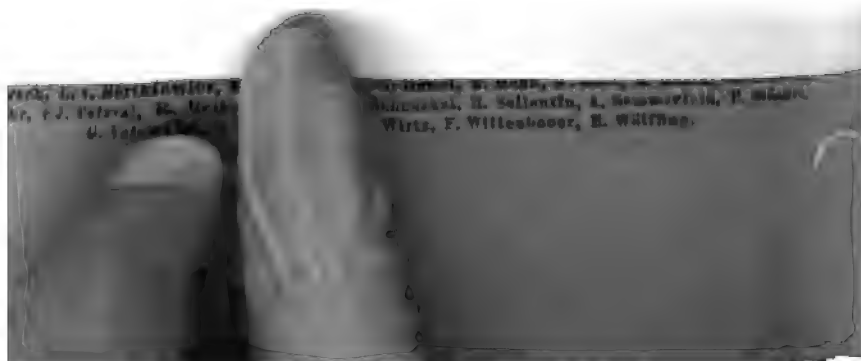
Der vierte Teil erklärt das Wesen und behandelt alle belangreichen Probleme der Lebensversicherungsrechnung; um auch einen Einblick in die Auswertung der hier maßgebenden Formeln und die auftretenden Zahlwerte zu gewähren, sind Tabellen und Rechnungsbeispiele in größerer Zahl eingefügt.

Julius König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. [576 S.] gr. 8. geh. n. *M* 18.—, geb. n. *M* 20.—

Die Kroneckersche „Festschrift“ vom Jahre 1881 hat der mathematischen Forschung neue Bahnen gewiesen, ja geradezu die Probleme und Ziele einer neuen Disziplin festgestellt. Diese allgemeine (algebraische und arithmetische) Theorie der algebraischen Größen versucht der Verfasser in systematischer Entwicklung vorzutragen und glaubt nach weit zurückreichender Vorbereitung die Schwierigkeiten eines solchen Unternehmens — wenigstens zum größeren Teile — überwunden zu haben. Schwierigkeiten boten nicht bloß die methodischen Fragen; eine ganze Reihe von grundlegenden Problemen war bisher unerledigt geblieben.

Durch Einführung der sogenannten „Resolventenform“, die sich als weitgehende arithmetische Verallgemeinerung des Resultantenbegriffs darstellt, wurde es möglich, eine — im vollen Sinne des Wortes — allgemeine Eliminationstheorie zu schaffen, die für alle hierher gehörigen Fragen von zentraler Bedeutung ist. In durchaus ungestörter Analogie konnten die algebraischen und arithmetischen Teile der Theorie entwickelt werden, die einerseits eine Algebra der affinen Transformationen, andererseits die „allgemeine“ Arithmetik ergeben.

Der Aufbau des ganzen Werkes kann im Rahmen dieser kurzen



zeige auch nicht einmal angedeutet werden; es sei diesbezüglich auf Vorrede und Inhaltsverzeichnis verwiesen.

Dem Studenten in höheren Semestern verständlich und wohl auch für den Fachmann von Interesse, soll das Buch eine Lücke der mathematischen Literatur ausfüllen; und der Verfasser wird sich glücklich schätzen, wenn es ihm gelungen ist, dieses wichtige Gebiet der Forschung weiteren Kreisen zugänglich zu machen.

J. K.

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. BOHLMANN und E. ZERMELO. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. geh. n. M. 6. —

Die II. (Schluß-)Lieferung erscheint im Laufe des Jahres.

Die Verlagsbuchhandlung hat sich entschlossen, den 3. und letzten Band der Neuauflage des Serret-Harnackschen Werkes in zwei Lieferungen herauszugeben, die natürlich nach Fertigstellung der zweiten Lieferung wieder in einem einheitlichen Bande erscheinen werden. Der Stoff, welcher in der vorliegenden ersten Lieferung geboten wird, ist fast ganz der alte geblieben. Wesentlich geändert ist die Disposition und infolgedessen auch vielfach die Form der Darstellung. Die erste Lieferung enthält den „ersten Teil“ der Neuauflage des dritten Bandes, welcher die Lehre von den gewöhnlichen Differentialgleichungen umfaßt, und den Anfang des „zweiten Teils“, welcher die partiellen Differentialgleichungen und die Variationsrechnung behandelt. Die zweite Lieferung wird dann außerdem den Anhang über den Zahlbegriff und eine Anwendung auf die reellen Funktionen, sowie Schlußbemerkungen und Register bringen.

Was den Inhalt des ersten Teils anlangt, so beginnt dieser — um das Verständnis zu erleichtern — mit den Differentialgleichungen erster Ordnung. Das erste Kapitel bringt die Existenztheoreme und an sie anschließend eine wesentlich geometrisch gehaltene Diskussion der singulären Lösungen, das zweite Kapitel enthält die üblichen Integrationsmethoden und nimmt dabei — die Bemerkungen Harnacks verwertend — auf die geometrischen und die von Lie eingeführten Methoden besonders Rücksicht. Analog behandelt das dritte Kapitel die Existenztheoreme und die singulären Lösungen von Differentialgleichungs-Systemen, wobei die Beziehungen zur geometrischen Theorie der Kongruenzen so weit berücksichtigt sind, als dies ohne zu weites Eingehen in flächentheoretische Untersuchungen möglich war. Das vierte Kapitel behandelt die elementaren Integrationsmethoden bei Differentialgleichungen höherer Ordnung und bringt gegen die frühere Auflage nichts Neues. Das gleiche gilt vom fünften Kapitel, welches die formale, elementare Theorie der linearen Differentialgleichungen entwickelt. Erweitert ist aber die Darstellung der funktionentheoretischen Untersuchung dieser Gleichungen. Die ersten Paragraphen des sechsten Kapitels beweisen die Existenz eines Fundamentalsystems an einer regulären Stelle und die Existenz einer Lösung im Gebiete von einer Stelle der Bestimmtheit. Das Auftreten von Logarithmen wird nur durch Beispiele erläutert.

G. Bohlmann. E. Zermelo.

Vorlesungen über projektive Geometrie. Von FEDERIGO ENRIQUES, Professor an der Universität zu Bologna. Deutsche Ausgabe von Dr. HERMANN FLEISCHER. Mit einem Einführungswort von

3*

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. Ann. 18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1908. 3. u. 4. Heft.

ustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Feise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zu Tage tritt.

Die hinzugefügten Anhänge sind: I. Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte. II. Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck. III. Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie. IV. Über die Grundlagen der Geometrie. V. Über die Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung.

1. Study, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit 46 in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M* 21. —, in Halbfranzband n. *M* 23. —

(Aus dem Vorwort:) In der vorliegenden Schrift wird die Frage nach der konstruktiven Darstellung und Zusammensetzung von Dynamen, d. i. von Systemen von Kräften, die an einem starren Körper angreifen, als Ausgangspunkt genommen für Untersuchungen geometrischen (und also rein theoretischen) Inhalts.

Im ersten Abschnitt wird gezeigt, daß die aus Lehrbüchern der Mechanik allgemein bekannten Sätze über Streckensysteme ein Glied und zwar nicht durchaus in jeder Hinsicht das einfachste) bilden in einer Kette verwandter Konstruktionen, die hier zum ersten Male vollständig und mit ausgeführten Beweisen vorgelegt werden. Die verwendeten Hilfsmittel sind die der Elementargeometrie; jeder wird der Darstellung folgen können, der mit guten Schulkenntnissen einige Übung im geometrischen Denken verbindet, solche, wie sie etwa durch Beschäftigung mit der sogenannten synthetischen oder der darstellenden Geometrie erworben werden kann.

Der zweite Abschnitt bringt eine algebraische Begründung derselben Theorie. Die Abfassung ist hier etwas kürzer, besondere Kenntnisse aber werden vom Leser ebenfalls nicht verlangt. Wenn die projektive Geometrie in ihrer analytischen Gestalt geläufig ist, der wird gut vorbereitet sein zum Studium auch dieses Abschnittes, dessen Inhalt zum Teil wohl geradezu als eine Ergänzung zu den vorhandenen Lehrbüchern der analytischen Geometrie wird betrachtet werden können.

Der dritte Abschnitt behandelt hauptsächlich die linearen Systeme von Dynamen. Im Zusammenhange damit werden die Anfänge einer neuen Art von Liniengeometrie entwickelt. Den Schluß bilden Anwendungen auf Kinematik. Diese weitergehenden Untersuchungen sind verhältnismäßig knapp behandelt. Sie wenden sich nur an geübtere Geometer, die mit den Hilfsmitteln der modernen Analysis und namentlich mit der Handhabung des Gruppenbegriffs genügend vertraut sind.

Elemente der Vektor-Analyse von Dr. A. H. BUCHERER, Privatdozent in Bonn. [VI u. 91 S.] gr. 8. geb. n. *M* 2.40.

Durch die Veröffentlichung dieses elementaren Werkchens glaube ich dem Studierenden der Physik ein Hilfsmittel an die Hand zu geben, welches ihm das Eindringen in die mathematische Physik ganz wesentlich erleichtern und sein Wissen auf diesem Gebiete durch eine stärkere Heranziehung der Vorstellungskraft zu einem lebendigeren gestalten soll. Angesichts der Tatsache, daß grundlegende Abhandlungen unserer bedeutendsten Gelehrten in neuerer Zeit in zunehmendem Maße in vektoranalytischer Form verfaßt werden, muß das Erscheinen eines derartigen

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. Ann. 18, S. 535. 1881.

elementaren Werkchens als besonders zeitgemäß bezeichnet werden. Das Verständnis der Rechenmethode habe ich mich stets durch einfache Beispiele aus der Physik zu erleichtern bemüht. A. H. Bucherer.

Kronecker, L., Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen. II. Teil: Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. Band: Erste bis einundzwanzigste Vorlesung. Bearbeitet und fortgeführt von Dr. KURT HENSEL. Mit 11 Figuren im Text. [XII u. 390 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 20.—, geb. n. *M.* 21.—

Die Determinantentheorie hat sich sowohl bei Lebzeiten Kroneckers und unter seiner wirksamen Mitarbeit, als auch in den zwölf Jahren nach seinem Tode so stark und so erfolgreich entwickelt, daß die bisher veröffentlichten Lehrbücher dieser Disziplin nicht mehr eine vollständige Darstellung ihres reichen Inhalts geben. In dieser Beziehung bildeten die Universitätsvorlesungen Kroneckers (1883—1891) über diese Disziplin bereits einen bedeutsamen Fortschritt. Aber auch er hielt die Zeit noch nicht für gekommen, seine eigenen tiefergehenden Untersuchungen, sowie die erst in den letzten Jahren vollständig abgeschlossenen Theorien anderer Forscher, welche so viel zur Vertiefung und Vereinfachung dieser Disziplin beigetragen haben, in den Kreis seiner Betrachtungen zu ziehen. Nun hat sich aber gezeigt, daß man gerade diese neueren Probleme der Determinantentheorie in besonders einfacher Weise durch Benutzung und konsequente Ausgestaltung der Gedanken behandeln kann, welche Kronecker in seinen letzten Vorlesungen und Arbeiten über diesen Gegenstand dargelegt hat. Aus diesem Grunde entschloß sich der Herausgeber dieses Werkes, die Vorlesungen Kroneckers unter sorgfältiger Erhaltung seiner Grundprinzipien und unter Benutzung seiner einfachen und wirksamen Methoden so zu bearbeiten und fortzuführen, daß dieses Werk eine systematische Darstellung der modernen Determinantentheorie und ihre wichtigsten Anwendungen enthält. Der Darstellung der allgemeinen Theorie geht eine sehr eingehende Untersuchung der Determinanten zweiter, dritter und vierter Ordnung voraus, nebst ihren Anwendungen auf die Geometrie, die Arithmetik und die Formentheorie. So erreicht Kronecker, daß der Leser mit dem Determinantenkalkül wohlvertraut ist, wenn nun alle Grundeigenschaften der Determinanten n ter Ordnung aus der Betrachtung der Lösung eines Systemes von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten mit einem Schlage in Evidenz gesetzt werden. An die Stelle der älteren Determinantentheorie ist heute die Untersuchung der Systeme oder Matrizen getreten, und das Rechnen mit diesen Systemen ist jetzt so ausgebildet und vereinfacht worden, daß die tiefsten Resultate der Determinantenlehre zu ganz einfachen Sätzen einer Arithmetik werden, welche nur wenig schwerer ist als die elementare Zahlentheorie. Der Darstellung dieser Arithmetik unter Benutzung der Kroneckerschen Methoden und ihrer Anwendung auf die Theorie der Elementarteiler und auf die Äquivalenz und die Teilbarkeit der Systeme ist der vom Herausgeber hinzugefügte letzte Teil des vorliegenden ersten Bandes gewidmet.

Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Von Dr. KURT GRISSLER. [VIII u. 417 S.] gr. 8. geb. n. *M.* 14.—

Voranzeige s. Mitteilungen 1902 A Nr. 2 S. 67.



Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren JACOB LÜROTH, EDUARD STUDY, JUSTUS GRASSMANN, HERMANN GRASSMANN der Jüngere, GEORG SCHEFFERS herausgegeben von FRIEDRICH ENGEL. II. Bd. II. Tl. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. [266 S.] gr. 8. geh. n. *M* 14.—

Voranzeige s. Mitteilungen 1902 A Nr. 2 S. 63.

Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke. Nachträge, herausgegeben von M. NOETHER und W. WIRTINGER. Mit 9 Figuren im Text. [VIII u. 116 S.] gr. 8. geh. n. *M* 6.—

Sapolsky, Dr. L., über die Theorie der relativ-Abelschen kubischen Zahlkörper. 2 Teile. Mit 35 Tabellen. [VII u. 481 S.] gr. 8. geh. n. *M* 6.—

Voranzeige s. Mitteilungen 1902 A Nr. 2 S. 72.

Krazer, Dr. Adolf, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 10 Textfiguren. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften. XII. Band. [XXIV u. 512 S.] gr. 8. In Leinwand geb. n. *M* 24.—

Voranzeige s. Mitteilungen 1903 A Nr. 1 S. 43.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von MORITZ CANTOR. XIII. Heft. Mit 117 Figuren im Text. [IV u. S. 337—628.] gr. 8. geh. n. *M* 14.—

Enthaltend:

Maximilian Curtze, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In zwei Teilen. Zweiter Teil.

Voranzeige s. Mitteilungen 1902 A Nr. 2 S. 65.

XIV. Heft. Mit 113 Textfiguren.

[VIII u. 337 S.] gr. 8. geh. n. *M* 16.—

Enthaltend:

Karl Bopp, Antoine Arnauld, der große Arnauld, als Mathematiker. Mit 38 Textfiguren. [152 S.]

Heinrich Suter, Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke“. [31 S.]

Axel Anthon Björnbo, Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. Mit 75 Textfiguren. [160 S.]

XV. Heft. Mit 76 Abbildungen im Text. [166 S.] gr. 8. geh. n. *M* 8.—

Enthaltend:

Sauerbeck, Dr. Paul, Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven. Nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, 18, S. 535. 1881.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von MORITZ CANTOR. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. geh. n. *M* 14.—, geb. n. *M* 15.—

Enthaltend:

Wölffing, Dr. Ernst, mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik.

Der mathematische Bücherschatz ist ein systematisches Verzeichnis der nichtperiodischen mathematischen Literatur der ganzen Welt für die Zeit von 1801—1900. Von den Titeln der elementar mathematischen Werke ist nur eine Auswahl gegeben worden, während auf dem Gebiet der höheren Mathematik keine Schrift absichtlich unerwähnt geblieben ist und daher auch nichts Wichtiges vermißt werden wird. Die Titel sind unter Stichwörtern angeordnet, von welchen der vorliegende erste Teil, die reine Mathematik umfassend, 318 enthält. Innerhalb der Stichwörter sind die Titel nach Verfasseramen geordnet. Von jeder Schrift ist womöglich angegeben: Verfasser, Anfangsbuchstaben seiner Vornamen, Titel, Druckort, Druckjahr, Verleger und Ladenpreis. Es ist immer nur die neueste zu ermittelnde Auflage des 19. Jahrhunderts angeführt. Zahlreiche Verweise erleichtern die Auffindung der zu mehreren Stichwörtern gehörigen Werke. Außer dem Inhaltsverzeichnis enthält der Mathematische Bücherschatz ein alphabetisches Sachregister und ein Autorenregister, endlich eine Einleitung, welche eine kritische Übersicht über die bisher vorhandenen bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik gibt. Der zweite Teil des Mathematischen Bücherschatzes wird die angewandte Mathematik (Wahrscheinlichkeitsrechnung, numerisches Rechnen, graphischer und geometrischer Kalkül, Zeichnen und darstellende Geometrie, Kristallographie, sowie die Anwendungen der Mathematik auf Mechanik, Physik, Geodäsie, Astronomie, Geophysik, Chemie, Biologie und Technik) umfassen und in einigen Jahren nachfolgen.

E. W.

_____ XVII. Heft. Mit 32 Figuren im Text. [VIII u. 434 S.] gr. 8. geh. n. *M* 16.—

Enthaltend:

Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Raphael Meyer.

Ähnliche Zwecke wie in seiner früher erschienenen Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter verfolgend, ist der Verfasser besonders bestrebt gewesen, die reiche innere Entwicklung der Mathematik selbst hervorzuheben, die in den behandelten Jahrhunderten statt hatte und einen gewissen Abschluß fand.

In ihnen ward das Gebiet der Algebra, und zwar vorzüglich durch Vietas Tätigkeit, derart erweitert, daß sie allmählich die Stufe der Entwicklung erreichte, auf der wir sie in der analytischen Geometrie Descartes' stehen sehen. In ihnen wurden die aus dem Altertum ererbten und wieder aufgenommenen Infinitesimaluntersuchungen mit den Hilfsmitteln bereichert, welche Kepler, Galilei und Huygens



für den Bedarf ihrer astronomischen und physikalischen Untersuchungen einführen, und erreichten nach und nach eine solche Blüte, daß sie einerseits in Leibnizens Differential- und Integralrechnung die noch heute gültige äußere Gestalt annahmen, andererseits ganz unabhängig von dieser Gestalt die Grundlage der *Principia* Newtons bilden konnten. Ferner zeigte im 2. dieser Jahrhunderte Fermat bei der Behandlung der verschiedenartigsten mathematischen Themata, daß der große Mathematiker keine entwickelte mathematische Technik nötig hat, um die schwierigsten Verhältnisse klar zu durchschauen; Desargues und Pascal schlugen in der Geometrie neue Bahnen ein, die erst anderthalb Jahrhundert später fortgesetzt wurden, während Nepers Logarithmen gleich sowohl praktische Anwendung als Einfluß auf die übrige Mathematik erhielten.

Um in der übrigen Darstellung immer die mathematische Entwicklung verfolgen zu können, hat der Verfasser einen ausführlichen historischen und biographischen Überblick vorausgeschickt.

***Jules Drach, Histoire des Sciences Mathématiques en France, au XIX^e Siècle.** (A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von MORITZ CANTOR.) [Etwa 320 S.] gr. 8.

Toute Histoire, telle que la présente, débute naturellement par un exposé général de l'état des Sciences Mathématiques à l'aurore du siècle: Quels sont les problèmes qui passionnaient alors les savants? Quelle conception se faisaient-ils de leur Science, de sa puissance et de son rôle dans l'interprétation de l'Univers sensible?

Comment envisager ensuite l'œuvre si complexe et si étendue du siècle qui vient de finir? On a pris l'habitude de partager les mathématiciens français en deux grandes classes, suivant la nature de leurs études favorites:

celle des Géomètres, où l'on peut ranger, avec Monge, Carnot, Poncelet, leurs continuateurs plus ou moins directs, Chasles, Joseph Bertrand, O. Bonnet et M. Darboux;

celle des Analystes, qui comprend, après Ampère, Cauchy, Liouville, Hermite, la plupart des savants actuels, MM. Appell, Jordan, Picard et Poincaré, pour ne citer que ceux-là. Il n'est pas défendu d'ailleurs de faire partie des deux classes; d'illustres exemples l'attestent.

Sans attacher à cette classification une valeur absolue qu'elle n'a en aucune manière, il nous sera commode, pour la clarté de l'exposition, d'en tenir compte et d'étudier séparément d'une part le développement de la Géométrie depuis Monge jusqu'à M. Darboux, d'autre part l'extension et l'évolution des idées de nombre et de fonction qui constituent en somme toute l'Analyse.

L'œuvre et l'influence des grands novateurs et de leurs élèves les plus connus exigent une étude individuelle; leur ensemble formera le corps de notre travail. Bien entendu, le rôle, parfois si considérable, joué par les Savants étrangers, par un Gauss, un Abel, un Cayley, un Riemann, un Weierstrass, sera indiqué, dans la mesure où on peut l'apprécier.

Nous terminerons enfin par une revue rapide des résultats généraux obtenus et par quelques indications sur les voies nouvelles, encore peu fréquentées, où les Mathématiciens actuels nous paraissent devoir s'engager.

Jules Drach.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausi 18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

Braunmühl, Dr. A. von, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu München, **Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie**. Zweiter Teil: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. [XI u. 264 S.] gr. 8. geh. n. \mathcal{M} 10.—, geb. n. \mathcal{M} 11.—

Der zweite Teil dieser Vorlesungen, der mit der Erfindung der Logarithmen durch Neper und Bürgi beginnt und bis zur neuester Zeit reicht, ist in 6 Kapitel eingeteilt. Im ersten wird die Erfindung der Logarithmen, ihre Einführung und Verbreitung in den Kulturstaaten und ihr Einfluß auf die Umgestaltung der trigonometrischen Sätze und Rechnungen geschildert. Das zweite Kapitel behandelt die Entwicklung der Trigonometrie bis zum Beginn des 18. Jahrhunderts, zieht die Winkelschnitte und Kreismessung mit in Betracht und umfaßt die Geschichte der Erfindung und ersten Verwertung der trigonometrischen Reihen. Daran schließt sich im dritten Kapitel die Darstellung der Trigonometrie im 18. Jahrhundert bis zu der großen Reform, die Euler am Ende dieses Jahrhunderts dadurch vollzog, daß er einerseits eine trigonometrische Formelschrift einführte, andererseits die trigonometrischen Linien, wie seinerzeit Bernoulli die Logarithmen, als Funktionen in die Analysis einführte. Der Darstellung von Eulers großen Verdiensten ist ein eigenes Kapitel gewidmet, worin auch seine auf die trigonometrischen und cyklometrischen Funktionen bezüglichen Arbeiten besprochen werden. Die Tätigkeit seiner Nachfolger und Zeitgenossen, unter denen besonders Lambert hervorrangt, wird im fünften Kapitel geschildert, wo auch die Schöpfung einer eigenen Polygonometrie und die Fortbildung der schon im 18. Jahrhundert entstandenen Differentialtrigonometrie ihre Behandlung findet, während in einem eigenen Paragraphen ein Bild von dem Lehrgebäude der elementaren Trigonometrie am Ende des 18. Jahrhunderts entworfen wird. Das letzte Kapitel gibt in 8 Paragraphen eine Geschichte der Trigonometrie im 19. Jahrhundert. Man wird daraus ersehen, daß ihre Fortbildung nicht, wie man gewöhnlich glaubt, mit dem Beginn dieses Jahrhunderts schon vollendet war. Die Versuche, die Goniometrie wie die ebene und sphärische Trigonometrie in der allgemeinsten Weise zu begründen, die Tragweite ihrer Formeln auszudehnen und ihre Formelsysteme auszubauen, reichen vielmehr bis in die neueste Zeit und verdienen das größte Interesse. Auch die Schöpfung neuer Tafeln, die cyklometrischen Untersuchungen, die Polygonometrie und Polyedrometrie machen noch bedeutende Fortschritte und lohnen wohl eine geschichtliche Darstellung. — Während der erste Teil unseres Werkes sich lediglich mit der elementaren Trigonometrie zu beschäftigen hatte, gewinnt das im zweiten Teile entworfene Bild durch Einbeziehung der Reihenlehre, der niederen und höheren Analysis, der neueren gruppen- und invariantentheoretischen Untersuchungen, insofern alle diese Dinge zur Ausgestaltung der Trigonometrie beitrugen, bedeutend an Abwechslung und dürfte erkennen lassen, daß selbst in diesem mehr als tausendjährigen Forschungsgebiet noch nicht nach jeder Richtung ein völliger Abschluß gewonnen ist.

Niels Henrik Abel, *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*. [438 S. u. 6 Faksimiles.] 4. steif geh. n. \mathcal{M} 21.—

Ioannis Bolyai de Bolya *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei. a priori haud unquam decidenda, independentem, adiecta ad*

casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova oblata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt IOSEPHUS KÜRSCHÁK, MAURITIUS RÉTHY, BÉLA TÖTÖSSY DE ZEPETHNEK, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. [40 S. u. 7 Tafeln.] 4. geh. n. *M* 4.—

Libellus post saeculum quam Ioannes Bolyai de Bolya anno MDCCCII a. d. XVIII Kalendas Ianuarias Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam eius immortalem, ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae Scrutatorum Regiae Litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Iosephinae Claudiopolitanae editus. [XV u. 155 S.] 4. geh. n. *M* 6.—

Nachruf auf Ferdinand Caspary. Von EUGEN JAHNKE, Oberlehrer an der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule zu Berlin und Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg. Mit dem Bildnis F. Casparys, einem Verzeichnis seiner Abhandlungen, sowie einem Briefe Ch. Hermites an H. Bertram. (Sonderabdruck aus dem „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“, 12. Bd.) [30 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.40.

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs (geb. am 5. Mai 1833, gest. am 26. April 1902). Gehalten im Mathematischen Verein der Universität Berlin am 5. Mai 1902. Mit dem Bildnis des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. (Sonderabdruck a. d. „Archiv d. Mathematik u. Physik“. III. Band. 3. u. 4. (Doppel-)Heft.) [16 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.—

***Poincaré, Wissenschaft und Hypothese.** Deutsche Ausgabe von F. LINDEMANN in München. [ca. 340 S.] gr. 8. geh.

Wenige Forscher sind sowohl in der reinen als in der angewandten Mathematik mit gleichem Erfolge tätig gewesen, wie der Verfasser des vorliegenden Werkes. Niemand war daher mehr als er berufen, sich über das Wesen der mathematischen Schlußweisen und den erkenntnistheoretischen Wert der mathematischen Physik im Zusammenhange zu äußern. Und wenn auch in diesen Gebieten die Ansichten des einzelnen zum Teil von subjektiver Beanlagung und Erfahrung abhängen, werden doch die Entwicklungen des Verfassers überall ernste und volle Beachtung finden, umso mehr als sich derselbe bemüht, auch einem weiteren, nicht ausschließlich mathematischen Leserkreise verständlich zu werden, und als ihm dies durch passende und glänzend durchgeführte Beispiele in hohem Maße gelingt. Die Erörterungen erstrecken sich auf die Grundlagen der Arithmetik, die Grundbegriffe der Geometrie, die Hypothesen und Definitionen der Mechanik und der ganzen theoretischen Physik in ihrer neuesten Entwicklung sowohl, als in ihrer klassischen Form. Um dem allgemeinen Verständnisse noch mehr entgegenzukommen, sind der deutschen Ausgabe durch den Herausgeber zahlreiche Anmerkungen hinzugefügt, die teils einzelne Stellen des Werkes näher erläutern, teils durch literarische Angaben dem Leser die Mittel zu weiterem Studium der besprochenen Fragen an die Hand geben.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius 18, S. 535. 1881.

Repertorium der höheren Mathematik so

(Definitionen, Formeln, Theoreme, Literaturnachweise)

VON

Ernesto Pascal,

ord. Prof. an der Universität zu Pavia.

Autorisierte deutsche Ausgabe von A. SCHEFF zu Wiesbaden.

In 2 Teilen.

I. Teil: Die Analysis. [XII u. 638 S.] 8. 1900. Biegs. in Lwd. geb. n. M. 10.—
 II. Teil: Die Geometrie. [X u. 712 S.] 8. 1902. Biegs. in Lwd. geb. n. M. 12.—

Professor Dr. Ernst Wölffing schreibt in seinem Mathematischen Bibliothek (Leipzig, Teubner 1903):

„Einem Mathematiker in einem Gebiet, auf dem er nicht zu Hause ist, zur augenblicklichen Orientierung zu dienen, kommt in sehr geschickter Weise ein Werk nach: E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik I—II, Leipzig 1900—02, welches eine Übersicht über die Hauptlehren der höheren Mathematik gibt und bei welchem die geschickte Auswahl der mitgeteilten Sätze und Resultate nicht genug gelobt werden kann.“

„Das Buch wird ihm auf solchen Gebieten, mit denen er weniger vertraut ist, ein sehr schätzbares Hilfsmittel sein, und wir können aus eigener Erfahrung bestätigen, daß die darin gemachten Literaturangaben höchst nützlich sind.“

Literar. Centralblatt 1901. Nr. 37.

„Der Nutzen eines derartigen Repertoriums wird aber jedem einleuchten, der zur Orientierung schon oft vergebliche oder langwierige Spürversuche gemacht hat.“

Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Mathematik, Bd. 31 für 1900.

Über angewandte Mathematik und Physik

in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen. ~~~~~
 Nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätsanordnungen.

Vorträge, gehalten in Göttingen, Ostern 1900, bei Gelegenheit des Ferienkurses
 für Oberlehrer der Mathematik und Physik

gesammelt von

F. KLEIN und E. RIECKE.

Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein.

Mit 84 Textfiguren.

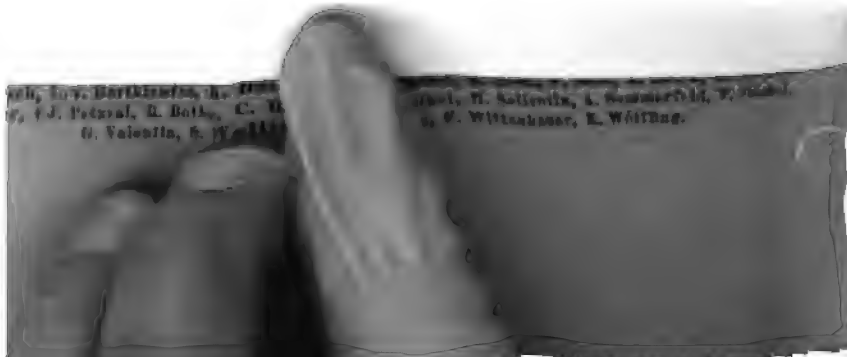
[VII u. 262 Seiten.] gr. 8. 1900. In Original-Leinwandband n. M. 6.—

Aus dem Inhalt:

Zur Geschichte des physikalischen Instituts und des physikalischen Unterrichts an der Universität Göttingen. Von E. RIECKE.
 Allgemeines über angewandte Mathematik. Von F. KLEIN.
 Über technische Mechanik. Von F. KLEIN.
 Über darstellende Geometrie. Von FR. SCHILLING.
 Einführung in d. Geodäsie. Von E. WISCHERT.
 Über Versicherungsmathematik. Von G. BOHLMANN.
 Üb. Wärmekraftmaschinen. Von EUG. MEYER.
 Über Elektrotechnik. Von TH. DES COUDRES.
 Über den Plan eines physikalisch-techn. Instituts an der Universität Göttingen.
 Vortrag, gehalten am 6. Dezember 1895

im Hannoverschen Bezirksverein des Vereins deutscher Ingenieure.
 Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtskandidaten. Vortrag, gehalten in Hannoverschen mathematischen Verein am 20. April 1896.
 Universität und technische Hochschule.
 Vortrag, gehalten in der ersten allgemeinen Sitzung der 70. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Düsseldorf am 19. September 1896.
 Über die Neuorientierungen für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen (aus der Physikalischen Zeitschr. [Leipzig, Hirzel], Dezember 1899) von F. KLEIN.

Annalen d. Physik u. Chemie 1900, 9: „Für jeden, den die Fortentwicklung unseres naturwissenschaftlichen Unterrichts interessiert, ist diese Publikation von großer Bedeutung.“ — Zeitschr. f. mathem. u. naturwissensch. Unterr.: „Unter diesem anspruchsvollen Titel ist ein Werk erschienen, welches den mathematischen Unterricht in seinen innersten Lebensfragen berührt und darum von geradezu grundlegender Bedeutung ist.“



Kleiner Leitfaden der praktischen Physik

von

F. Kohlrausch.

Mit in den Text gedruckten Figuren.

[XX u. 260 S.] gr. 8. 1899. Biegsam in Leinwand geb. n. \mathcal{M} 4.—

„Man muß dem Verfasser aufrichtigen Dank für diese Arbeit wissen, umso mehr als das Buch, wie es ja hier ohnedies selbstverständlich war, durch seine Beschränkung auf den engeren Zweck um nichts weniger wissenschaftlich geworden ist. In der Vorrede äußert sich der Verfasser in so beherzigenswerter Weise über diesen Gegenstand, daß ich die fraglichen Stellen heretze....“

...Dadurch, daß diese beherzigenswerten Worte einem Buche vorausgeschickt sind, welches in die Hand des Anfängers gelangt, werden sie ihren Segen in besonders weitem Umfange üben.“ (Zeitschr. f. physikal. Chemie, XXXII. Bd., Heft 2.)

„Es kann nur mit freudiger Genugtuung begrüßt werden, wenn ein Forscher vom Rufe Kohlrauschs die Mühe nicht scheute, dem Anfänger die Wege ebnen zu helfen und selbst mitsarbeiten an der Hebung des physikalischen Unterrichtes, auf dessen hohe kulturelle Bedeutung das Vorwort mit Nachdruck hinweist. Möge das Werk in seiner neuen Form recht viele neue Freunde finden!“

(Realschulwesen, 25. Jahrg., Heft 5.)

Lehrbuch der praktischen Physik

von

F. Kohlrausch.

Zugleich als neunte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik.

Mit zahlreichen Figuren im Text.

[XVII u. 610 S.] gr. 8. 1901. Biegsam in Leinwand geb. n. \mathcal{M} 8.60.

„Infolge der doppelten Aufgabe, welche sich obiges Werk stellt, wurde in der neunten, erheblich vergrößerten Auflage der Thermometrie, der Strahlung und vor allem der Elektrizität ein breiterer Spielraum eingeräumt, und darf der Leitfaden unserem Ermessen nach das Verdienst für sich beanspruchen, zuerst und allein eine handliche Zusammenstellung kritisch ausgewählter, physikalischer Zahlen gebracht zu haben.“

(Der prakt. Maschinenkonstr. 1901, Nr. 36.)

„Dieses eigenartige Werk gewinnt mit jeder neuen Auflage an Vertiefung und damit an Wert für alle diejenigen, welche der praktischen Physik als Lehrer oder Lernende näher stehen. Auch als Nachschlagebuch ist es von Bedeutung, denn in knapper, aber ausreichend verständlicher Form umfaßt es einen außerordentlich reichen Inhalt und bringt nicht wenig, was man in sehr umfangreichen Lehrbüchern vergebens sucht. Die zahlreichen im Anhang gegebenen Tabellen beruhen selbstverständlich auf dem besten zur Zeit vorhandenen Material.“

(Gaes 1901, 10. H., S. 610.)

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius
18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

19

39

en
lie
ls-
ng
ne
na
en
en
en,
ar-
as
ch
lie
eit
bei
nd
oe-
ng
he

zu
ls.
ge-
φ,
so

Der naturwissenschaftliche Unterricht in England insbesondere in Physik und Chemie

VON

Dr. Karl T. Fischer

Privatdozent und I. Assistent für Physik an der Königl. Technischen Hochschule München

Mit einer Übersicht der englischen Unterrichtsliteratur zur Physik und Chemie und 18 Abbildungen im Text und auf 3 Tafeln.

[VIII u. 94 S.] gr. 8. 1901. In Leinw. geb. n. M. 3. 60.

Das Büchlein enthält im wesentlichen den Reisebericht, welchen der Verfasser über die im Jahre 1897 und 1898/99 nach Großbritannien unternommenen Studienreisen an das Kgl. Bayerische Ministerium zu erstatten hatte, und versucht die Stellung des naturwissenschaftlichen Unterrichts in England und die namentlich in Physik und Chemie herrschenden Unterrichtsmethoden in fünf Abschnitten klarzulegen: 1) In welchem Umfange werden in England Naturwissenschaften gelehrt? — 2) Nach welchen Methoden erfolgt der Unterricht? Dieser Abschnitt ist der umfangreichste; denn er enthält eine genauere Schilderung der in den letzten zehn Jahren in England viel besprochenen und allmählich überall eingeführten sogen. „heuristischen Methode“. In diesem Abschnitt sind auch die näheren Angaben über die Lehrerausbildung und die Kosten des überall eingeführten Laboratoriumsunterrichts (s. T. mit Plänen) aufgenommen. — 3) Welche Erfahrungen hat man in England mit der praktischen Unterrichtsmethode gemacht? — 4) Welche Ansichten hat man in England über unsere naturwissenschaftlichen Unterrichtsmethoden? — 5) Welche Ansichten hat man bei uns über die englischen Bestrebungen?

Für die Veröffentlichung des Berichtes war namentlich die Tatsache maßgebend, daß in den exakten Wissenschaften die Meinungen über die beste Unterrichtsweise noch vielfach auseinandergehen, wie erst kürzlich wieder die Polemik über Kerschenssteins Lehrplantheorie gezeigt hat. Welche Meinung die richtige ist, läßt sich nur auf Grund von Erfahrungen sicher erweisen; und da nun gerade in England den Lehrern in den verschiedenen Schulen große Freiheit in Bezug auf die Unterrichtsmethode gelassen ist, andererseits auch dort gerade in den letzten zehn Jahren eine lebhafteste Tätigkeit im Unterrichtswesen sich entfaltet, so stehen uns hier Erfahrungen zur Seite, die wir noch nicht haben. Von diesen ein möglichst treues Bild zu geben, war der Wunsch bei Abfassung des Buches.

Neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper

(mit einem kurzen Anhang über das sog. „absolute Maßsystem“)

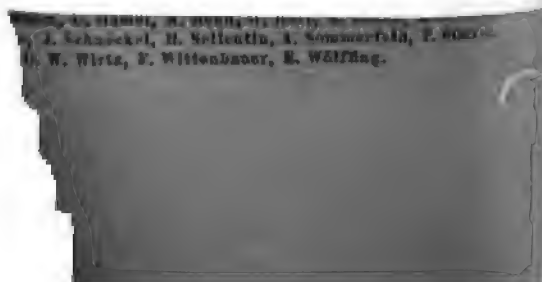
Ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts von

Dr. Karl T. Fischer,

Privatdozent und I. Assistent für Physik an der Königl. Technischen Hochschule München.

[V u. 68 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. M. 2. —

Das Büchlein verdankt seine Entstehung einer 1897 gehaltenen Vorlesung über Entwicklung der physikalischen Grundbegriffe und den in den beiden ersten Münchener Ferienkursen für Lehrer der Mathematik und Physik gehaltenen Experimentalvorlesungen. Es enthält eine Reihe von genau beschriebenen und durch Detailzeichnungen erläuterten Versuchen, welche eine möglichst verständliche und doch streng richtige, experimentelle Entwicklung der mechanischen Begriffe im Mittelschulunterricht bezwecken und zum Teil vom Verfasser selbst stammen und sonst noch nicht veröffentlicht wurden, zum Teil aber auch besonders wichtige und einfache Unterrichtsversuche anderer Physiker darstellen. In der Anordnung wurde versucht, den von Ernst Mach in seiner Entwicklung der Mechanik aufgestellten Forderungen zu genügen.



Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität

von

Prof. Dr. F. Richarz.

2. Auflage.

Mit 97 Abbildungen. [VI u. 128 S.] gr. 8. 1902. geb. n. \mathcal{M} 1.50.

„Diese kleine Schrift ist aus Vorträgen, die für ein weites Publikum berechnet waren, hervorgegangen. Der Beifall, den dieselbe gefunden, hat sich auch in der raschen Abnahme der ersten Auflage der Schrift ausgesprochen. Die vorliegende neue Auflage ist nur wenig verändert. Jedem, der sich über die jüngsten Errungenschaften auf dem Felde der Elektrizitätslehre ohne große Vorstudien belehren will, ist das Werkchen warm zu empfehlen.“ (Gaea 1902, Heft 11, S. 703.)

„... Auch vom pädagogischen Standpunkte aus bietet das Buch mancherlei Interesse und wird von jedem mit Vorteil zu Rate gezogen werden, der dieselbe Materie in möglichst anschaulicher und dem neuesten Stande der Wissenschaft entsprechender Weise zur Darstellung bringen will.“ (Naturwissenschaftl. Wochenschrift 1902, Nr. 7.)

Physik für deutsche Lehrerbildungsanstalten auf Grund der neuen amtlichen Bestimmungen

vom 1. Juli 1901 bearbeitet von

Gustav Melinat,

Königlichem Seminarlehrer zu Muhlhausen i. Th.

Mit 394 Abbildungen im Text. [VIII u. 480 S.] gr. 8. 1903. geh. n. \mathcal{M} 5.60,
in Leinw. geb. n. \mathcal{M} 6.40.

„Wir haben dieses Buch mit vielem Interesse durchgesehen. Von den einfachsten Erscheinungen der Umgebung ausgehend, führt der Verfasser nach und nach den Schülern bis zur wissenschaftlichen Betrachtungsweise hin und gewöhnt ihn dabei stetig an ein sicheres Beobachten und vor allen Dingen an naturwissenschaftliches Denken und Selbsttätigkeit. Die Anlage des Buches bindet den Lehrer bei der Behandlung und Auswahl des Stoffes keineswegs an das Buch und zeigt daneben den Weg, wie auch schwierigere physikalische Fragen in den Kreis der Betrachtungen hineingezogen werden können. Wir sind überzeugt, daß das Buch ein sehr brauchbares Lehrmittel am Seminar sein wird, das den Schüler befähigt, sich später selbständig weiter zu bilden. Die Ausstattung des Buches ist vorzüglich.“ (Neues Braunschw. Schulblatt, 16. Jahrg., Nr. 9.)

„... Bei seinem reichen und gediegenen Inhalte, der Zeugnis ablegt von der Tüchtigkeit des Verfassers auf dem physikalischen Gebiete, wird das neue Physikbuch in dem Seminarunterrichte gute Dienste leisten und auch in der Lehrerschaft freundlich aufgenommen werden.“ (Deutsche Schulzeitung 1903, 31.)

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, W
18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

19

39

en
lie
ls-
ng
ne
na
en
en
en,
ar-
las
ch
lie
eit
bei
nd
ee-
ng
he

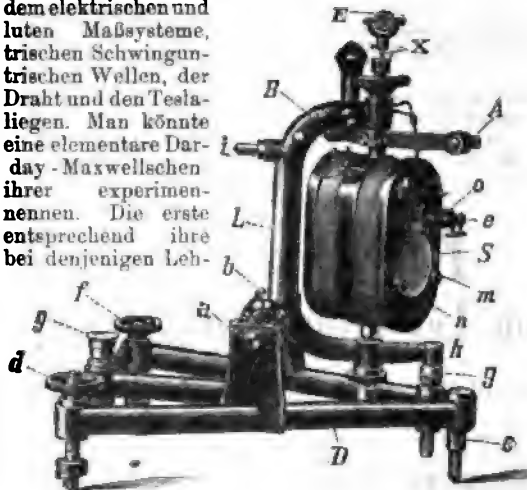
zu
ls.
ge-
φ,
so

Physik.

Die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Nach einem auf der 34. Jahresversammlung des Deutschen Nautischen Vereins in Berlin gehaltenen Vortrage dargestellt von Dr. Rudolf Blochmann. [24 S.] gr. 8. geh. n. *M.* - 60.

Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. Von Prof. Dr. F. RICHARZ. 2. Auflage. Mit 97 Abbildungen. [VI u. 128 S.] gr. 8. geb. n. *M.* 1.50.

Zweck der Schrift ist, in zwar wissenschaftlicher, aber gemeinverständlicher Weise, ohne Zuhilfenahme mathematischer Entwicklungen, diejenigen Vorstellungen und Versuche auseinanderzusetzen, welche dem elektrischen und magnetischen Maßsysteme, trischen Schwingungs- und Wellen, der Draht und den Tesla- liegen. Man könnte eine elementare Dar- day - Maxwell'schen ihrer experimen- nennen. Die erste entsprechend ihre bei denjenigen Leh-

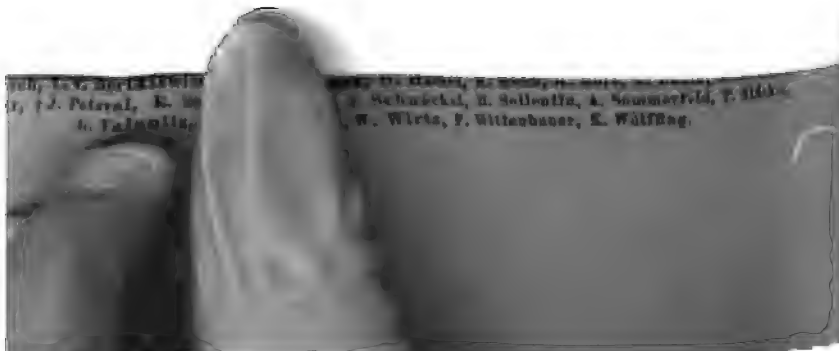


Aus Richarz,
Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität.

magnetischen ab- den Hertzschen elek- gen und seinen elek- Telegraphie ohne Strömen zu Grunde die Schrift daher stellung der Far- Anschauungen und tellen Grundlagen Auflage hat dem- Hauptverbreitung renden gefunden, welchen eine solche Darstellung zu geben in ihrem Berufe ob- liegt, und bei solchen Lernenden, welche entweder sich mit der elementaren Dar- stellung begnügen oder sich durch sie auf das streng mathematische Stu- dium jener Theorien vorbereiten wollen.

Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Von Dr. K. SCHREBER, Privatdozent für Physik. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.60, geb. n. *M.* 4.20.

Die Theorie der Dampfmaschinen hat seit einer Reihe von Jahren keine eigentlichen Fortschritte gemacht. Die sämtlichen Arbeiten der Theoretiker beschränkten sich auf den Ausbau der von Hirn und Zeuner gegebenen Arbeiten. So ist es gekommen, daß die so sehr viel jüngeren Gasmotoren nahe daran sind, die Dampfmaschinen zu überflügeln, sowohl was die Ausbildung der Theorie anbelangt, als auch in Bezug auf die Ausnutzung der Brennstoffe.



Dieses Stocken in der Theorie der Dampfmaschinen liegt daran, daß man sich ausschließlich an Wasserdampfmaschinen gehalten hat. Ein Fortschritt in der Ausnutzung der Brennstoffe durch Dampfmaschinen kann nur durch den Übergang zu Mehrstoffdampfmaschinen erreicht werden.

Im vorliegenden Buch wird nun nachgewiesen, wie man die geeignetste Flüssigkeit auswählt und welches die dadurch erreichbaren Vorteile sind.

Schenk, Julius, Dr. Ing., Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Texte und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.60.

Kühler, J., Baurat in Eßlingen, die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. Erster Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis? [52 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.60.

Naturwissenschaften.

Die verbreitetsten Pflanzen Deutschlands. Von Professor Dr. O. WÜNSCHE. 4. Auflage. [IV u. 282 S.] 8. geb. n. *M* 2.—

Auch diese Auflage, die nach dem unerwartet schnellen Absatz der sehr starken dritten Auflage nötig geworden ist, enthält verschiedene Zusätze und Verbesserungen, die während des Unterrichts hervorgetreten sind. Den deutschen Pflanzennamen wurde wiederholt besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Neue Pflanzenarten sind dagegen nicht aufgenommen worden, da mir in dieser Beziehung von seiten der zahlreichen Herren Kollegen, die das kleine Buch benutzen lassen, kein Wunsch zu erkennen gegeben wurde. Otto Wünsche.

Exkursionsflora für Nord- und Mittelddeutschland. Ein Taschenbuch zum Bestimmen der im Gebiete einheimischen und häufiger kultivierten Gefäßpflanzen für Schüler und Laien von Prof. Dr. KARL KRAEPELIN. Mit 566 in den Text gedruckten Holzschnitten. Fünfte, verbesserte Auflage. [XXX u. 365 S.] 8. In Leinwand geb. n. *M* 4.—

Der leitende pädagogische Gesichtspunkt bei der Ausarbeitung der vorliegenden Flora lag in dem Gedanken, daß der naturwissenschaftliche Unterricht wohl eine Kenntnis der Charaktermerkmale größerer Gruppen des Tier- und Pflanzenreiches, etwa bis zu Familien herab, bei dem Schüler erstreben und auch erreichen könne, daß aber die Besprechung der Gattungen, Arten, Varietäten in der Schule nur so weit gerechtfertigt erscheine, als dadurch jene größeren Kategorien erläutert und gewissermaßen mit Inhalt gefüllt werden, daß mithin alle weitergehende Spezialkenntnis auf dem Gebiete der Systematik nicht so sehr Sache der die allgemeine naturwissenschaftliche Bildung erstrebenden Schule, als vielmehr des durch den Lehrer zu erweckenden Privatinteresses des Schülers sei.

Dieser Gedanke, welcher sich dem Verfasser in langjähriger

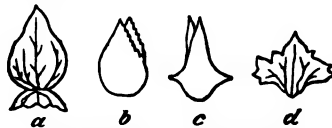
39

en
lie
ls-
ng
ne
na
en
en
en,
ar-
las
ch
lie
eit
rei
nd
re-
ng
he

zu
ls.
ge-
φ,
so

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, V 18, S. 535. 1881.

Lehrpraxis immer zwingender aufgedrängt hat, veranlaßte denselben, trotzdem seine Studien nicht auf dem Gebiete der Floristik sich bewegen, das vorliegende Tabellenwerk zu schaffen, das auf wissenschaftliche Selbständigkeit keinerlei Anspruch erhebt, auch nicht als Schulbuch in dem Sinne aufzufassen ist, daß es etwa zur Einprägung der wissenschaftlichen Familien-, Gattungs- und Artdiagnosen benutzt werden könnte, das aber den Schüler (und ebenso den Laien) in den Stand setzen soll, die Namen der beim Unterricht vorliegenden oder auf seinen Exkursionen gesammelten Pflanzen allein und ohne Hilfe eines Lehrmeisters aufzufinden. Diesem Ziele der möglichst leichtesten und sicheren Bestimmung sind alle andern Gesichtspunkte untergeordnet.



Aus Kraepelin, Exkursionsflora.

Die vorstehend dargelegten Grundsätze, die dem Werkchen trotz der stetig wachsenden Menge deutscher Floren immer neue Freunde erworben haben, sind auch in der neuen Auflage maßgebend geblieben, ja der Verfasser ist noch weiter bemüht gewesen, durch Umarbeitung der Bestimmungsstabellen

durch Erweiterung der Diagnosen, namentlich bei schwierigen Arten, durch Einfügung zahlreicher neuer Zeichnungen die Arbeit des Bestimmungens nach Möglichkeit zu erleichtern. Die Zahl der neu aufgenommenen Arten ist erheblich vermehrt, die Nomenklatur revidiert worden. Neu ist eine kurze Charakteristik der Familien und die Anleitung zum Anlegen eines Herbars.

Hamburg.

K. K.

Leitfaden für den botanischen Unterricht an mittleren und höheren Schulen von Professor Dr. KARL KRAEPELIN.
214 Figuren in Holzschnitt. Sechste verbesserte Auflage. [IV
u. 129 S.] gr. 8. In Leinwand geb. n. M. 1.20.



Aus Kraepelin, Leitfaden für den botanischen Unterricht

Sammlung naturwissenschaftlich-pädagogischer Abhandlungen.

Herausgeg. von OTTO SCHMEL in Magdeburg und W. B. SCHMIDT in Leipzig. gr. 8.

Heft 1: Zweck und Umfang des Unterrichts in der Naturgeschichte an höheren Mittelschulen mit besonderer Berücksichtigung der Gymnasien. Von F. MÜHLBERG in Aarau. [62 S.] 8°. n. M. 1.20.

March, 1870
John, & J. F. O'Connell

J. Schaefer, H. Sellentin, A. Sommerfeld, F. Sittler,
L. W. Wirtz, P. Wittenbomer, H. Wöhring.

Heft 2: Schülerübungen in der elementaren Astronomie. Von Dr. PAUL SCHLEE, Oberlehrer an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg. Mit zwei in den Text gedruckten Figuren. [15 S.] geh. n. M. — 50.

In dieser Sammlung sollen Abhandlungen eine Stätte finden, die dem naturwissenschaftlichen Unterrichte dienen wollen, dem Unterrichte im allgemeinen oder auch in einem Einzelgebiete, und die, zu kurz, um ein Buch zu füllen, doch so umfangreich sind, daß sie in einer Zeitschrift auf zu viele Nummern zersplittert werden müßten, oder die ihre Verfasser zunächst separat zu haben wünschen.

Wie in der Tendenz, wird sich die Sammlung auch in Format und Ausstattung an die im gleichen Verlage erscheinende Zeitschrift „Natur und Schule“ anschließen; ihre Leitung aber ist in sich selbständig. Die Abhandlungen werden in zwanglos erscheinenden Heften ausgegeben werden und einzeln käuflich sein. Schließlich aber soll, um sie besser zu konservieren, je eine Anzahl solcher Abhandlungen zu Bänden von etwa 30 Bogen zusammengefaßt werden, die zu einem billiger bemessenen Subskriptionspreise für sich abgegeben werden und eine Ergänzung für die Zeitschrift „Natur und Schule“ bilden würden.

Bei dem regen Interesse, welches die Frage nach der Förderung des naturwissenschaftlichen Unterrichts bei allen Beteiligten zur Zeit findet, glauben Herausgeber und Verleger der Sammlung, auch mit diesem Unternehmen einem Bedürfnis entgegenzukommen, und erhoffen für dasselbe freundliche Unterstützung. Wenn eine Erörterung auch heiklerer Fragen nicht abgeschnitten werden soll, so wird heute auch dafür auf das rechte Verständnis gerechnet werden dürfen. Gerade für solche tut eine eingehende Vorbesprechung not, wenn die Aussicht einer Verständigung nicht in nebelhafter Ferne bleiben soll.

Für die Sammlung bestimmte Sendungen (Briefe, Manuskripte u. s. w.) läßt man zu richten an Rektor Dr. O. Schmeil in Magdeburg, Annenstraße 17, oder an Prof. Dr. Walther Schmidt in Leipzig, Elisenstraße 39.

Heft 3: Die Abstammungslehre im Unterrichte der Schule von Dr. WALTHER SCHOENICHEN, Oberlehrer am Reformgymnasium zu Schoeneberg. Mit 14 Figuren im Text und 2 schematischen Darstellungen. [46 S.] geh. n. M. 1.20.

Die Frage nach der Einführung der Abstammungslehre in den Unterricht der Schule ist in letzter Zeit mehrfach angeschnitten worden. In vorliegender Schrift sucht nun der Verfasser zunächst den Nachweis zu erbringen, daß aus wissenschaftlichen wie philosophischen Gründen die Descendenztheorie in die Schule gehört. Des weiteren wird ein Plan entworfen, wie diese Theorie den Schülern beigebracht werden kann, selbst für den Fall, daß der naturkundliche Unterricht nach wie vor von der Oberstufe unserer höheren Lehranstalten ausgeschlossen bleibt. Ein besonderes Gewicht wird dabei auf die sittlich-erzieherische Ausbildung der Jugend gelegt, indem der Nachweis geführt wird, daß die Abstammungslehre, weit entfernt, ihre Anhänger von der Religion loszulösen, vielmehr für das Gedeihen einer rechten Sittlichkeit erst den Boden abgibt.



Magosphaera planula.

Aus Schoenichen,
Die Abstammungslehre im
Unterrichte der Schule.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, W.

18, S. 635. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1905. 3. u. 4. Heft.

Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.

Mathematisch-physische Klasse.

Zur Theorie des Legendre-Jacobischen Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$, insbesondere über zweiteilige komplexe Zahlen. Abhandlung II. Von W. SCHEIBNER. (XXVII. Bd., Nr. VII.) [101 S.] Lex.-8. geh. n. \mathcal{M} 3.50.

C. Neumann, über die Maxwell-Hertz'sche Theorie. Zweite Abhandlung. (XXVII. Bd., Nr. VIII.) Mit 3 Textfiguren [107 S.] Lex.-8. geh. \mathcal{M} 3.50. Dritte Abhandlung. (XXVIII. Bd., Nr. II.) Mit 3 Textfiguren. [22 S.] Lex.-8. geh. n. \mathcal{M} 1.50.

Hayn, Friedrich, selenographische Koordinaten. Erste Abhandlung. (XXVII. Bd., Nr. IX.) [IV u. 60 S.] Lex.-8. geh. n. \mathcal{M} 2.—

Über Urausscheidungen in rheinischen Basalten. Von F. ZIRKEL (XXVIII. Bd., Nr. III.) [95 S.] Lex.-8. geh. n. \mathcal{M} 3.—

Zeitschriften.

Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. 54. Band. 1902. gr. 8. III.—VII. Hef. III. [47 S.] geh. n. \mathcal{M} 2.80; IV. [36 S.] geh. n. \mathcal{M} 1.40; V. [66 S.] geh. n. \mathcal{M} 1.50; VI. [60 S.] geh. n. \mathcal{M} 1.—; VII. [XXXII u. 31 S.] geh. n. \mathcal{M} —.75.

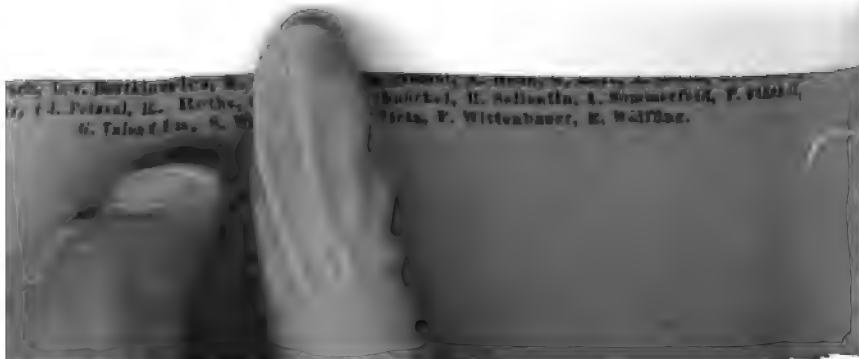
Inhalt III: C. Neumann, Über Metallreflexion und totale Reflexion. — Paul Stäckel, 1. Beiträge zur Flächentheorie. 2. Darstellung der Minimalflächen. — Th. 1. Lineare Konstruktion einer Raumkurve dritter Ordnung aus drei Paaren konjugierter imaginärer Punkte. 2. Projektiver Beweis einiger elementaren Sätze aus der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. 3. Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. — M. Krause, Zur Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen.

Inhalt IV: A. Mayer, Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung. — Heinrich Liebmann, Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschewskischen Geometrie.

Inhalt V: F. Kirchner, Über beobachtete Absorptions- und Farbenänderungen infolge von Abstandsänderungen der absorbierenden Teilchen. Mit 3 Abbildungen. — Gerhard Kowalewski, Über das Kroneckersche Integral für die Charakteristik eines Funktionensystems. — Ch. Riquier, Über Systeme partieller Differentialgleichungen. — Frans Etsold, Das Wiechertsche seismische Pendelseismometer der Erdbebenstation Leipzig und die von ihm gelieferten Seismogramme von Fernbeben. Mit 2 Tafeln und 1 Textfigur. — A. Mayer, Nachtrag zu dem Aufsatz: Über den Zusammenhang zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung.

Inhalt VI: C. Neumann, Beiträge zur analytischen Mechanik. Zweite und dritte Abhandlung. — G. Scheffers, Über Loxodromen. — Gerhard Kowalewski, Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes.

Inhalt VII: Heinrich Liebmann, Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. Mit 14 Textfiguren. — Verzeichnis der Mitglieder der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. — Verzeichnis der eingegangenen Schriften.



erichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. 55. Band. 1903. gr. 8. I.—III. Heft. I. Mit zwei Tafeln und drei Textfiguren. [62 S.] geh. n. *M.* 2.50; II. Mit einer Tafel und einer Textfigur. [43 S.] geh. n. *M.* 1.20; III. [48 S.] geh. n. *M.* 1.—

Inhalt I: *H. Credner*, Die vom Wiechertschen astatischen Pendelseismometer der Erdbebenstation Leipzig während des Jahres 1902 registrierten Nahbeben. (Mit 1 Tafel und 3 Figuren.) — *Franz Eysold*, Die von Wiecherts astatischem Pendelseismometer in der Zeit vom 15. Juli bis 31. Dezember 1902 in Leipzig gelieferten Seismogramme von Erdbeben. (Mit Tafel II.) — *Martin Krause*, Über bernoullistische Zahlen und Funktionen in Gebieten der Funktionen zweier veränderlichen Größen.

Inhalt II: *M. Siegfried*, Zur Kenntnis der Hydrolyse des Eiweisses. (Mit 1 Tafel.) — *G. Scheffers*, Bemerkungen zu einem Satze von Sophus Lie über algebraische Funktionen. — *G. Kowalewski*, Über projektive Transformationsgruppen. (Mit 1 Figur.)

Inhalt III: *J. Thomas*, Über orthogonale Invarianten und Kovarianten bei Kurven dritter Ordnung mit unendlich fernem Doppelpunkte. — *A. Mayer*, Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. — *H. Liebmann*, Über die Zentralbewegung in der nichteuklidischen Geometrie.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. II. Jahrgang. 1903. 1. u. 2. Stück.

Inhalt: Zehnte Sitzung am 20. Oktober 1902. — Elfte Sitzung am 26. November 1902. — Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. Von *Edmund Landau*. — Ein einfaches System flächentheoretischer Grundformeln. Von *J. Knoblauch*. — Geometrographische Herleitung des Kreises. Von *R. Günische*. Mit 3 Figuren im Text. — Mitgliederverzeichnis. — Zwölfte Sitzung am 17. Dezember 1902. — Dreizehnte Sitzung am 8. Januar 1903. — Über das Cauchy'sche Integral. Von *M. Hamburger*. — Über einige Lebnizblättchen. Von *Hermann Fürle*. — Elementare Ableitung einiger Formeln der rechnerischen Quadratur. Von *E. Lampe*. — Über die projektive Geometrie. Von *Erhard Hessenberg*.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. In Monatsheften herausgeg. von *A. GUTZMER* in Jena. XI. Band. 1902. 8.—12. Heft. Preis für den Band von 12 Heften *M.* 14.— XII. Band. 1903. 1.—6. Heft. gr. 8. Preis für den Band von 12 Heften n. *M.* 18.—

Aus dem Inhalt:

W. Ahrens: Über Aufgaben und Einteilung eines Mathematiker-Adressbuchs.
G. Frege: Über die Grundlagen der Geometrie.

K. Geißler: Die geometrischen Grundvorstellungen und Grundsätze und ihr Zusammenhang. Mit 4 Figuren im Text.
E. Jahke: Ferdinand Caspary †. Mit Bildnis.

E. Jahke: Über eine elementare Theorie der Thetafunktionen von ein und zwei Argumenten.

H. Liebmann: Über die singularitätenfreie konforme Abbildung geschlossener Flächen auf die Kugel.

J. Laroeth: Ernst Schröder †. Mit Bildnis.

F. Meyer und *F. Klein*: Bericht über den Stand der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

E. Müller: Zur Theorie der linearen Systeme von Kurven und Flächen zweiten Grades.

Th. Reye: Die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit.

W. Schlink: Über die Deformation von rhombischen Netzen und ähnliche Probleme. Mit 9 Figuren im Text.

A. Schönflies: Zur Statistik des mathematischen Studiums.

E. Study: Über nichteuklidische und Liniengeometrie.

L. Sylow: Festrede zum Abeljubiläum. Mit Abels Bildnis.

Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch *A. CLEBSCH* und *C. NEUMANN*. Unter Mitwirkung von *P. GORDAN*, *A. MAYER*, *C. NEUMANN*, *M. NOETHER*, *K. VONDERMÜHLL*, *H. WEBER* herausgegeben von *F. KLEIN*, *W. v. DYCK*, *D. HILBERT*. 56. Band.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. Ann. 18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

19

3. u. 4. Heft. 57. Band. 1. u. 2. Heft. Preis für den Band von 4 Heften gr. 8 n. *M* 20.—

Aus dem Inhalt:

- O. Blumenthal: Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen.
 G. Faber: Über polynomische Entwicklungen.
 J. H. Graf: Beitrag zur Auflösung von Differentialgleichungen 2. Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen.
 G. Hamel: Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind. (Mit 3 Figuren im Text.)
 D. Hilbert: Über die Grundlagen der Geometrie.
 F. Klein: Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796—1814. (Hierzu 1 Faksimile.)
 F. Klein: Über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.
 A. Loewy: Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen.
 L. Maurer: Über die Endlichkeit der Invariantensysteme.

- E. Netto: Über die Zusammensetzung von Substitutionen aus den Transpositionen.
 M. Noether: Über die singulären Elemente der algebraischen Kurven.
 E. Pascal: Eugenio Beltrami.
 H. Schubert: Über die Incidenz zweier linearer Räume beliebiger Dimensionen.
 F. Schur: Zur Proportionslehre. (Mit 3 Figuren im Text.)
 P. Stäckel: Lineare Scharen geodätischer Linien.
 Th. Vahlen: Über endliche Polyeder.
 G. T. Whittaker: On the partial differential equations of mathematical physics.
 Yoshiye: Anwendungen der Variationsrechnung auf partielle Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen.

Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Zugleich Organ der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Gegründet 1841 durch J. A. GRUNERT. III. Reihe. Herausgegeben von E. LAPPE in Berlin, W. FRANZ MEYER in Königsberg i. Pr. und E. JAHNKE in Berlin. 3. Band. Heft 3 u. 4. 4. Band. Heft 1—4. 5. Band. Heft 1 u. 2. Preis für den Band von 24 Druckbogen in 4 Heften gr. 8 n. *M* 14.—

Das Archiv berücksichtigt seit seiner Gründung besonders die Bedürfnisse der Lehrer höherer Lehranstalten und ist das einzige Organ, welches sich nicht bloß die Erweiterung der mathematischen Erkenntnis, sondern auch die Verbreitung mathematischer Forschung als Ziel steckt. Zur Fesselung des Leserkreises sollen auch solche Aufsätze gebracht werden, die die Kenntnisaufnahme und das Verständnis der neueren mathematischen Anschauungen und Entdeckungen vermitteln.

Um zu selbständigen Arbeiten anzuregen, werden Aufgaben zu stellen versucht, die dem Stoffe des Hochschulunterrichts entnommen sind. Die Namen der Einsender richtiger Lösungen werden in den nächsten Heften veröffentlicht. Bearbeitungen, welche sich durch Originalität und Eleganz der Darstellung auszeichnen, werden, soweit der Platz verfügbar ist, zum Abdruck gelangen. Durch die Mannigfaltigkeit der Gaben soll vor allem die Langweiligkeit und die Kleinigkeitskrämerlei aus dem Archiv verbannt werden. Das Archiv soll somit aus seiner im neunzehnten Jahrhundert ausgebildeten Gestalt in diejenige umgewandelt werden, welche das zwanzigste mit seinen neuen Aufgaben fordert.

Aus dem Inhalt:

- A. Hurwitz: Über höhere Kongruenzen.
 S. Jolles: Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes.
 G. Kohn: Über das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl.
 H. Kühne: Die Grundgleichungen einer beliebigen Mannigfaltigkeit.
 E. Landau: Über den Verlauf der zahlentheoretischen Funktionen $\varphi(x)$.
 E. Landau: Über die Maximalordnung der Permutationen gegebenen Grades.
 M. T. Levi-Civita: Sur la singularité dont sont affectées, pour une vitesse nulle, les équations du mouvement d'un point matériel frottant sur une surface.

- M. d'Ocagne: Über einige elementare Grundgedanken der Nomographie. (Mit 4 Figuren im Text.)
 E. Pringsheim: Über Brechung und Dispersion des Lichts auf der Sonne. (Mit 6 Figuren im Text.)
 A. Pringsheim: Über Konvergenzkriterien für Reihen mit komplexen Gliedern.
 W. Scheil: Synthetische Behandlung einiger Probleme über Kurven doppelter Krümmung.
 P. Stäckel: Zur nichteuklidischen Geometrie. (Mit 1 Figur im Text.)
 B. Sturm: Über Umformungen von Maximal- und Minimalfiguren.

Wallenberg: Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke.
 Feinholdt: Über die Konstruktion von Kugeln auf Flächen 2. Ordnung. (Mit Figuren im Text.)

H. Weber: Theorie der reellen quadratischen Irrationalzahlen.
 J. Weingarten: Über eine Aufgabe der Mechanik. (Mit 1 Figur im Text.)
 H. Züge: Zur Lehre von der Teilbarkeit dekadischer Zahlen.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von GUSTAV ENESTRÖM in Stockholm. III. Folge. 3. Band. 3. u. 4. Heft. 4. Band. 1. u. 2. Heft. Preis für den Band von 4 Heften gr. 8 n. *M* 20.—

Aus dem Inhalt:

Eneström: Über kulturhistorische und rein sachmännische Behandlung der Geschichte der Mathematik.
 Eneström: Über die Aufgaben einer mathematischen Zentralbibliothek.
 Schmidt: Zur Geschichte des Dampfessels im Altertum.
 Schmidt: Nivellierinstrument und Tunnelbau im Altertum. (Mit 6 Figuren im Text.)
 Tannery: Sur la sommation des cubes entiers dans l'antiquité.
 Tannery: Simplicius et la quadrature du cercle.
 Eneström: Ein verschollener deutscher Geometrist aus dem Anfange des sechzehnten Jahrhunderts.

C. B. Wallner: Die Wandlungen des Individualitätsbegriffs von Cavalleri bis Wallis.
 J. V. Pexider: Übersicht über die Literatur des Abelschen Theorems.
 A. Favaro: Intorno ad alcune anomalie presentate dal „Bullettino“ del Principe Boncompagni.
 A. von Braunmühl: Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der technischen Hochschule in München 1897—1902.
 S. Günther: Maximilian Curtze.
 S. Günther: August Heiler.
 Anfragen.
 Rezensionen.
 Neuerschienene Schriften.
 Wissenschaftliche Chronik.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch † O. SCHLÖMILCH. Organ für angewandte Mathematik. Gegenwärtig unter Mitwirkung von C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-Breslau, H. SEELIGER, H. WEBER herausgegeben von R. MEHMKE in Stuttgart und C. RUNGE in Hannover. 47. Band. 3. u. 4. (Doppel-)Heft. 48. Band. 1.—4. Heft. Preis für den Band von 32 Druckbogen in 4 Heften gr. 8 n. *M* 20.—

Aus dem Inhalt:

Föppl: Lösung des Kreiselpblems mit Hilfe der Vektoren-Rechnung.
 Franke: Der Spitzbogenträger mit Scheitelpunkt und sprunghaft veränderlichem Trägheitsmoment. (Mit 1 Figurentafel.)
 Franke: Kontinuierliche Parabelträger. (Mit 28 Figuren auf 1 Doppeltafel.)
 Gans: Über die numerische Auflösung von partiellen Differentialgleichungen.
 Gans: Über Induktionen in rotierenden Leitern.
 Grassmann: Die Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt. (Mit 6 Figuren im Text.)
 Grünwald: Sir Robert S. Ball's lineare Schraubengebiete. (Mit 2 Tafeln.)
 Heimann: Die Festigkeit ebener Platten bei normaler konstanter Belastung. (Mit 1 Figur im Text.)

F. Jung: Zur geometrischen Behandlung des Massenungleiches bei vierkurbeligen Schiffmaschinen. (Mit 13 Figuren im Text.)
 L. Matthies: Über unendliche Mannigfaltigkeiten der Orte der dioptrischen Kardinalpunkte von Linsen und Linsensystemen bei schiefer Incidenz. (Mit 3 Figuren im Text.)
 M. Radaković: Über die Bewegung eines Motors unter Berücksichtigung der Elastizität seines Fundamentes.
 P. Roth: Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues.
 C. Runge: Über die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen auf graphischem Wege. (Mit 4 Figuren im Text.)
 J. v. Vieth: Über Zentralbewegung.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, *V* 18, S. 635. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

19

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen. (Zugleich Organ der Sektionen für math. und naturw. Unterricht in den Versammlungen der Philologen, Naturforscher, Seminar- und Volksschullehrer.) Begründet 1869 durch J. C. V. HOFFMANN. Herausgeg. von Direktor Dr. SCHOTTEN in Halle. 33. Jahrg. 1902. 5.—8. Heft. 34. Jahrg. 1903. 1.—4. Heft. Preis für den Jahrgang von 8 Heften gr. 8 n. *M* 12.—

Diese Zeitschrift hat seit ihrem Bestehen auf dem Gebiete des höheren Schulwesens erfolgreich gewirkt und ist nicht nur in Deutschland, sondern auch im Auslande weit verbreitet. Sie hat trotz mancher nach ihrem Muster neugegründeter ähnlicher Organe ihre Bedeutung fortdauernd sich erhalten. Ihr Wert beruht hauptsächlich in der Mannigfaltigkeit ihres Inhalts: I. Original-Artikel. Aufgaben-Repertorium II. Literarische Berichte: Rezensionen, Programm- und Journalschau, Bibliographie. III. Pädagogische Zeitung; Berichte über höheres Schulwesen überhaupt; und insbesondere über Versammlungs-Verhandlungen, die mit demselben Beziehung oder Berührung haben. Ein besonderer Vorzug der Zeitschrift ist das von den Lesern sehr geschätzte und viel benutzte Aufgaben-Repertorium, von welchem bereits eine separate Sammlung aus den ersten 25 Bänden der Zeitschrift vorliegt. D. Rezensionen werden teils von gereiften Schulmännern, teils von Universitätsprofessoren geliefert. Die Zeitschrift wurde sofort nach ihrer Gründung von allen Schulbehörden den ihnen unterstehenden Schulen empfohlen.

Aus dem Inhalt:

- E. Eckhardt: Neue Ableitung und geometrische Darstellung vom Kreisumfang und -inhalt. (Mit 8 Figuren im Text.)
E. Eckhardt: Elementare Ableitung der Realitätsbedingungen für die Gleichungen dritten Grades ohne Auflösung dieser Gleichungen.
K. Geißler: Die Asymptote und die Weitenbehaftungen. (Mit 1 lithogr. Tafel.)
K. Geißler: Eine Konstruktionsaufgabe, ausgedehnt auf verschiedene Weitenbehaftungen (Geometrie des Unendlichen). (Mit 6 Figuren im Text.)
E. Grimschl: Die „einfachen Maschinen“, insbesondere der Hebel im Physikunterricht. (Mit 12 Figuren im Text.)
Herzter: Die Kegelschnitte. (Mit 11 Figuren im Text.)
J. Jung: Zur Behandlung der Versicherungslehre im Unterricht.
P. von Schaewen: Beiträge zur Lösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Chr. Schmehl: Über ein System von n homogenen linearen Gleichungen mit n Unbekannten und ein System von n nicht-homogenen linearen Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten.

G. Schülem: Stabiles Gleichgewicht schwimmender Körper. (Mit 4 Figuren im Text.)

H. Schumann: Die höhere Mathematik in den württembergischen Oberrealschulen.

Steinriede: Über Aufgabe, Bedeutung und Methode des naturwissenschaftlichen Unterrichts auf höheren Schulen.

H. Wieleitner: Über die mathematisch-physikalische Lehraufgabe und die Ausbildung der Fachlehrer im Kgl. Gymn. Bayern.

K. Wolletz: Über die Leitlinie der Kegelschnitte. (Mit 6 Figuren im Text.)
Rezensionen und Anzeigen.

Geographische Zeitschrift. Herausgegeben von Dr. ALFRED HERTNER, a. o. Professor an der Universität Heidelberg.
8. Jahrg. 1902. 5.—12. Heft. Preis halbjährlich *M* 9.—
9. Jahrg. 1903. 1.—6. Heft. Jährlich 12 Monatshefte zu je $3\frac{1}{2}$ bis 4 Bogen. gr. 8. Preis halbjährlich n. *M* 10.—

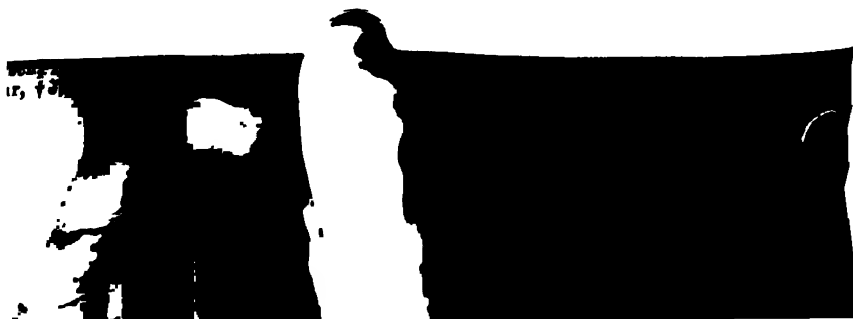
Aus dem Inhalt:

- F. Wiegand: Das Gesetz der Wästenbildung in Gegenwart und Vorzeit nach Joh. Walther.
J. Fröh: Zur Bestimmung der Oberflächenentwicklung.
P. Caner: Über die Stellung des geographischen Unterrichts am Gymnasium.

Langenbeck: Ziel und Methode des geographischen Unterrichts.

J. B. Messerschmitt: Die wichtigsten geographischen Ergebnisse der deutschen Tiefsee-Expedition.

H. Toepfer: Die deutsche Nordseeküste in alter und neuer Zeit.



- L. Penck: ~~Neue Alpenkarten.~~
 L. Philippson: Neuere Forschungen in der westlichen-Steinzeit.
 L. Tschulok: Das Seegebiet des nord-westlichen Sibiriens.
 L. Friedrighsen: Sibirien und die Gebirgsländer der russisch-asiatischen Grenzgebiete.
 L. Fritzsche: Afghanistan.
 L. Fritzsche: Der Felsen als Typus der Felsenwüste. Ein Beitrag zur Charakteristik der Felsenwüsten Zentralasiens. (Mit 2 Doppeltafeln in Lichtdruck.)
 L. Fritzsche: Die Mandchurie.
 L. Fischer: Marokko. Eine ländliche Skizze.
 M. Maurer: Deutsch-Ostafrika. Eine klimatologische Studie. (Mit drei Abbildungen im Text und zwei Tafeln.)
 G. Karsten: Paul Preuss' Expedition nach Zentral- und Südamerika 1890/1900.
 K. Sapper: Südamerikanische Landschaft. (Mit 4 Tafeln.)
 E. Mogk: Die Entdeckungen der Norweger in Amerika.
 A. Hettner: Das Deutschtum in Südbrasilien.
 F. Ratzel: Der australische Bund und Neuseeland.
 R. v. Lenzfeld: Der landschaftliche Charakter Neuseelands. (Mit 4 Tafeln.)
 Geographische Neuigkeiten.
 Bücherbesprechungen

Natur und Schule. Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen. Herausgegeben von B. LANDSBERG in Allenstein O.-Pr., O. SCHWEIL in Magdeburg, B. SCHMID in Zwickau. I. Jahrg. 1902. 4.—8. Heft. II. Jahrg. 1903. 1.—5. Heft. Preis für den Jahrgang von 8 Heften gr. 8 zu je 64 Seiten n. M. 12.—

Aus dem Inhalt:

- L. Reiske: Was heißt Biologie?
 A. Schulte-Tigges: Biologie und Entwicklungslehre im Rahmen der neuen preussischen Lehrpläne.
 H. Scherzer: Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse von den materialien Grundlagen der Bewusstseinsvorgänge.
 F. Witt: Der naturwissenschaftliche Unterricht in den preussischen Lehrerbildungsanstalten nach den neuen ministeriellen Bestimmungen vom 1. Juli 1901.
 B. Landsberg: Zur Frage der unterrichtlichen Ausfülle.
 L. Stels: Der Schulgarten an der höheren Schule der Großstadt.
 Wergitsky: Blütenbiologie u. Systematik.
 F. Schleier: Die Pflanzenphysiologie in der Schule.
 F. Kienitz-Gerloff: Beiz- und Stoffleitung in der Pflanze im Lichte der neueren Beobachtungen über Protoplasmaverbindungen zwischen den Zellen.
 H. de Vries: Das Stiefmütterchen, eine Studie zum Begriff der Art. (Mit 1 Tafel und 8 Abbildungen im Text.)
 P. Conrad: Individuen als Zentren des physikalischen Unterrichts in Volks- und Mittelschulen.
 K. Geisler: Die Photographie und der physikalische Unterricht. (Mit 4 Abbild.)
 Th. Krug: Die Induktion im Dienste des chemischen Unterrichts.
 Besprechungen.
 Versammlungsberichte.
 Sprechsaal.
 Bücherschau.

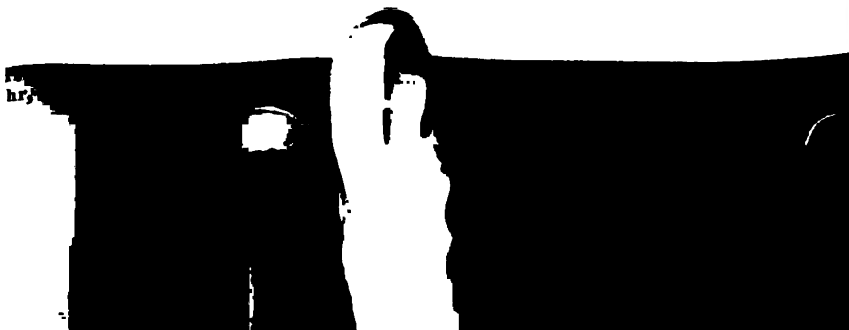
Ausgegeben im September 1903.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, 18, S. 535. 1881.

Prof. Dr. O. Wünsche

naturwissenschaftl. Hand- und Lehrbücher:

- Die verbreitetsten Pflanzen Deutschlands.** Ein Übungsbuch für den naturwissenschaftlichen Unterricht. 4. Aufl. [VI u. 282 S.] 1903. Biegsam in Leinwand geb. n. *M.* 2.—
- Die verbreitetsten Käfer Deutschlands.** Ein Übungsbuch für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Mit 2 Tafeln. [XVI u. 212 S.] 8. 1895. Biegsam in Leinwand geb. n. *M.* 2.—
- Die verbreitetsten Pilze Deutschlands.** Eine Anleitung zu ihrer Kenntnis. [XII u. 112 S.] 1896. geb. n. *M.* 1.40.
- Die Pflanzen des Königreichs Sachsen und der angrenzenden Staaten.** Eine Anleitung zu ihrer Kenntnis. Achte Auflage. [XXIV u. 447 S.] 8. 1899. Biegsam in Leinwand geb. n. *M.* 4.60.
- Die niederen Pflanzen.** [IV u. 435 S.] 1889. geb. n. *M.* 4.60. [Zugleich Ergänzung von Wünsche Exkursionsflora von Sachsen.]
- Die Pflanzen Deutschlands.** Eine Anleitung zu ihrer Bestimmung. Die höheren Pflanzen. 8. Aufl. [XXIV u. 559 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M.* 5.—
Dazu: Tabellen zum Bestimmen der Pflanzen Deutschlands nach Linnés System und der deutschen Holzgewächse nach dem Laube. [32 S.] gr. 8. 1898. geh. n. *M.* —.25.
- Die Alpenpflanzen.** Eine Anleitung zu ihrer Kenntnis. Zweite, unveränderte Ausgabe. [XVI u. 244 S.] gr. 8. 1896. In Leinwand geb. n. *M.* 3.—
- Die Kryptogamen Deutschlands.** Nach der analytischen Methode bearbeitet. Die höheren Kryptogamen. [XVI u. 127 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.60.
- Die Pilze.** Eine Anleitung zur Kenntnis derselben. [LII u. 323 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.40.
- Filices Saxonicae.** Die Gefäßkryptogamen des Königreichs Sachsen und der angrenzenden Gegenden. 2. Auflage. [31 S.] gr. 8. geh. n. *M.* —.60.
- Die Insekten.** Eine Anleitung zur Kenntnis derselben. 3 Abteilungen. Von D. H. R. von Schlechtendal und Otto Wünsche. [XII u. 707 S. mit 15 Tafeln.] gr. 8. geh. n. *M.* 9.60.
I. Abteilung. Käfer u. Hautflügler (m. 7 lithogr. Tafeln). [XII u. S. 1—257.] n. *M.* 3.60.
II. — Schmetterlinge und Fliegen (m. 4 lithogr. Tafeln). [S. 258—356.] n. *M.* 3.60.
III. — Netz-, Gerad- u. Halbflügler (m. 4 lithogr. Tafeln). [S. 357—706.] n. *M.* 2.40.
- Die Gliederfüßer,** mit Ausschuß der Insekten. Eine Anleitung zur Kenntnis derselben. Von D. H. R. von Schlechtendal. Mit lithogr. Tafeln. [VIII u. 116 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.40.



Walter Müller und Prof. Dr. F. O. Filling:

Deutsche Schulflora

um Gebrauch für die Schule und zum Selbstunterricht.

240 Tafeln in feinstem Farbenbrud mit erklärendem Text.

Neue Ausgabe mit systematischer Anordnung der Pflanzen.

Lex.-8. 1894.

Das Werk kann bezogen werden:

in 4 Teilen, von denen jeder 60 lose Tafeln in eleganter Mappe enthält, à n. 5.80 Mk.;
komplett in 1 eleganten Halbleinwand gebunden. Preis n. 24 Mk.
Einzelne Tafeln à 15 Pf. Eine Anzahl von mindestens 10 Exemplaren (der gleichen Tafel) wird für den Schulgebrauch zum Preise à 10 Pf. geliefert.

Die „Deutsche Schulflora“ enthält eine Sammlung von 240 Tafeln mit farbigen Abbildungen einzelner einheimischer Pflanzen, welche dem botanischen Unterrichte in der Regel zu Grunde gelegt werden.

Sämtliche Abbildungen sind nach lebenden Pflanzen in vollkommener Naturtreue gemalt und bringen, sofern nicht getrocknete Pflanzen, Stängel und Blätter dargestellt sind, möglichst die gesamte Gestalt der Pflanze zur Anschauung. Daneben sind Blüten, Blütenteile, Früchte, Samen, deren Längs- und Querschnitt, sowie charakteristische Merkmale vergrößert zur weiteren Erläuterung angegeben. Es ist außerdem die Familie des natürlichen und die Klasse des künstlichen Systems über jedem Pflanzenbilde beigefügt. Sämtliche Tafeln sind zu einem systematisch einheitlichen Atlas der deutschen Schulflora geordnet, welcher die übersichtliche Kenntnis der deutschen Pflanzenwelt ermöglicht und die Grundlage weiterer botanischer Studien zu bilden vermag.

Für den Unterrichtsgebrauch werden einzelne Tafeln in einer Anzahl von mindestens 10 Exemplaren zum Preise von je 10 Pf. an die Schulen abgegeben. Dadurch wird der Lehrer zu Stande gebracht, das naturgetreue Bild der gerade im Unterricht behandelten Pflanze und ihrer Teile dem Schüler in die Hand zu geben.

Aber auch abgesehen von diesem nächsten Zweck wird die „Deutsche Schulflora“ eben, der sich von Verfassern wegen oder aus Neigung mit Botanik beschäftigt, als Hilfsmittel zum Selbstunterricht von großem Nutzen sein; sie vermag zugleich eine vortreffliche Anleitung zur Anlegung eines Herbariums zu geben.

Prospekte mit Probetafeln und einem Verzeichnis der in der „Deutschen Schulflora“ abgebildeten Pflanzen lassen auf Wunsch kosten- und portofrei zu Diensten.

Ein Begleitwort zur „Deutschen Schulflora“, welches zugleich dem Lehrer die fruchtbringende Verwendung der Pflanzenbilder im Unterricht erleichtern und dem Zwecke des Selbstunterrichts dienen soll, ist erschienen unter dem Titel:

Prof. Dr. F. O. Filling:

Textbeilage zur „Deutschen Schulflora“.

Mit vielen Abbild. [VIII u. 264 S.] Lex.-8. 1894. Preis n. 3 Mk.;
in Halbleinwand geb. (entspr. dem Einbände der „Deutschen Schulflora“) n. 5 Mk.

Diese Textbeilage handelt in der Einleitung von dem Bau und Leben, von den wesentlichen Bestandteilen des Pflanzenorganismus und von der Einteilung der Pflanzenwelt in den künstlichen und in den sog. natürlichen Systemen. — Im Hauptteile enthält die Textbeilage sodann die genaue und übersichtliche Beschreibung der Abbildungen auf den 240 Tafeln der „Deutschen Schulflora“.

Einige Urteile der Presse über die „Deutsche Schulflora“.

Deutsche Lehrerzeitung: „Bei dem beginnenden Wintererwachen der Pflanzen dankt mich die rechte Zeit, auf ein botanisches Lehrmittel hinzuweisen, das seinesgleichen nicht hat. Es ist die „Deutsche Schulflora“ von Müller und Filling, der denkbar schönste und geschickteste Führer in die Pflanzenwelt. . . Den Schulen als Lehrmittel, den Pflanzenfreunden als Führer und dem deutschen Hause als Schmuckstück empfehle ich die „Deutsche Schulflora“ aufs angelegentlichste.“

Die Natur: „Mit Vergnügen sagen wir, daß es sich hier um ein Bilderbuch ersten Ranges handelt, welches ohne allen Zweifel seinen schönen Zweck, den botanischen Unterricht zu beleben, vollkommen erreichen und somit der Schule und Familie wahrhafte Belehrung gewähren wird.“ (R. Müller.)

Bayer. Beilage zur Pädag. Zeitung: „Aus dem Gesagten erhellt zur Genüge, daß die „Deutsche Schulflora“ der Schule ein außerordentliches Lehrmittel sein kann.“

Zeitschrift f. d. öffentl. Gymnasien: „Die 48 Tafeln, die uns vorliegen, sind gewissermaßen künstlerischer Vollenbung und von einer Naturwahrheit der Farbe, wie wir sie leider nur selten begegnen.“

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. Ann. 18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

19

Drei Bücher für die Jugend von Dr. H. Graepelin

(Mit Zeichnungen von D. Schwindbrogheim.)

Naturstudien im Hause.

Plaudereien in der Dämmerstunde.

2. Aufl. In Zwölf geb. n. M. 3.20

„Es ist eine Perle unter den Jugendbüchern beschreibenden Inhalts geworden und soll in keiner Jugendbibliothek fehlen. Wir wünschen den Plaudereien des Dr. Graepelin mit kindlichen Jüngern die weiteste Verbreitung, zumal sie sich auch äußerst in einem so kleinen Gewande präsentieren.“
(Hamburger Korrespondent, 10. September 1901.)

Naturstudien im Garten.

Plaudereien am Sonntag Nachmittag.

In Zwölf geb. n. M. 3.60

„Würde dieses wertvolle und gut ausgestattete Buch doch recht allgemein zur Belehrung der Jugend in Schule und Haus zur Verwendung kommen und auch eine recht gute Zeit erwachsenen aus ihm noch zu lernen suchen; es würde den Betreffenden nur zum Segen gereichen. Sellen haben wir über die interessantesten Naturvorgänge und tierischen wie pflanzlichen Beweisen, wie sie im Freien, speziell im Garten, und entgegenzutreten, in so anschaulicher, ansprechender und kenntnisreicher Weise plaudern hören dürfen, als es der Verfasser dieses Wertes versteht. . . . Reizende Zeichnungen tragen viel zur besseren Veranschaulichung bei. . . .“
(Leipziger Zeitung 1900, Nr. 28.)

Naturstudien in Wald und Feld.

Spaziergangs-Plaudereien.

In Zwölf geb. n. M. 3.00

„. . . Alles in allem teilt das neue Buch in vollem Maße die Sorgfältigkeit der alten, wie kein kann es als ein Meisterwerk der beschreibenden Jugendliteratur bezeichnet werden. Wenn wir jetzt genug haben, ein Kapitel des Buches zu lesen, werden zugleich lernen, zu welcher Zeit man mit Kindern über die Gegenstände und Erscheinungen der Natur spricht, wozu man recht sehr wünschen, es möge das Buch nicht nur von der Jugend, sondern auch von den Erwachsenen mit aller Aufmerksamkeit gelesen werden.“
(Schule und Haus 1902, Nr. 1.)

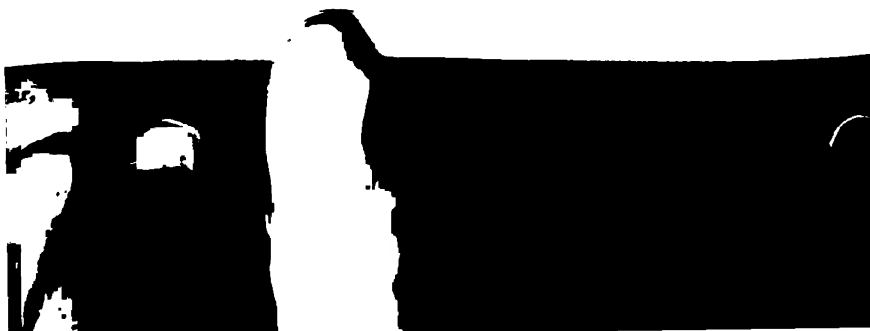
„In den Meisterwerken der vollständigen Darstellung gebührt unstreitig Dr. H. Graepelin, der mit seinen Naturstudien ein Volkswort im wahren Sinne des Wortes geschaffen hat; denn sie sind so recht geeignet, die lern- und wissbegierige Jugend sowohl wie auch den erwachsenen Mann des Volkes zum naturwissenschaftlichen Denken anzuregen und ihnen die Natur mit ihren Leben und Werden näher zu bringen. . . .“
(Neue Bahnen, Jahrg. 1902, S. 4.)

Streifzüge durch Wald und Flur.

Eine Anleitung zur Beobachtung der heimischen Natur in Monatsbildern. Für Haus und Schule bearbeitet von Oberlehrer Bernhard Landsberg. Dritte Auflage. Mit 84 Illustrationen nach Originalzeichnungen von Frau H. Landsberg. 1902. In Original-Leinwandband n. M. 5.—

„Jeder Bote des Buches merkt man es an, daß der Verfasser befaßt ist von einer glühenden Liebe zur Natur und daß er sich selbst mit voller Hingabe der Beobachtung der pflanzlichen und tierischen Lebens widmet. Daß ein Unterricht in der Naturbeobachtung, wenn er im Sinne der „Streifzüge“ von einem für seine Aufgabe begeisterten Lehrer erteilt wird, ganz außerordentlich fruchtbringend sein muß, darf wohl als selbstverständlich hingestellt werden.“
(Pädagogisches Archiv 1906, Heft 2.)

„Die Art der Darstellung istesselnd und anregend im höchsten Grade. In einem so schönen und vorzügliches Buch, das wir Freunden der Natur für sich und ihre heranwachsenden Kinder aufs wärmste empfehlen.“
(Schweizer Scherzblätter.)



Bestellzettel (zugleich Inhaltsverzeichnis).

Bei der Buchhandlung von

in

Bestelle ich hiermit aus dem Verlage von **B. G. Teubner** in Leipzig
folgende Bücher zu schnellster Lieferung:

Zum Kauf	Zum mathemat. u. naturwiss. Unterricht (S. 1.)	M. A.	Seite
(Abel.)	Mémoires publiés à l'occasion du centenaire de sa naissance	steif geb.	21. — 26
	Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. XIII. Heft.		14. — 23
	XIV. Heft.		16. — 23
	XV. Heft.		8. — 23
	XVI. I. Heft.	geh. 14. —, geb.	15. — 24
	XVII. Heft.		16. — 24
	Bachmann, niedere Zahlentheorie. I. Teil.	geb.	14. — 17
	Bardey, arithmetische Aufgaben nebst Lehrb. der Arithmetik. 18. Aufl.		
	Neubearbeit. v. Pietscher u. Presler.	geb.	2. 40. 1
	methodisch geordnete Aufgabensammlung. Neubearbeitung von Pietscher u. Presler. 2. Aufl.	geb.	2. 60. 3
	Bardey-Pietscher, Anleitung zur Auflösung eingelegelter algebraischer Gleichungen.	geb.	2. 60. 1
	Bauer, Vorlesungen über Algebra.	geb. 12. —, geb.	18. — 16
	Beyle, darstellende Geometrie.	geb.	3. 60. 14
	Björnbom, Studien über Menelaos' Sphärik (= Abhandlungen Heft XIV)		23
	Bolyai de Bolyai, Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens		4. — 26
	(—) Libellus — ad celebrandam memoriam eius editus		6. — 27
	Bopp, Antoine Arnauld, der große Arnauld, als Mathematiker (= Abhandlungen Heft XIV).		23
	Braunmühl, Vorlesungen üb. Gesch. d. Trigonometrie. II. Teil.		
		geh. 10. —, geb.	11. — 26
	Bruns, Grundlinien d. wissenschaftl. Rechnens.	geb.	3. 40. 16
	Bucherer, Elemente der Vektor-Analyse.		2. 40. 11
	Cantor, politische Arithmetik. 2. Aufl.	geb.	1. 80. 23
	(Cassary) siehe Jahnke.		
	Curtze, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter u. d. Renaissance. II. Teil. (= Abhandl. Heft XIII)		
	Oscher, Wahrscheinlichkeitsrechnung	geb.	24. — 18
	Eichhorn, arithmetische Regelhefte:		
	Heft 1: Quarta (Quinta)		— 40. 8
	— 2: Untertertia		— 40. 8
	— 3: Obertertia		— 40. 8
	— 4: Untersekunda		— 30. 8
	Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. III. Band: Geometrie. II. Teil. I. Heft		4. 80. 15
	(Die früher erschienenen Hefte s. S. 15.)		
	Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie, deutsch von Fiescher.	geh. 8. —, geb.	9. — 19
	(Fuchs) siehe Hamburger.		
	Ganter u. Rudol, die Elemente der analytischen Geometrie. I. Teil: Die analyt. Geometrie der Ebene. 5. Aufl.	geb.	8. — 10
	— II. Teil: Die analyt. Geometrie des Raumes. 3. Aufl.	geb.	3. — 10
	Göpfner, die Grundätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie.	geb.	14. — 22
	Girndt, Baumeister f. Baugewerkschulen. I. Teil. 2. Aufl. kart.		2. 40. 13
	Grassmanns' gesammelte mathemat. u. physikal. Werke, hrsg. von Engel. II. Band, II. Teil: Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik.		14. — 23
	Habicht, Schlüssel zur Gleichungslehre.		— 40. 11
	Hamburger, Gedächtnisrede auf I. L. Fuchs		1. — 27

en
lie
ls-
ng
ne
na
en
en
en,
ar-
las
ch
lie
eit
dei
nd
de-
ng
he

zu
ls.
ge-
φ,
so

W. S. g. u.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. 18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1908. 3. u. 4. Heft.

Teubners Mitteilungen 1903, Ausg. B.

Zur Ansicht	Zum Kauf		
		Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 2. Aufl. geb. 5.20, geb. 5.60.	2
		Holzmüller, method. Lehrbuch der Elementar-Mathematik	
		Ausg. A. I. Teil. 3. Aufl. geb.	2.48
		II. Teil. 2. Aufl. geb.	3.—
		III. Teil. 2. Aufl. geb.	4.40
		Ausg. B. I. Teil. geb.	2.40
		II. Teil. geb.	3.—
		Jahnke, Nachruf auf Ferd. Caspary.	1.40
		Klein u. Riecke, ab. angewandte Mathematik u. Physik. geb.	6.—
		König, Einleitg. i. d. allgemeine Theorie der algebr. Größen. geh. 18.—, geb. 20.—	2
		Kraser, Lehrbuch der Thetafunktionen. geb. 24.—	2
		Kronecker, Vorlesungen über Mathematik. II. Teil: Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschn. 1. Bd. geh. 20.—, geb. 21.—	2
		Müller, C. H., u. Presler, Leitfaden der Projektionslehre f. Gymnasien u. Realanstalten.	
		Ausg. A: f. Realgymnasien u. Oberrealschulen. . . geb.	4.—
		Ausg. B: f. Gymnasien u. sechsstuf. Realanstalten. geb.	1.—
		Müller, H., die Mathematik a. d. Gymnasien u. Realanstalten.	
		I. Teil: Unterstufe. geb.	2.70
		— Ausg. A (f. Gymn. u. Progymn.). 2. Aufl. geb.	1.60
		— Ausg. B (f. Realanst. u. Reformesch.). . . geb.	2.50
		II. Teil: Oberstufe. geb.	3.50
		— Ausg. A (f. Gymn. u. Progymn.). geb.	3.40
		— Ausg. B (f. Realanst. u. Reformesch.). I. Abt. geb.	2.50
		— — — — — II. Abt. geb.	2.40
		Ausg. C (f. Seminare u. Präparandenanst.), bearb. von Baltin u. Maiwald. geb.	2.50
		Ausg. f. Präparandenanstalten, bearb. von Baltin u. Segger. geb.	3.20
		Müller, H., u. Kutnewsky, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie.	
		Ausg. A. I. Teil. 2. Aufl. geb.	2.20
		II. Teil. geb.	2.50
		Ausg. B. I. Teil. 2. Aufl. geb.	2.20
		II. Teil. geb.	2.40
		Ausg. C, bearb. v. Baltin u. Maiwald. geb.	3.—
		Müller, H., u. Pietscher, Rechenbuch f. d. unteren Klassen der höheren Lehranstalten. geb.	2.40
		Ausg. A (für Gymnasien) geb.	2.60
		Ausg. B (für Realanstalten und Reformschulen) . . geb.	2.60
		Pascal, Repertorium der höh. Mathematik, deutsch v. Schopp.	
		I. Teil: Analysis. geb.	10.—
		II. Teil: Geometrie. geb.	12.—
		Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge, hrsg. von Noether u. Wirtinger. geb.	6.—
		Sapolsky, über die Theorie der relativ-Abelschen kubischen Zahlkörper. 2 Teile. geb.	6.—
		Sauerbeck, Einleitung in die analytische Geometrie der höh. algebr. Kurven (= Abhandlungen Heft XV)	
		Schülke, Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie und Stereometrie. geb.	2.20
		— vierstell. Logarithmentafeln. 4. Aufl. steif geb. — 60, geb. — 90	11
		Schuster, geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie.	
		Ausg. A (für Vollanstalten). 1. Teil: Planimetrie. . . geb.	2.—
		— — — — — 2. Teil: Trigonometrie. geb.	1.60
		— — — — — 3. Teil: Stereometrie. geb.	1.40
		Ausg. B (für Progymnasien und Realschulen) . . . geb.	1.60
		Ausg. C (für Mittelschulen) geb.	1.40
		Sellenthin, mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. geb.	8.40
		Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. III. Band, 1. Lieferung: Differentialgleichungen, hrsg. v. Bohlmann u. Zermelo. geb.	6.—
		Study, Geometrie der Dynamen. geb. 21.—, geb. 22.—	21
		Suter, Nachträge und Berichtigungen zu: „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke“ (in Abhandlungen Heft XIV) geb.	22
		Weber u. Wellstein, Encyclopädie der Elementar-Mathematik. Band I. geb.	2.—

H. Schuster, H. Sellenthin, A. Sommerfeld, F. H. S. W. Wirtz, F. Wittenbauer, E. Wolfing.

	<i>M. J.</i>	<i>Seite</i>
Weinholdt, Leitfaden der analytischen Geometrie	1.60.	13
Wölffing, mathem. Bücherschatz. I. Teil: Reine Mathematik. (= Abhandlungen Heft XVI, 1)		24
Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. Aufl. 4 Bände. geh. 56.—, geb. 64.—		14
Einzel: I. Band: Allgem. Physik u. Akustik. geh. 12.—, geb. 14.—		14
II. Band: Wärme geh. 12.—, geb. 14.—		14
III. Band: Magnetismus und Elektrizität. geh. 18.—, geb. 20.—		14
IV. Band: Strahlung geh. 14.—, geb. 16.—		14
Zeuthen, Geschichte d. Mathematik im XVI u. XVII. Jahrh., deutsch von Meyer (= Abhandlungen Heft XVII)		24
Physik. (S. 29.)		
Blochmann, die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke	— .60.	32
Fischer, der naturwissenschaftl. Unterricht in England. geb.	3.60.	30
neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper	2.—	30
Kohlrausch, kleiner Leitfaden der prakt. Physik.	4.—	29
Lehrbuch der prakt. Physik	8.60.	29
Kühler, die Berechnung der Kessel- u. Gefäßwandungen. I. Teil. Malinat, Physik für deutsche Lehrerbildungsanstalten. geh. 5.60. geb.	6.40.	31
Richarz, neuere Fortschritte auf dem Gebiete d. Elektrizität. 2. Aufl.	1.50.	31, 32
Schenk, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Schreiber, die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. geh. 3.60, geb.	1.60. 4.20.	33 32
Naturwissenschaften. (S. 33.)		
Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissen- schaften. Mathem.-phys. Klasse. XXVII. Band, Nr. VII: Scheibner, sur Theorie des Legendre-Jacobischen Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$, insbesondere über zweiteilige komplexe Zahlen. II.	8.50.	36
XXVII. Band, Nr. VIII: Neumann, über die Maxwell- Hertzische Theorie. II.	8.50.	36
XXVII. Band, Nr. IX: Hayn, selenographische Koordin- naten. I.	2.—	36
XXVIII. Band, Nr. II: Neumann, über die Maxwell- Hertzische Theorie. III.	1.50.	36
XXVIII. Band, Nr. III: Zirkel, über Urausscheidungen in rheinischen Basalten.	3.—	36
Hayn, siehe Abhandlungen XXVII, 9.		
Kraepelin, Exkursionsflora für Nord- und Mitteld Deutschland. 5. Aufl.	4.—	33
Leitfaden f. d. botanischen Unterricht. 6. Aufl. geb.	1.20.	34
Naturstudien im Hause. 2. Aufl.	3.20.	44
Naturstudien im Garten.	3.60.	44
Naturstudien in Wald und Feld.	3.60.	44
Landsberg, Streifzüge durch Wald und Flur. 3. Aufl. geb.	5.—	44
Mühlberg, siehe Sammlung Heft 2.		
Müller u. Pilling, deutsche Schulflora. komplett geb.	24.—	43
(Auch in 4 Teilen à M. 5.80. Einzelne Tafeln 15 J., bei Bezug von mindestens 10 Exemplaren der gleichen Tafel 10 J.) Textbeilage zur Schulflora. geb. 3.—, geb.	5.—	43
Neumann, siehe Abhandlungen XXVII, 8 u. XXVIII, 2.		
Sammlung naturwissenschaftl.-pädagogischer Abhandlungen. Heft 1: Mühlberg, Zweck und Umfang des Unterrichts in der Naturgeschichte an höheren Mittelschulen.	1.20.	34
Heft 2: Schlee, Schülerübungen i. d. element. Astronomie.	— .50.	35
Heft 3: Schoenichen, die Abstammungslehre im Unter- richte der Schule	1.20.	35
Scheibner, siehe Abhandlungen XXVII, 7.		
Schlechtendal, die Gliederfüßer mit Anschluß d. Insekten.	2.40.	42

W. S. g. u.

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wi
18, S. 535. 1881.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 49. Band. 1903. 3. u. 4. Heft.

19

89


sen
lie
ds-
ng
me
na
en
en
en,
ar-
las
ch
lie
eit
bei
nd
be-
ng
he

zu
ds.
ge-
p,
so

<i>Zur Ansicht</i>	<i>Zum Kauf</i>		
			M. 1
Schlechtendal u. Wünsche, die Insekten. 3. Abt.			9.60
<i>Einzeln:</i> I. Abt.: Käfer und Hautflügler			3.60
II. Abt.: Schmetterlinge und Fliegen			3.60
III. Abt.: Netz-, Gerad- und Halbflügler			2.40
Schlee, siehe Sammlung Heft 3.			
Schoenichen, siehe Sammlung Heft 3.			
Wünsche, d. verbreitetsten Pflanzen Deutschlands. 4. Aufl. geb.		3.-	
— d. verbreitetsten Käfer Deutschlands. geb.		3.-	
— d. verbreitetsten Pilze Deutschlands. geb.		1.40	
— d. Pflanzen des Königreichs Sachsen und der angrenzenden Länder. 8. Aufl. geb.		4.50	
— d. niederen Pflanzen geb.		4.60	
— d. höheren Pflanzen Deutschlands. 8. Aufl. geb.		5.-	
— Tabellen zum Bestimmen der Pflanzen		-25	
— d. Alpenpflanzen. 3. Ausg. geb.		3.-	
— d. höheren Kryptogamen Deutschlands		1.00	
— d. Pilze.		4.40	
— Filices Saxonicae. 3. Aufl.		-60	
Zirkel, siehe Abhandlungen XXVIII, 3.			
<u>Zeitschriften. (S. 26.)</u>			
Archiv der Mathematik u. Physik. III. Reihe. 5.—6. Bd. je 14.—			
Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sachs. Gesellsch. der Wissenschaften. Mathem.-phys. Klasse.			
54. Band (1902) III		2.80	
— IV		1.40	
— V		1.50	
— VI		1.-	
— VII		-75	
55. Band (1903) I		3.50	
— II		1.20	
— III		1.-	
Bibliotheca Mathematica. III. Folge. 3. u. 4. Band. je 20.—			
Geographische Zeitschrift. 8. Jahrg. (1902) halbjährlich 9.—			
9. Jahrg. (1903). halbjährlich 10.—			
Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 11. Bd. 12. Band		18.—	
Mathematische Annalen. 56. u. 57. Band		je 20.—	
Natur und Schule. 1. u. 2. Jahrgang (1903 u. 1905)		je 12.—	
Sitzungsberichte d. Berliner Math. Gesellsch. 2. Jahrg. (1903) 1. u. 2. Stück		je 12.—	
Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 47. u. 48. Band		je 20.—	
Zeitschrift f. mathem. u. naturw. Unterricht. 33. u. 34. Jahrg. (1902 u. 1903)		je 12.—	

Unterschrift:

Ort, Datum und Wohnung:

 Zu etwaiger Bestellung eines oder des anderen der in der vorliegenden Nummer der **Teubnerschen Mittheilungen** angezeigten Bücher, sei es zum Kauf oder nur zur Einsichtnahme, bitte ich die vorliegenden Bestellzettel bedienen und denselben einer Sortimentsbuchhandlung, mit deren Mehrzahl ich sowohl im In- als auch im Auslande in Verbindung stehe, zur Ausführung übergeben zu wollen. Jede Sortimentsbuchhandlung wird das Gewünschte entweder sofort vorlegen oder in kürzester Zeit beschaffen können. Meine geschäftlichen Einrichtungen erlauben mir nicht, meinen Verlag unmittelbar ans Publikum zu liefern.

B. G. Teubner.

French, L. v. Marikau
 1870, 1871, 1872, 1873, 1874, 1875, 1876, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910, 1911, 1912, 1913, 1914, 1915, 1916, 1917, 1918, 1919, 1920, 1921, 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1930, 1931, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937, 1938, 1939, 1940, 1941, 1942, 1943, 1944, 1945, 1946, 1947, 1948, 1949, 1950, 1951, 1952, 1953, 1954, 1955, 1956, 1957, 1958, 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549,

Witz, F. Wittenbauer, E. Wolfang.

Über die Spannungscurve gesättigter Dämpfe.

Von L. GRAETZ in München.

1. Um den Zusammenhang zwischen dem Druck P des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit und der Temperatur zu finden, gibt die mechanische Wärmetheorie bekanntlich einen Weg, falls die Zustandsgleichung des Körpers bekannt ist. Man kann dann durch Anwendung des zweiten Hauptsatzes auf die theoretische und wirkliche Isotherme drei Gleichungen erhalten, welche P , ferner die spezifischen Volumina v und σ des gesättigten Dampfes und der Flüssigkeit, als Funktionen der Temperatur zu ermitteln gestatten. Dieser Weg hat einerseits den Nachteil, daß bei Anwendung einer der bekannten Zustandsgleichungen, die Gleichungen derartige Formen erhalten, daß eine explizite Darstellung von P als $f(T)$ nicht möglich ist.¹⁾ Andererseits, und das ist noch schwerwiegender, ist ja eine genaue Zustandsgleichung noch nicht bekannt. Die Van der Waalssche Gleichung ebenso wie die Boltzmannsche enthält zwei Konstanten, welche aber in Wirklichkeit unbekannte Funktionen von Temperatur und Volumen sind, und bei den anderen Zustandsgleichungen, wie bei denen von Clausius, sind unbestimmte Temperaturfunktionen eingeführt, die in jedem Falle besonders bestimmt werden müssen. Da nun aber gerade die Ermittlung des P als Funktion der Temperatur verlangt wird, so machen solche unbekannte Temperaturfunktionen die ganze Methode unbrauchbar.

2. Eine zweite Methode, theoretisch die Dampfspannungskurve zu ermitteln, beruht auf der Anwendung des thermodynamischen Potentials. Bezeichnet man das thermodynamische Potential der Masseneinheit gesättigten Dampfes mit ψ , das der Masseneinheit der Flüssigkeit mit φ , wobei sowohl ψ als φ Funktionen von Druck und Temperatur sind, so ist die strenge Gleichung für die Dampfspannungskurve

$$(1) \quad \psi - \varphi = 0,$$

1) Planck, Wied. Ann. 14, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. Ann. 18, S. 535. 1881.

da nur unter dieser Bedingung die Flüssigkeit und ihr Dampf im Gleichgewicht sind. Die Bedeutung von ψ und φ ist nach der Definition des thermodynamischen Potentials

$$\psi = u - JTs + pv,$$

$$\varphi = w - JT\tau + p\sigma,$$

worin u und w die spezifischen Energien, s und τ die spezifischen Entropien des Dampfes und der Flüssigkeit sind und J die Joulesche Zahl bedeutet. Eine wirkliche Ausrechnung der Werte von ψ und φ und damit eine Darstellung der Gleichung der Dampfspannungskurve läßt sich leicht durchführen unter folgenden drei Voraussetzungen:

1) Die genaue Gültigkeit des Mariotte-Gay Lussacschen (MGL) Gesetzes für den gesättigten Dampf.

2) Die Vernachlässigung von σ gegen v .

3) Die Annahme der Konstanz der spezifischen Wärme c der Flüssigkeit.

Unter diesen Annahmen ist nämlich, wenn das MGL-Gesetz in der Form

$$pv = RT$$

geschrieben wird¹⁾,

$$u = H' + J\gamma T, \quad w = H + JcT,$$

worin γ die spezifische Wärme des Dampfes bei konstantem Volumen ist und H' und H Konstanten bedeuten, ferner

$$Js = RE' + J\gamma \log T + R \log v = RE' + (J\gamma + R) \log T - R \log \frac{p}{R},$$

$$J\tau = RE + Jc \log T,$$

worin RE' und RE zwei neue Konstante sind.

Daraus ergibt sich

$$\psi = H' + T(J\gamma - RE' + R) - T \log T(J\gamma + R) + TR \log \frac{p}{R},$$

$$\varphi = H + T(Jc - RE) - Jc T \log T,$$

und die Gleichung der Dampfspannungskurve wird, wenn man den Druck des gesättigten Dampfes mit P bezeichnet,

$$(2) \quad \log \frac{P}{R} = A' - \frac{B}{T} - C \log T,$$

1) S. wegen der Ableitung L. Graetz in Winkelmanns Handbuch der Physik II, 2, S. 441. 1. Aufl.

die bekannte Rankine-Dupr sche Formel. Darin haben die Konstanten A' , B , C folgende Bedeutung

$$\begin{aligned} A' &= (E' - E) + \frac{J(c - \gamma)}{R} - 1, \\ (3) \quad B &= \frac{H' - H}{R}, \\ C &= \frac{J(c - \gamma)}{R} - 1. \end{aligned}$$

Mithin ist $A' = (E' - E) + C$.

Unter derselben Annahme wird die Verdampfungswärme r der Flüssigkeit eine lineare Funktion der absoluten Temperatur; denn es ist

$$Jr = T(v - \sigma) \frac{dP}{dT} = RT^2 \frac{d \log P}{dT} = RB - RC \cdot T.$$

Es ist daher $H' - H$ gleich der Verdampfungswärme r_0 der Substanz beim Nullpunkt und $CR = J(c - \gamma) - R$ ist gleich der Abnahme, welche die Verdampfungswärme pro 1  C erfährt.

3. Die angeführten theoretischen Voraussetzungen lassen nun die Rankinesche Formel nur als eine Näherungsformel erscheinen, von der man nicht ohne weiteres sagen kann, wie weit ihre Gültigkeit sich erstreckt. Da das MGL-Gesetz vorausgesetzt ist, die gesättigten Dämpfe aber erfahrungsgemäß schon bei nicht zu hohen Drucken erhebliche Abweichungen von diesem Gesetz zeigen, so erscheint der Bereich der Gültigkeit der Formel hauptsächlich aus diesem Grunde als ziemlich geringfügig. Zwar kommen hierbei nicht diejenigen Abweichungen in Betracht, welche das Produkt pv auf einer Isotherme zeigt, Abweichungen, welche bekanntlich durch das Amagatsche Diagramm dargestellt sind und welche sich durch dieses mit einem Blick als sehr bedeutend erweisen. Vielmehr kommen hier, da zu jeder Temperatur nur ein Druck und das zugehörige Volumen ins Auge gefaßt werden, nur die Abweichungen in Frage, welche die Größe $\frac{Pv}{T}$ mit wachsenden Temperaturen zeigt. Aber auch diese sind erheblich genug. Nach den Beobachtungen nimmt der Wert von $\frac{Pv}{T}$, welcher bei Gültigkeit des MGL-Gesetzes konstant bleiben sollte, bei jeder Flüssigkeit zwischen der gewöhnlichen und der kritischen Temperatur auf die Hälfte bis ein Drittel seines Anfangswertes ab. So ist z. B. bei Wasser nach den Beobachtungen von Battelli bei 100  $\frac{Pv}{T} = 3362$, bei der kritischen Temperatur 364  aber $\frac{Pv}{T} = 1118$. Bei Alkohol ist

nach den Beobachtungen von Ramsay und Young bei 110° $\frac{Pv}{T} = 985,8$, bei der kritischen Temperatur $243,6^\circ$ aber $\frac{Pv}{T} = 426,6$. Bei Schwefelkohlenstoff ist nach Battelli für 0° $\frac{Pv}{T} = 809$, für die kritische Temperatur 270° aber $\frac{Pv}{T} = 269$. Und Abweichungen von derselben Größe sind bei allen Flüssigkeiten konstatiert. Nach der Gleichung von Van der Waals muß bekanntlich am kritischen Punkt $\frac{Pv}{T} = \frac{3}{8}$ sein, wenn es bei 0° gleich 1 gesetzt wird. Die angeführten Zahlen stimmen angenähert mit diesem Wert $\frac{3}{8}$ überein. Diese erheblichen Abweichungen vom MGL-Gesetz beschränken die Gültigkeit der Rankineschen Formel nur auf niedere Temperaturen und Drucke. Immerhin müßte eine genauere Diskussion zeigen, welche Abänderungen an dieser Formel anzubringen sind und welche Beträge diese erreichen, um den ganzen Verlauf der Dampfspannung bis zur kritischen Temperatur darzustellen. Die oben angeführte Ableitung aus dem thermodynamischen Potential erlaubt sofort eine genauere Untersuchung der betreffenden Kurve, wenn für den Dampf nicht das MGL-Gesetz, sondern das Van der Waalsche Gesetz zu Grunde gelegt wird, das ja in der Hauptsache das Verhalten aller Gase bis auf minder wichtige Einzelheiten zusammenfaßt.

4. Es soll also jetzt die obige Annahme 1 fallen gelassen werden, und statt des MGL-Gesetzes das Van der Waalssche Gesetz zu Grunde gelegt werden. Aber auch die Annahme 2 soll fallen gelassen werden. Während nämlich bei niederen Temperaturen σ unbedingt gegen v zu vernachlässigen ist, wird bei wachsender Temperatur σ immer größer, v immer kleiner, so daß der Fehler immer größer wird. Bei der kritischen Temperatur ist endlich σ gleich v , also die Vernachlässigung von σ durchaus nicht erlaubt. Wenn wir also für den Dampf die Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

als gültig annehmen, so ist zunächst die spezifische Energie u und die spezifische Entropie s desselben zu bilden. Man hat dazu die allgemeinen Formeln¹⁾

$$u = H' + J\gamma T + T^2 \int \frac{d}{dT} \left(\frac{p}{T} \right) dv,$$

$$Js = RE' + J\gamma \log T + \int \frac{\partial p}{\partial T} dv.$$

1) S. z. B. L. Graetz l. c. S. 441.

Da

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{p}{T}\right) = \frac{a}{T^2 v^2}, \quad \frac{dp}{dT} = \frac{R}{v-b}$$

ist, so wird

$$u = H' + J\gamma T - \frac{a}{v},$$

$$Js = RE' + J\gamma \log T + R \log(v-b).$$

Man ersieht übrigens daraus, daß von den beiden Konstanten a und b , welche in der Van der Waalsschen Formel vorkommen, nur die eine a in dem Ausdruck für die Energie und nur die andere b in dem Ausdruck für die Entropie vorkommt. So wie man a die Druck- und b die Volumenkonstante des Van der Waalsschen Gesetzes genannt hat, so könnte man sie auch als Energie- und Entropiekonstanten unterscheiden.

Das thermodynamische Potential des Dampfes wird daher

$$\psi = H' + (J\gamma - RE')T - J\gamma T \log T - \frac{a}{v} - RT \log(v-b) + pv.$$

Das thermodynamische Potential der Flüssigkeit ist

$$\varphi = H + (Jc - RE)T - Jc T \log T + p\sigma$$

und die Gleichung

$$\psi - \varphi = 0$$

wird also

$$P(v-\sigma) - RT \log(v-b) - \frac{a}{v} = -(H' - H) + T[J(c-\gamma) + R(E' - E)] \\ - T \log T(J(c-\gamma)).$$

Nach unserer obigen Bezeichnung (3) wird also

$$P(v-\sigma) - RT \log(v-b) - \frac{a}{v} = -BR + R(A' + 1)T - R(C + 1)T \log T.$$

Wir führen hier nach der Van der Waalsschen Gleichung ein:

$$Pv = RT + Pb - \frac{a}{v} + \frac{ab}{v^2}, \\ v - b = \frac{RT}{P\left(1 + \frac{a}{Pv^2}\right)}.$$

Dann wird nach Division durch RT

$$\log \frac{P}{R} + \log\left(1 + \frac{a}{Pv^2}\right) - \frac{P(\sigma-b)}{RT} - \frac{2a}{vRT} + \frac{ab}{v^2RT} = A' - \frac{B}{T} - C \log T.$$

Diese Formel ist noch ganz streng. Um sie zur praktischen Benutzbarkeit gerecht zu machen, vernachlässigen wir die Glieder, welche die Produkte und Quadrate der Korrekptionsgrößen a und b enthalten. Indem wir ferner entwickeln

$$Pv^3 = \frac{R^3 T^3}{P} + 2bRT - 2a \frac{RT}{P^2},$$

$$\log \left(1 + \frac{a}{Pv^3} \right) = \log \left(1 + \frac{aP}{R^3 T^3} \right),$$

$$\frac{2a}{vRT} = \frac{2aP}{R^3 T^3},$$

erhalten wir

$$\log \frac{P}{R} + \log \left(1 + \frac{aP}{R^3 T^3} \right) - \frac{P(\sigma - b)}{RT} - \frac{2aP}{R^3 T^3} = A' - \frac{B}{T} - C \log T.$$

Nun nimmt die Größe $\frac{aP}{R^3 T^3}$ von einem sehr kleinen Wert, den sie bei niedrigen Drucken besitzt, mit wachsendem Druck zu bis zu dem Maximalwert $\frac{27}{64}$ am kritischen Punkt. Denn führen wir die reduzierten Drucke ε und Temperaturen m ein, indem wir setzen $P = \varepsilon \pi$, $T = m\vartheta$, wo π , ϑ kritischen Druck und Temperatur bedeuten ($\pi = \frac{1}{27} \frac{a}{b}$, $R\vartheta = \frac{8}{27} \frac{a}{b}$), so wird $\frac{aP}{R^3 T^3} = \frac{\varepsilon}{m^3} \frac{27}{64}$, also am kritischen Punkt ($\varepsilon = 1$, $m = 1$) gleich $\frac{27}{64}$. In diesem Intervall ist daher

$$\log \left(1 + \frac{aP}{R^3 T^3} \right) - \frac{2aP}{R^3 T^3} = - \frac{aP}{R^3 T^3},$$

und unsere Formel wird

$$\log \frac{P}{R} - \frac{aP}{R^3 T^3} - \frac{P(\sigma - b)}{RT} = A' - \frac{B}{T} - C \log T.$$

Die einfache Rankinesche Formel erfordert also eine Korrektion. Um zu ermitteln, wie groß die Korrektion im Maximum ist, berechnen wir sie für den kritischen Punkt. Für diesen ist $\frac{aP}{R^3 T^3}$, wie oben ausgeführt, gleich $\frac{27}{64}$, das zweite Glied $\frac{P(\sigma - b)}{RT}$ wird am kritischen Punkt, da dort $\sigma = v = 3b$ ist, gleich $\frac{2b\pi}{R\vartheta} = \frac{1}{4}$. Die beiden Korrekturen geben also im Maximum den Wert $-\frac{43}{64}$. (Dabei ist als Volumeneinheit das Volumen der Masseneinheit des Dampfes bei 0° und dem Einheitsdruck genommen.) Man sieht sofort, daß der Einfluß der Korrektion um so geringer werden wird, je höher der kritische Druck der Substanz ist. Da die Abhängigkeit des σ von der Temperatur nicht bekannt ist, so

könnte man σ in erster Annäherung konstant setzen. Geringer wird der Fehler noch und zugleich wird die Formel vereinfachter durch folgende Betrachtung. Da $R\vartheta = \frac{8}{27} \frac{a}{b}$ ist, so ist

$$\frac{a}{RT} = \frac{27}{8} b \frac{\vartheta}{T} = \frac{27}{8} b \left(1 + \frac{\vartheta - T}{T}\right),$$

also

$$\frac{aP}{R^2 T^2} + \frac{P(\sigma - b)}{RT} = \frac{P}{RT} \left(\sigma - b + \frac{27}{8} b \left(1 + \frac{\vartheta - T}{T}\right)\right).$$

In dieser Klammer, die im ganzen selbst nur eine Korrektur vorstellt, wächst σ mit steigender Temperatur, während $\frac{27}{8} b \left(1 + \frac{\vartheta - T}{T}\right)$ mit steigender Temperatur abnimmt. Wir können deshalb diese Klammer als eine Konstante f einführen (genauer wird die Klammer mit wachsender Temperatur kleiner werden) und die Gleichung unserer Kurve wird

$$\log \frac{P}{R} - \frac{fP}{RT} = A' - \frac{B}{T} - C \log T$$

oder $\left(A' + \log R = A, \frac{f}{R} = \delta \text{ gesetzt}\right)$

$$(4) \quad \log P - \delta \frac{P}{T} = A - \frac{B}{T} - C \log T.$$

Die Rankinesche Formel lautet, wenn man zu den Numeri übergeht

$$(5) \quad P = \frac{ae^{-\frac{B}{T}}}{T^C},$$

während die vervollkommnete Formel, zu der wir gelangt sind, heißt

$$(6) \quad Pe^{-\delta \frac{P}{T}} = \frac{ae^{-\frac{B}{T}}}{T^C}.$$

Da δ eine sehr kleine Zahl ist, so weicht $e^{-\delta \frac{P}{T}}$ erst bei hohen Drucken merklich von 1 ab, während bei niederen Drucken die Rankinesche Formel bestehen bleibt. Will man P explicite durch T darstellen, so ist angenähert, aber nicht genau

$$\log P = A - \frac{B}{T} - C \log T + \delta \frac{e^{\frac{A - \frac{B}{T}}{T^C + 1}}}{T^C + 1}.$$

5. Was den Vergleich dieser Formel mit den Beobachtungen betrifft, so ist zunächst zu erwähnen, daß von den drei Konstanten der Rankineschen Formel zwar A und B willkürliche Werte haben, daß

dagegen C durch die Natur der Substanz von vornherein bestimmt ist. Es ist nämlich

$$C = \frac{J(c-\gamma)}{R} - R,$$

und da R bekanntlich gleich $J(\gamma_p - \gamma)$ ist, worin γ_p die spezifische Wärme des Dampfes bei konstantem Druck ist, so wird

$$C = \frac{c - \gamma_p}{\gamma_p - \gamma}.$$

Die Rankinesche Formel enthält also nur *zwei* willkürliche Konstanten, und als solche ist sie auch für niedere Drucke vollständig brauchbar, wie insbesondere Hertz¹⁾ für den Quecksilberdampf gezeigt hat. Läßt man die dritte Konstante C auch unbestimmt, wodurch man nur die Form der Rankineschen Gleichung beibehält, ihre Bedeutung aber verändert, so kann man natürlich diese weitere Konstante so bestimmen, daß man in sehr viel größerem Intervall Anschluß an die Beobachtungen gewinnt. In der Tat hat Bertrand²⁾ für eine Anzahl von Flüssigkeiten durch diese dreikonstantige Formel eine Darstellung der Beobachtungen von Dampfspannungen in sehr weitem Bereich erzielt und Juliusburger³⁾, der sämtliche vorhandene Messungsreihen nach dieser Formel berechnete, fand, daß sie in 90% aller Fälle die Beobachtungen, bei denen keine Dissoziationen stattfinden, im ganzen Verlauf, sogar bis zur kritischen Temperatur darstellt. In der oben abgeleiteten genauen Formel (4) oder (6) hat die Konstante C genau den von der Theorie vorgeschriebenen Wert $\frac{c - \gamma_p}{\gamma_p - \gamma}$. Die Formel enthält also *drei* willkürliche Konstanten A , B und δ , und es war nach der Ableitung zu erwarten, daß sie auch den Beobachtungen sich gut anschließt. Die Konstante δ ist dabei im wesentlichen aus den Beobachtungen bei hohen Temperaturen zu entnehmen, da das mit ihr behaftete Glied bei niederen Temperaturen keine Rolle spielt. Ich habe so die Beobachtungen von Cailletet und Colardeau⁴⁾ am Wasserdampf, bei denen die Drucke in mm-Hg ausgedrückt sind, mit dem Wert $C = 4,717$ berechnet. Die Konstanten wurden $A = 22,8843$, $B = 2936,6$, $\delta = 0,0005547$, und die Formel stellte die Drucke bis auf 1–2% dar. Die maximale Abweichung von den Beobachtungen beträgt 1,8%. Durch genauere Berechnung der Konstanten A , B , δ

1) H. Hertz, Wied. Annal. 17 p. 193. 1882.

2) Bertrand, Thermodynamique p. 93. 1887.

3) Juliusburger, Drude Annal. 3 p. 618. 1900.

4) Cailletet u. Colardeau, Journ. de phys. (2) 10 p. 333. 1891.

nach kleinsten Quadraten würde sich der Anschluß noch enger gestalten lassen, doch liegen die Abweichungen auch so schon innerhalb der Beobachtungsfehler.

6. Eine nicht unbeträchtliche Ungenauigkeit in der obigen Ableitung scheint darin zu liegen, daß die spezifische Wärme c der Flüssigkeit als konstant angesetzt wurde, während diese in Wirklichkeit mit steigender Temperatur nach den Beobachtungen wächst. Es ist aber zu bemerken, daß in den Ausdruck für die Energie und die Entropie der Masseneinheit einer verdampfenden Flüssigkeit streng genommen nicht die gewöhnliche spezifische Wärme c bei konstantem Druck eingeht, sondern diejenige spezifische Wärme c' , welche die Flüssigkeit besitzt, wenn sich bei der Temperatursteigerung zugleich der Druck so ändert, wie bei den gesättigten Dämpfen, das heißt, wenn die Veränderung der Flüssigkeit auf der sogenannten *linken Grenzkurve* vor sich geht. Diese Größe c' hängt nach einer bekannten Formel der mechanischen Wärmetheorie¹⁾ mit c so zusammen, daß

$$c' = c - T\alpha\sigma \frac{dP}{dT},$$

worin α der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit ist. Da $T \frac{dP}{dT}$ mit steigender Temperatur nicht unerheblich wächst, so ist die Zunahme von c' mit der Temperatur jedenfalls viel geringer als die von c , sie könnte sogar in eine Abnahme übergehen, und der Fehler, der durch Konstantsetzung des c entsteht, wird in den meisten Fällen unbedeutend sein. Man wird daher die Formel mit drei Konstanten

$$Pe^{-\frac{P}{T}} = \frac{ae^{-\frac{B_1}{T}}}{T^c}$$

als die theoretische Gleichung für die Dampfspannungskurve bis zur kritischen Temperatur anzusehen haben.

München, Juni 1903.

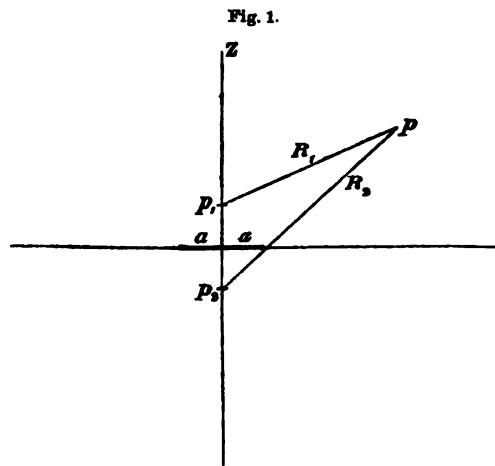
1) S. z. B. Graetz l. c. II b p. 474.

Ein Beitrag zur Theorie der Nobilischen Farbenringe.

Von RICHARD GANS in Tübingen.

Riemann¹⁾ hat die Erscheinung der Nobilischen Farbenringe theoretisch behandelt, ohne die Polarisation zu berücksichtigen, welche jedoch den Vorgang wesentlich modifiziert; berücksichtigt wurde dieselbe von H. Weber.²⁾ Später wurde von Róiti³⁾ eine Annahme gemacht, die von Volterra⁴⁾ theoretisch verfolgt worden ist.

Nach dieser Annahme ist der Vorgang folgender: Die Polarisation kann in einem gegebenen Falle nur bis zu einem gewissen Werte ansteigen; eine weitere Ablagerung der polarisierenden Substanz verändert den Wert der Polarisation nicht mehr.



Wird die Stärke des eintretenden Stroms konstant erhalten, so stellt sich bereits nach kurzer Zeit ein stationärer Zustand her. Auf einem Teile der Elektrodenplatte ist das Maximum der Polarisation erreicht, hier kann der Strom hindurchtreten, da neue Ablagerung keine Veränderung mehr be-

wirkt; an den Stellen jedoch, wo das Maximum der Polarisation noch nicht erreicht ist, darf kein Strom in die Elektrodenplatte eintreten, da sonst die Polarisation noch steigen würde und der Vorgang eben noch nicht stationär wäre.

Diese Bedingungen sollen jetzt in einem speziellen Falle formuliert werden.

1) B. Riemann, Werke S. 55.

2) H. Weber, Crelles Journal Bd. 75, 1872.

3) Nuovo Cimento vol. X.

4) Atti della R. Accademia di Torino vol. XVIII, 1882/83.

Auf einer unendlichen Metallplatte, deren obere Grenze die xy -Ebene sein möge, befinde sich eine Salzlösung von unendlicher Höhe. Aus einer punktförmigen Elektrode, welche im Abstand c von der Platte sich befindet, trete der konstant gehaltene Strom j aus. Auf der Platte bildet sich dann ein Kreis vom Radius a , in dessen Innern die Polarisierung ihren Maximalwert $-E$ erreicht hat. Bezeichnet φ das Potential, so muß außerhalb des Kreises $\partial\varphi/\partial z = 0$ sein.

Im Unendlichen enden keine Stromlinien, sondern alle von der Elektrode ausgehenden Stromlinien münden auf der Platte in einem Kreise vom Radius a , d. h. im Unendlichen verschwindet φ wie $1/R^2$.

Es ergibt sich also folgende Formulierung des Problems:

- (1) $\Delta\varphi = 0$ für $z > 0$,
- (2) $\varphi = \frac{j}{4\pi\lambda R_1} + \text{funct. cont.}$ in p_1 ,
- (3) $\varphi = -E$ für $z = 0$ und $r < a$,
- (4) $\partial\varphi/\partial z = 0$ für $z = 0$ und $r > a$,
- (5) $R_1\varphi = 0$ im Unendlichen.

Diese Aufgabe kann durch eine etwas andere ersetzt werden, bei der die Flüssigkeit den ganzen unendlichen Raum erfüllt. Im Punkte p_1 (vgl. Fig. 1) fügen wir eine punktförmige Elektrode von derselben Stromstärke j hinzu und bestimmen φ so, daß im ganzen Raume:

- (1a) $\Delta\varphi = 0$,
- (2a) $\varphi = \frac{j}{4\pi\lambda R_1} + \text{funct. cont.}$ in p_1 ,
 $\varphi = \frac{j}{4\pi\lambda R_2} + \text{funct. cont.}$ in p_2 ,
- (3a) $\varphi = -E$ für $z = 0$ und $r < a$,
- (5a) $R\varphi = 0$ im Unendlichen.

(4) wird aus Symmetriegründen von selbst erfüllt. Für positive z stimmt diese Lösung mit der durch die ursprüngliche Aufgabe geforderten Funktion überein.

Das Problem ist mathematisch identisch mit folgendem elektrostatischen: Das Potential ist zu bestimmen, wenn in den Punkten p_1 und p_2 je die elektrische Menge $e = \frac{j}{4\pi\lambda}$ und auf einer Kreisscheibe vom

Radius a , zu welcher p_1 und p_2 symmetrisch liegen, die Menge $-2e$ sich befindet.

In unserem Falle ist E gegeben, und daraus bestimmt sich der unbekannte Radius a .¹⁾

Wir lösen die elektrostatische Aufgabe für ein verlängertes Rotationsellipsoid, gehen dann zum abgeplatteten über und fassen die Kreisscheibe als Grenzfall des abgeplatteten Rotationsellipsoids auf.

Durch folgende Substitutionen führen wir krummlinige Koordinaten ein:

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{\varrho^2 - 1} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \\ y &= a\sqrt{\varrho^2 - 1} \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \\ z &= a \varrho \mu. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Flächen $\varrho = \text{const.}$ sind eine Schar konfokaler verlängerter Rotationsellipsoide mit der Exzentrizität a , die Flächen $\mu = \text{const.}$ sind die hierzu orthogonale Schar konfokaler Rotationshyperboloide. Die Oberfläche des gegebenen Ellipsoids sei durch den Parameter $\varrho = \varrho_1$ gegeben.

Wir setzen

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (7)$$

und

$$\varphi_1 = \frac{e}{R_1} + \frac{e}{R_2}, \quad (8)$$

also wird durch Entwicklung nach Kugelfunktionen:

$$\varphi_1 = \frac{e}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\varrho) Q_n(\varrho_1) P_n(\mu) [P_n(1) + P_n(-1)] \text{ für } \varrho < \varrho_1, \quad (9)$$

wo $P_n(x)$ die Kugelfunktion erster Art und n . Ordnung, $Q_n(x)$ die Kugelfunktion 2. Art und n . Ordnung bedeutet.²⁾

Nun ist aber³⁾:

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1, \\ P_n(-1) &= (-1)^n, \end{aligned} \quad (10)$$

1) Wegen des Vorigen, insbesondere wegen der Formulierung des Problems, siehe H. Weber, Die part. Differentialgl. der math. Phys. Bd. 1, § 180, 1900.

2) cf. z. B. C. Neumann, Vorles. über die Theorie des Pot. u. d. Kugelfunct. Kap. XIV S. 341, 1887.

3) cf. z. B. C. Neumann, ibid. Kap. II S. 32.

also wird:

$$(11) \quad \varphi_1 = \frac{e}{a} \sum_{\nu=0}^{\infty} (4\nu+1) P_{2\nu}(\rho) P_{2\nu}(\mu) Q_{2\nu}(\rho_1) \quad \text{für } \rho < \rho_1.$$

Wegen (1a) und (7) muß φ_2 folgende Form haben:

$$(12) \quad \varphi_2 = \frac{e}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n Q_n(\rho) P_n(\mu).$$

Aus der Bedingung, daß $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ für $\rho = \rho_0$ konstant sein soll, ergibt sich, daß der Koeffizient von $P_n(\mu)$ in der Reihe für φ verschwinden muß, d. h. für alle ungeraden n ist

$$A_n = 0,$$

und es ist

$$(13) \quad A_{2\nu} = - \frac{P_{2\nu}(\rho_0) Q_{2\nu}(\rho_1)}{Q_{2\nu}(\rho_0)} \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3, \dots \infty$$

Aus der Angabe, daß die Elektrizitätsmenge auf dem Ellipsoid $-2e$ sein soll, ergibt sich

$$(14) \quad A_0 = -1$$

mit Hilfe der Formel

$$Q_0(\rho) = \lg \frac{\rho+1}{\rho-1},$$

welche sich als Spezialfall aus dem Neumannschen Integral

$$Q_n(\rho) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(u) du}{\rho - u}$$

ergibt, wenn man berücksichtigt, daß $P_0(u) = 1$ ist.

Also ist

$$(15) \quad \varphi_2 = - \frac{e}{a} \sum_{\nu=1}^{\infty} (4\nu+1) \frac{P_{2\nu}(\rho_0) Q_{2\nu}(\rho_1)}{Q_{2\nu}(\rho_0)} Q_{2\nu}(\rho) P_{2\nu}(\mu) - \frac{e}{a} Q_0(\rho).$$

Gehen wir zum abgeplatteten Rotationsellipsoid über, so haben wir zu ersetzen a durch $\frac{a}{i}$ und ρ durch $i\sigma$, denn die Substitutionsgleichungen lauten für dieses

$$(16) \quad \begin{aligned} x &= a\sqrt{\sigma^2+1} \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, \\ y &= a\sqrt{\sigma^2+1} \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi, \\ z &= a\sigma\mu, \end{aligned}$$

und es wird

$$(15a) \quad \varphi_2 = -\frac{ei}{a} \sum_{\nu=1}^{\infty} (4\nu+1) \frac{P_{2\nu}(i\sigma_0) Q_{2\nu}(i\sigma_1)}{Q_{2\nu}(i\sigma_0)} Q_{2\nu}(i\sigma) P_{2\nu}(\mu) - \frac{ei}{a} Q_0(i\sigma).$$

Um den Wert von φ_2 zu erhalten für den Fall, daß das Ellipsoid in eine Kreisscheibe übergeht, muß man $\sigma_0 = 0$ werden lassen.

Nun ist aber:

$$P_{2\nu}(0) = \frac{(-1)^\nu \Pi(2\nu)}{2^{2\nu} \Pi(\nu)^2}$$

und

$$Q_{2\nu}(0 \cdot i) = \frac{(-1)^\nu \Pi(2\nu)}{2^{2\nu} \Pi(\nu)^2} \frac{\pi}{i}.$$

So ergibt sich

$$(17) \quad \varphi_2 = \frac{e}{a\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} (4\nu+1) Q_{2\nu}(i\sigma_1) Q_{2\nu}(i\sigma) P_{2\nu}(\mu) - \frac{ei}{a} Q_0(i\sigma),$$

oder

$$(18) \quad \varphi_2 = \frac{e}{a\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (4\nu+1) Q_{2\nu}(i\sigma_1) Q_{2\nu}(i\sigma) P_{2\nu}(\mu) - \frac{e}{a\pi} Q_0(i\sigma) [Q_0(i\sigma_1) + i\pi],$$

oder da

$$i Q_0(i\sigma) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma,$$

wo $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma < \frac{\pi}{2}$ ist¹⁾,

$$(19) \quad \varphi_2 = \frac{e}{a\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (4\nu+1) Q_{2\nu}(i\sigma_1) Q_{2\nu}(i\sigma) P_{2\nu}(\mu) - \frac{2e}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma + \frac{4e}{a\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma_1.$$

Lassen wir in Formel (19) die Punkte p_1 und p_2 ins Unendliche rücken und setzen wir $-2e = M$, so erhalten wir das Potential einer mit der Elektrizitätsmenge M geladenen Kreisscheibe.

Da in diesem Falle $\varphi_1 = 0$ wird, so haben wir

$$(20) \quad \varphi = \frac{M}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma.$$

Nun ist aber nach (16)

$$(16) \quad r = a\sqrt{\sigma^2 + 1} \sqrt{1 - \mu^2}, \\ z = a\sigma\mu.$$

1) cf. z. B. E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen, 2. Aufl. 1878, Bd. 1 S. 12.

2) cf. z. B. E. Heine, ibid. S. 133. (Wir haben mit Neumann die Funktion Q definiert; dieselbe ist doppelt so groß als die von Heine mit Q bezeichnete Funktion, also ändern sich alle aus Heine entnommenen Formeln dementsprechend.)

3) cf. z. B. E. Heine, ibid. S. 162.

Daraus ergibt sich:

$$(21) \quad \sigma = \sqrt{\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2}} + \sqrt{\left(\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2}\right)^2 + \frac{z^2}{a^2}},$$

wo beide Wurzeln mit dem positiven Zeichen verstanden sind.

Also ist

$$(22) \quad \varphi = \frac{M}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2}} + \sqrt{\left(\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2}\right)^2 + \frac{z^2}{a^2}} < \frac{M}{a} \frac{\pi}{2}.$$

Für $z = 0$. wird

$$(23) \quad \varphi = \frac{M}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{r^2 - a^2}{2a^2} \pm \frac{r^2 - a^2}{2a^2}},$$

wo das obere resp. untere Zeichen gilt, je nachdem $r \geq a$ ist; es ist also

$$(24) \quad \varphi = \frac{M}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} = \frac{M}{a} \operatorname{arc} \sin \frac{a}{r} \quad \text{für } r > a,$$

$$(25) \quad \varphi = \frac{M}{a} \frac{\pi}{2} \quad \text{für } r < a.$$

Somit ist der von H. Weber¹⁾ gefundene Ausdruck für das Potential

$$\varphi = \frac{M}{a} \int_0^\infty e^{-\alpha z} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} J_0(\alpha r) d\alpha,$$

wo J_0 die Besselsche Funktion 0-ter Ordnung und erster Art bedeutet, auf die Formel (22) zurückgeführt, d. h. auf keine höhere Transszendente als den $\operatorname{arc} \operatorname{ctg}$, sodaß die numerische Berechnung des Potentials sich sehr einfach bewerkstelligen läßt.

Um im allgemeinen Fall, wo p_1 und p_2 im Endlichen liegen, nicht zu komplizierte Formeln zu bekommen, wollen wir das Potential nur für die xy -Ebene berechnen, da nur dieses für unser ursprüngliches Problem von Interesse ist.

Wir haben also $\mu = 0$ zu setzen.

Für $Q_{2,}(i\sigma)$ führen wir das Neumannsche Integral in folgender Form ein²⁾:

$$Q_{2,}(i\sigma) = - \int_{-i}^{+i} \frac{P_{2,}(iv)}{\sigma - v} dv,$$

1) H. Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. 1. S. 329. 1900.

2) cf. z. B. E. Heine, ibid. S. 141.

dann wird:

$$(26) \quad \varphi_2 = -\frac{e}{a\pi} \int_{-i}^{+i} \frac{dv}{\sigma-v} \sum_{\nu=0}^{\infty} (4\nu+1) Q_{2\nu}(i\sigma_1) P_{2\nu}(iv) \frac{(-1)^\nu \Pi(2\nu)}{2^{2\nu} \Pi(\nu)^2} \\ - \frac{2e}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma + \frac{4e}{a\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma_1.$$

Nennen wir den Abstand des Punktes mit den Koordinaten $\sigma=v$; $\mu=0$ vom Punkte p_1 oder p_2 R , so ist

$$\frac{i}{a} \sum_{\nu=0}^{\infty} (4\nu+1) Q_{2\nu}(i\sigma_1) P_{2\nu}(iv) \frac{(-1)^\nu \Pi(2\nu)}{2^{2\nu} \Pi(\nu)^2} = \frac{2}{R} = \frac{2}{\sqrt{e^2+c^2}},$$

wenn ρ den Abstand des Punktes $\sigma=v$; $\mu=0$ vom Koordinatenursprung bedeutet.

Also wird:

$$(27) \quad \varphi_2 = \frac{ei}{\pi} \int_{-i}^{+i} \frac{dv}{\sigma-v} \frac{2}{\sqrt{e^2+c^2}} - \frac{2e}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma + \frac{4e}{a\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sigma_1.$$

Nun ist aber nach (16)

$$(28) \quad \begin{aligned} \rho^2 &= a^2(1+v^2), \\ \sigma &= \sqrt{\frac{r^2-a^2}{a^2}}, \\ \sigma_1 &= \frac{c}{a}, \end{aligned}$$

wenn r den Abstand des Punktes σ ; $\mu=0$ vom Koordinatenursprung bedeutet; also

$$(29) \quad \begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{2ei}{\pi} \int_{-i}^{+i} \frac{dv}{\sigma-v} \frac{1}{\sqrt{a^2(1+v^2)+c^2}} - \frac{2e}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} \\ &\quad + \frac{4e}{a\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Durch Ausführung der Quadratur und Addition von φ_1 erhalten wir:

$$(30) \quad \begin{aligned} \varphi &= \frac{2e}{\sqrt{r^2+c^2}} - \frac{4e}{\pi\sqrt{r^2+c^2}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r^2-a^2}{r^2+c^2}} - \frac{2e}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} \\ &\quad + \frac{4e}{a\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß Formel (30), die nur abgeleitet ist für $\sigma < \sigma_1$, auch für $\sigma > \sigma_1$ gilt, also in der ganzen xy -Ebene besteht.

Um das Potential innerhalb des Kreises mit dem Radius a zu erhalten, setzen wir $r = a$; dann ergibt sich:

$$(31) \varphi_0 = -\frac{2e}{a} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc ctg } \frac{c}{a} \right).$$

Für das Problem der Nobilischen Farbenringe ist

$$\varphi_0 = -E,$$

$$e = \frac{j}{4\pi\lambda},$$

also

$$-E = -\frac{j}{2\pi\lambda a} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc ctg } \frac{c}{a} \right),$$

wo $\text{arc ctg } \frac{c}{a} < \frac{\pi}{2}$ ist, oder

$$E = \frac{j}{2\pi\lambda a} \text{arc tg } \frac{c}{a},$$

wo $\text{arc tg } \frac{c}{a} < \frac{\pi}{2}$ ist.

Daraus folgt die transzendente Gleichung zur Bestimmung von a

$$(32) \quad \frac{a}{c} = \text{ctg } \frac{2\pi\lambda E a}{j}, \text{ wo } \frac{2\pi\lambda E a}{j} < \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

Setzen wir $\frac{2\pi\lambda E a}{j} = x$, so wird

$$(33) \quad \frac{j}{2\pi\lambda E c} x = \text{ctg } x, \text{ wo } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Es handelt sich also darum (s. Fig. 2), den Schnittpunkt der Geraden

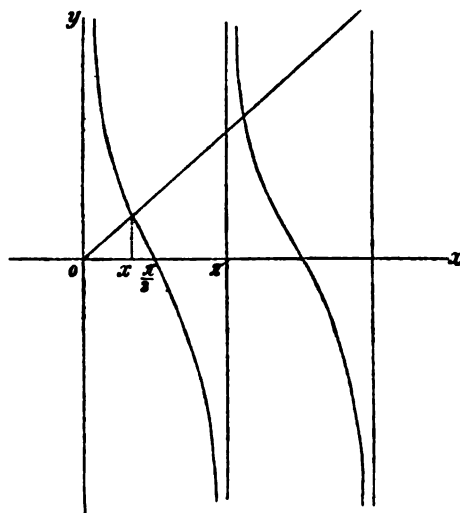
$$y = \frac{j}{2\pi\lambda E c} x$$

und des ersten Astes der Kurve

$$y = \text{ctg } x$$

auf der Seite der positiven x zu bestimmen. Daraus folgt, daß a eindeutig gegeben ist.

Fig. 2.



Über ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Form empirisch ermittelter Kurven.

Von FRANZ BERGER in Wien.

Der Ingenieur und insbesondere der Elektrotechniker kommt häufig in die Lage, den gesetzmäßigen Verlauf der Änderung einer Größe y als Funktion einer anderen Größe x , also die Gleichung

$$y = f(x)$$

graphisch darstellen zu müssen durch Ermittlung einzelner Punkte nach irgend einem Meßverfahren (Charakteristiken von Maschinen, magnetische Untersuchung von Eisensorten etc.). Die so erhaltenen Kurven haben entweder den Zweck, den Verlauf einer Funktion im allgemeinen zu zeigen, oder sie sollen, falls der mathematische Ausdruck des Gesetzes, die Gleichung $y = f(x)$, unbekannt oder überhaupt nicht angebbar ist, die Gleichung selbst ersetzen. Man entnimmt in diesem Falle die Größe *einer* Koordinate für eine gegebene Größe der *anderen* der Kurve durch Abmessen (graphische Interpolation).

Dies setzt selbstverständlich voraus, daß der Kurvenzug mit solcher Genauigkeit festgelegt sei, daß der durch Abmessung daraus erhaltene Wert mit keinem größeren Fehler behaftet sei, als mit Rücksicht auf den praktischen Zweck noch zulässig ist. Diese Forderung wird nicht immer leicht zu erfüllen sein. Zweck des nachfolgend erläuterten Näherungsverfahrens ist es nun, diese Aufgabe zu erleichtern und eine einfache Methode anzugeben, nach der die wahrscheinlich richtigste Form einer aus mehreren (mit unvermeidlichen Fehlern behafteten) Beobachtungen gebildeten Kurve näherungsweise ermittelt werden kann. Das Ziehen der Kurven geschieht meist mit freier Hand „nach dem Gefühl“. Dieses Gefühl, bei dem die persönliche Gleichung des Beobachters eine große Rolle spielt, soll tunlichst durch ein mathematisches Verfahren ersetzt oder doch unterstützt werden.

Von der Anwendung des Verfahrens sind von vornherein auszuschließen:

1. *Statistische Kurven*, bei denen es darauf ankommt, ein genaues Bild des Verlaufes der in Betracht kommenden Größen (z. B. Stromabgabestatistik einer Zentrale, Warenumsatz etc.) zu erhalten. In diesem Falle kann von einer „Kurve“ im eigentlichen Sinn des Wortes nicht die Rede sein. Man wird die den Beobachtungen (die als genau bekannte Zahlen vorliegen) entsprechenden Punkte durch Gerade verbinden und kann die so erhaltene, gebrochene Linie durch Summierung der Ordinaten oder die von ihr und der Abscissenachse gebildete Fläche beliebig weiter verwerten.

Handelt es sich jedoch darum, ein allgemeines Bild des Steigens oder Fallens der betreffenden Größe (der Stromabgabe, des Warenumsatzes etc.) zu gewinnen, dann wird das Verfahren mit Vorteil Anwendung finden.

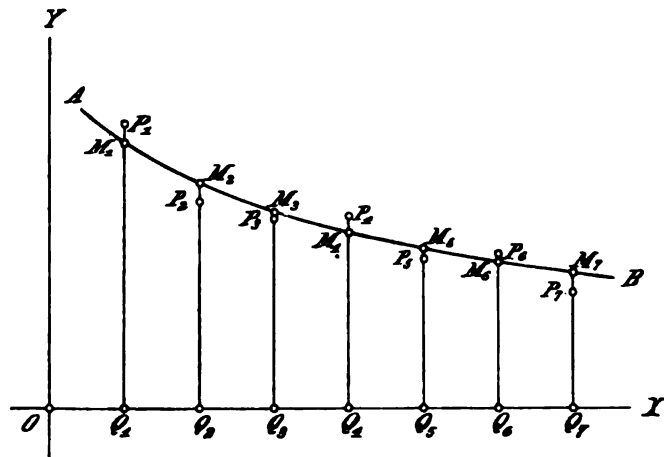
2. In manchen Fällen können die veränderlichen Größen leicht mit solcher Genauigkeit festgehalten werden, d. h. die Ordinaten können in beliebiger Zahl für jede gegebene Abscisse so sicher bestimmt werden, daß beim Auftragen der gefundenen Punkte ein Zweifel über den Verlauf der Kurve gar nicht möglich ist. Man braucht in diesem Falle nur die aufeinander folgenden Punkte durch eine elastische Linie zu verbinden, um die gesuchte Kurve mit genügender Genauigkeit zu erhalten. In diesem Falle ist natürlich ein Näherungsverfahren überflüssig.

Dagegen findet das Verfahren Anwendung in den Fällen, in denen, wie in Fig. 1, ein Kurvenzug AB bestimmt werden soll auf Grund der durch irgend ein Beobachtungsverfahren (Skalenablesung, Wägung, Längenmessung etc.) gewonnenen Punkte P_1, P_2, P_3, \dots . Der Deutlichkeit der Darstellung wegen sind in dieser und den folgenden Figuren die Fehler übertrieben groß angenommen. Es sei $AM_1M_2 \dots B$ der theoretisch richtige Kurvenzug. Der auf Grund der Punkte P_1, P_2, \dots „nach dem Gefühl“ konstruierte Kurvenzug wird mit diesem nicht genau zusammenfallen. Die richtigen Ordinaten sind M_1Q_1, M_2Q_2, \dots . Die abgelesenen Werte P_1Q_1, P_2Q_2, \dots sind mit den Fehlern $P_1M_1 = \Delta_1, P_2M_2 = \Delta_2, \dots$ behaftet.

Wir setzen voraus, die Ablesungen seien frei von „systematischen“ Fehlern (herrührend von unrichtiger Aufstellung oder von Indexfehlern der Meßinstrumente) und nur mit „zufälligen“ Fehlern (unvermeidlichen Beobachtungsfehlern) behaftet. Erstere lassen sich bei entsprechender Sorgfalt bei Vornahme der Messungen meist vermeiden; in vielen Fällen kann man auch ihre Größe direkt oder indirekt ermitteln und als Korrektur in Rechnung ziehen.

Das charakteristische Merkmal der zufälligen Fehler ist, daß sie keinerlei Bevorzugung eines Vorzeichens (+ oder -) erkennen lassen. Wir dürfen daher annehmen, daß von n Beobachtungen $\frac{n}{2}$ mit positiven und $\frac{n}{2}$ mit negativen Fehlern behaftet sein werden, d. h. daß die Hälfte der gefundenen Punkte auf der einen Seite, die andere Hälfte auf der anderen Seite des betrachteten Kurvenastes liegen wird. Durch Umkehrung dieses Satzes findet man die Regel, daß man der richtigen Form der gesuchten Kurve dann am nächsten kommen wird, also die „wahrscheinlichste“ Form derselben erhält, wenn man die Kurve so zieht, daß zu beiden Seiten derselben gleich viele Punkte liegen.

Fig. 1.

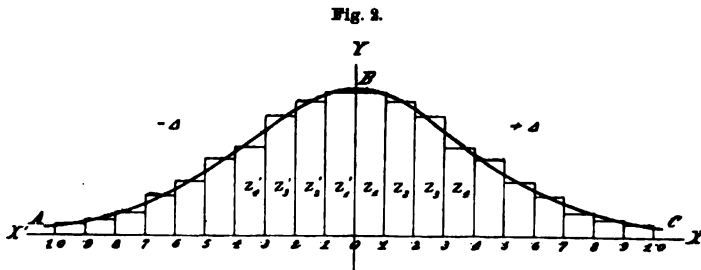


Die absolute Größe der einzelnen Fehler Δ ist selbstverständlich eine verschiedene und in ihrem Auftreten in der Reihenfolge der Beobachtungen an keinerlei Gesetz gebunden. Dagegen nimmt die Zahl der Fehler oder richtiger, die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens in dem Maße ab, als ihre absolute Größe zunimmt, so zwar, daß die Zahl der Fehler eines gegebenen Intervalls (etwa $0 - 0.1$ in irgend einem Maßstabe) in unmittelbarer Nähe des wahren Wertes y (also zwischen 0 und 0.1) größer sein wird als die Zahl der Fehler desselben Intervalls in größerer Entfernung vom Werte y (z. B. zwischen 0.7 und 0.8). Mit anderen Worten, kleine Fehler werden relativ häufiger, größere relativ seltener auftreten. Der Zusammenhang zwischen der absoluten Größe der Fehler und der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens (ihrer relativen Häufigkeit) bei einer Beobachtungsreihe ist ein vollkommen gesetzmäßiger. Dieses Gesetz (das Laplacesche Gesetz

der zufälligen Fehler)¹⁾ tritt um so schärfer zu Tage, je größer die Zahl der vorliegenden Beobachtungen ist. Der mathematische Ausdruck dieses Gesetzes lautet:

$$(1) \quad y = ae^{-h^2x^2},$$

wobei a und h Konstanten sind, die für jede Beobachtungsreihe besonders bestimmt werden müssen. $e = 2.718 \dots$ Um ein Bild des Verlaufes der durch obige Gleichung dargestellten Kurve zu erhalten, tragen wir als Abscissen Strecken auf, die den gewählten Fehlerintervallen (etwa $0 - 0.1$, $0.1 - 0.2$, ...) entsprechen (Fig. 2), wobei wir sinngemäß die $+$ Fehler nach rechts, die $-$ nach links auftragen. Über jedem einzelnen Intervall als Basis konstruieren wir nun ein Rechteck, dessen Inhalt gleich ist der Zahl der Fehler, die in das gewählte Intervall fallen (s_1, s_2, \dots Zahlen der $+$ Fehler; s'_1, s'_2, \dots



Zahlen der $-$ Fehler). Liegt eine genügende Zahl von Beobachtungen vor und hat man das Fehlerintervall entsprechend klein gewählt, so kann man die aufeinander folgenden Rechtecke durch eine Kurve ABC ersetzen, wobei natürlich die Summe der außerhalb der Kurve fallenden Flächenstücke gleich der der innerhalb liegenden sein muß. Die von der Kurve und der Abscissenachse eingeschlossene Fläche $ABCXOX'$ entspricht somit der Gesamtzahl der Fehler. Bei n Beobachtungen also:

$$(2) \quad s_1 + s_2 + \dots + s_k = \frac{n}{2},$$

$$(3) \quad s'_1 + s'_2 + \dots + s'_k = \frac{n}{2}.$$

Wie vielfache Vergleiche ergeben, entspricht das Gesetz sehr gut den tatsächlichen Verhältnissen. Die Übereinstimmung ist eine um so bessere, je größer die Zahl der gemachten Beobachtungen ist.

1) Laplace: Théorie analytique des probabilités. Paris.

Aus diesem Gesetze können wir nun für unseren Zweck den Schluß ziehen, daß die Zahl der + Fehler eines Intervalls annähernd gleich ist der Zahl der - Fehler desselben Intervalls und daß die *algebraische Summe aller Fehler annähernd Null sein* und sich der Null um so mehr nähern wird, je größer die Zahl der Beobachtungen ist.

Bezeichnen wir den mittleren Fehler eines Intervalls mit $\delta_1, \delta_2, \dots$ bzw. $-\delta_1, -\delta_2, \dots$, so ist demnach mit wachsendem n :

$$(4) \quad s_1\delta_1 + s_2\delta_2 + \dots + s_k\delta_k - (s'_1\delta'_1 + s'_2\delta'_2 + \dots + s'_k\delta'_k) \doteq 0$$

oder

$$(5) \quad \lim \sum z\delta = 0,$$

wobei:

$$s_1 = s'_1, \quad s_2 = s'_2 \dots$$

und

$$\delta_1 = \delta'_1, \quad \delta_2 = \delta'_2 \dots$$

wird.

Auf das Beispiel Fig. 1 angewendet, ergibt dies, daß wir die annähernd zutreffende Annahme machen dürfen, daß

$$(6) \quad A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum A = 0.$$

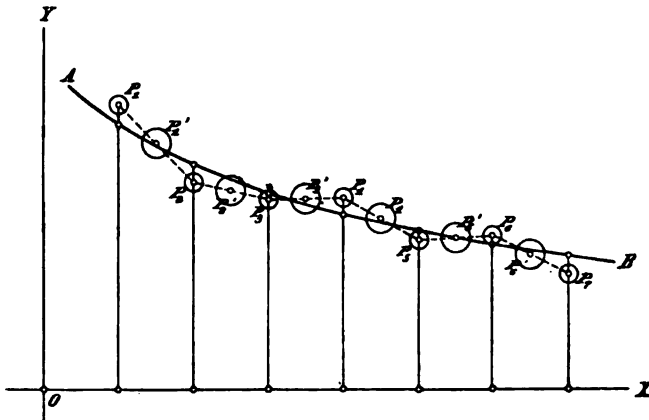
Wir wollen uns nun vorstellen, jeder Punkt P_1, P_2, \dots, P_n sei mit einem beliebigen, aber für alle Punkte gleichen Gewicht g behaftet. Dieses „Gewicht“, das wir vielleicht „graphisches Gewicht“ benennen wollen, sei durch einen Kreis von beliebigem Flächeninhalt (um jeden einzelnen Punkt als Mittelpunkt beschrieben) dargestellt (Fig. 3). Wir benutzen hierzu die Punkte des Beispiels Fig. 1. Um nun Punkte zu erhalten, die der wahren Kurve AB näher liegen, vereinigen wir je zwei benachbarte Punkte zu einem einzigen, indem wir den Schwerpunkt je zweier benachbarter, starr verbunden gedachter Punkte bestimmen. Er liegt im Halbierungspunkte der Verbindungslinie der beiden.

Wir verbinden also alle Punkte der Reihe nach durch Gerade und erhalten die gebrochene Linie $P_1P_2 \dots P_7$. Hierauf halbieren wir die Strecken $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_6P_7$ und erhalten die Schwerpunkte P'_1, P'_2, \dots, P'_6 .

Wie aus Fig. 3 hervorgeht, liegen diese Punkte der wahren Kurvenform bereits ziemlich nahe; sie liegen alle der Kurve AB näher als die Punkte $P_1P_2 \dots P_7$. In vielen Fällen kann diese erste Annäherung bereits genügen, um durch die gefundenen Punkte $P'_1P'_2 \dots P'_6$ eine Kurve zu legen, deren Form vom „Gefühl“ nicht mehr sonderlich beeinflusst werden kann. Genügt die erste Annäherung nicht, dann kann man das Verfahren auf diese Punkte nochmals anwenden (Ziehen

und Halbieren der Strecken $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$, ..., $P_5'P_6'$) und erhält die Schwerpunkte $P_1''P_2'' \dots P_6''$. Wie man sofort erkennt, sinkt die Zahl der erhaltenen Punkte nach jedesmaliger Anwendung des Verfahrens um 1. Bei n gegebenen Punkten wird daher das Verfahren im Maximum $(n - 1)$ mal angewendet werden können. Führt man dies bei dem vorliegenden Beispiel durch, so würde man finden, daß der durch die letzte Annäherung gefundene Punkt P_1^{VI} keineswegs der wahren Kurve am nächsten liegt, wie anzunehmen gewesen wäre. Daß dies nach dem bisher Gesagten auch gar nicht der Fall zu sein braucht, geht schon daraus hervor, daß man ja nicht wissen kann, *wie groß* die Annäherung ist, die man bereits nach der ersten Anwendung des Verfahrens erzielte. Dazu bedürfte es der Kenntnis der absoluten Größe

Fig. 3.



und Richtung jedes einzelnen Fehlers und der wahren Form der Kurve, was nach unserer Voraussetzung ausgeschlossen ist. Dafür, *wie oft* das Verfahren anzuwenden ist, kann keine Regel angegeben werden, das richtet sich nach dem jeweilig vorliegenden Fall. Als *Richtschnur* kann nur dienen, daß man das günstigste Resultat wahrscheinlich dann erzielt hat, wenn sich durch die gefundenen Punkte eine mehr oder weniger „elastische Linie“ legen läßt, was durch die gegebenen Punkte nicht geschehen konnte. In den weitaus meisten Fällen wird eine oder höchstens zwei „Annäherungen“ genügen. Dann ist auch die Anwendung des Verfahrens wegen seiner Einfachheit für den Praktiker von Wert und zu empfehlen. Öfteres Anwenden macht die Sache immer unübersichtlicher und praktisch wertlos. Insbesondere an flachen Kurvenstellen werden die neuen Punkte den alten so nahe fallen, daß weiteres „Annähern“ zwecklos wäre.

Anknüpfend an die Bemerkung, daß wir das „Gewicht“ eines Punktes (P_1, P_2, \dots) durch die Fläche eines Kreises darstellen wollen, können wir nun das Gewicht der in erster Annäherung gefundenen Punkte (P'_1, P'_2, \dots) als graphische Schwerpunkte je zweier gegebener Punkte durch je eine doppelt so große Kreisfläche darstellen; die Punkte der zweiten Annäherung (P''_1, P''_2, \dots) durch eine viermal so große Kreisfläche u. s. w. Wenn wir im Sinne des oben Gesagten mit der „Annäherung“ nicht über ein vernünftiges, durch den jeweiligen Fall bestimmtes Maß hinausgehen, können wir damit die Vorstellung verbinden, die Größe der Kreisfläche stelle das „Gewicht“ des Punktes als Maß der Einflußnahme auf die Form der Kurve dar. Diese Anschauungsweise darf selbstverständlich streng genommen nur auf die ersten Annäherungen ausgedehnt werden, da alle gefundenen Schwerpunkte von sämtlichen benutzten Einzelpunkten beeinflußt sind.

Der *Beweis*, daß durch das beschriebene Verfahren tatsächlich eine genauere Bestimmung der wahren Kurvenform möglich ist, kann aus den wiederholt angeführten Gründen nicht mathematisch erbracht werden. Wir wollen ihn durch folgende Überlegungen ersetzen:

1. Gesetzt, zwei benachbarte Punkte P_1 und P_2 lägen auf verschiedenen Seiten der (unbekannten) Kurve. Der Fehler des Halbierungspunktes P'_1 der Verbindungslinie P_1P_2

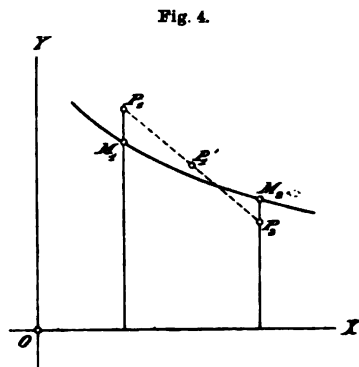


Fig. 4.

(Fig. 4) wird *annähernd* (wegen der unbekannten Krümmung des Kurvenstückes zwischen den Abscissen) gleich der Differenz der Fehler der gegebenen Punkte sein. Ist die Krümmung des Kurvenstückes M_1M_2 eine so große, daß diese Annahme unzulässig wird, dann reichen die Punkte P_1P_2 zur Bestimmung der Kurvenform überhaupt nicht aus, und es müssen weitere Punkte zwischen P_1 und P_2

bestimmt werden, soll die Kurve noch praktischen Wert besitzen und nicht durch bloßes Schätzen gefunden sein.

2. Liegen zwei benachbarte Punkte auf derselben Kurvenseite, so wird der Fehler des gefundenen Näherungspunktes P'_1 annähernd gleich sein dem arithmetischen Mittel der Fehler der Punkte P_1 und P_2 .

a. Liegen die Punkte auf der konvexen Seite der Kurve, dann ist der Fehler kleiner (Fig. 5),

b. liegen sie auf der konkaven Seite der Kurve, dann ist der Fehler größer als das arithmetische Mittel (Fig. 6). Dieser Fall ist der ungünstigste für das Näherungsverfahren, da letzteres den Fehler zu vergrößern strebt. Er wird jedoch teilweise ausgeglichen durch die nach dem Laplaceschen Gesetze zu erwartenden Punkte, die auf der

Fig. 5.

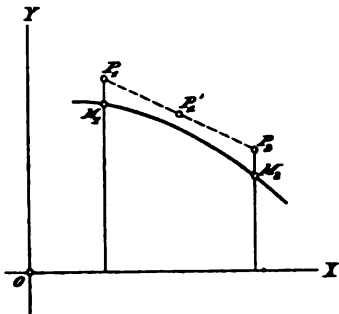
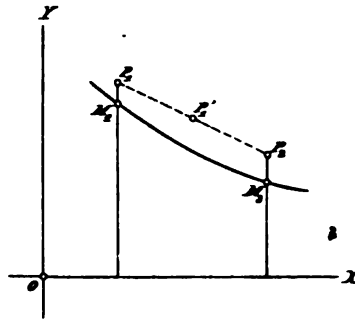


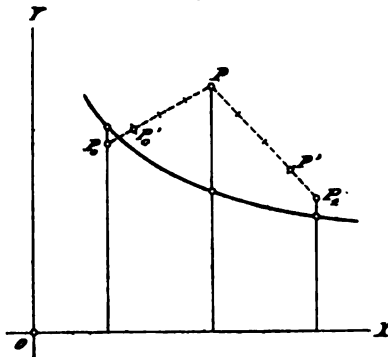
Fig. 6.



anderen Kurvenseite liegen. Das Maß der Krümmung des Kurvenstückes M_1M_2 entscheidet wieder dafür, ob die Punkte zur einwandfreien Konstruktion der Kurvenform überhaupt ausreichen.

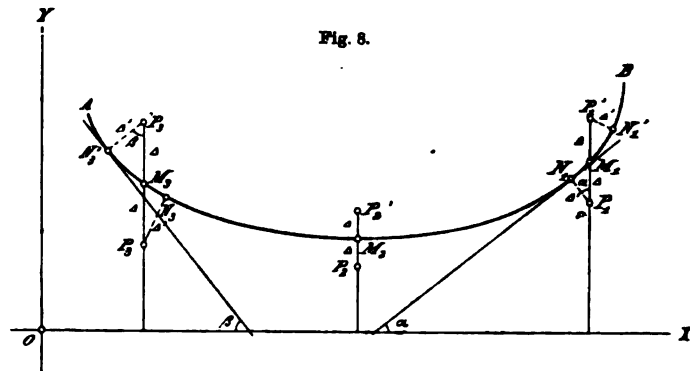
Das beschriebene Verfahren setzt uns ferner in den Stand, folgendem Umstand Rechnung zu tragen: Gesetzt den Fall, wir hätten Grund zur Annahme, bei der Bestimmung eines Punktes P wäre aus irgend einer Ursache ein Fehler unterlaufen, der größer ist als der durchschnittliche Fehler der übrigen Punkte. Man wird dies auch daraus erkennen, daß der Punkt P im Vergleich zu den anderen Punkten auffallend weit von der Kurve abliegen wird (Fig. 7). Diesen Punkt können wir zur Konstruktion der Kurve unter der Bedingung heranziehen, daß wir seine Einflußnahme auf die Kurvenform, sein „graphisches Gewicht“, entsprechend herabsetzen. Hierzu müssen wir eine zahlenmäßige Annahme treffen. Wir wollen als einfaches Beispiel annehmen, sein „Gewicht“ sei bloß $\frac{1}{3}$ von dem der beiden Nachbarpunkte. Dann liegt der graphische Schwerpunkt der Strecke P_0P in P'_0 , der der Strecke PP_1 in P' . Wir haben somit nach der ersten Annäherung mit den Punkten P'_0 und P' zu rechnen und sind der wahren Kurvenform näher ge-

Fig. 7.



kommen. Es versteht sich von selbst, daß diese Art der Fehlerbewertung ihrer Unsicherheit wegen nur selten in Anwendung kommen kann und nach Tunlichkeit vermieden werden wird. Als Konsequenz des allgemeinen Verfahrens der Bestimmung „graphischer Schwerpunkte“ bietet sie immerhin Interesse.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß der Einfluß des Fehlers eines Punktes auf die richtige Kurvenform nicht an allen Stellen einer Kurve derselbe ist, sondern von der Neigung der Kurve gegen die Koordinatenachsen abhängt. Hätten wir beispielsweise (Fig. 8) an Stelle des



1. Auf jeder Seite der richtigen Kurve werden annähernd gleich viele Beobachtungspunkte liegen.
2. Die algebraische Summe aller Beobachtungsfehler wird annähernd $= 0$ sein.
3. Aus den Beobachtungspunkten lassen sich durch Bestimmung der „graphischen Schwerpunkte“ nach dem oben beschriebenen Verfahren Punkte finden, die der richtigen Kurve näher liegen als die gegebenen Punkte.

Über die Kreiselbewegung an der Erdoberfläche.

Von OLUF KRAGH in Nykøbing-Falster (Dänemark).

In meiner Dissertation¹⁾ habe ich gezeigt, daß die Eulerschen Koordinaten der Pendelachse durch elliptische Funktionen zweiter Art und ihre Differentialquotienten ausgedrückt werden können, auch wenn man die erste Potenz der Winkelgeschwindigkeit der Erde mit in Rechnung nimmt, vorausgesetzt, daß die Trägheitsmomente bezüglich zweier auf einander und auf der Pendelachse senkrechter Achsen durch den Aufhängepunkt des Pendels von gleicher Größe sind.

In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, daß dieses Ergebnis seine Gültigkeit behält, auch wenn das Pendel am Anfang der Bewegung eine Drehung um die Achse erhält, also auch für die Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels. Daß die Bewegungsgleichungen des Kreisels durch elliptische Funktionen zweiter Art ausgedrückt werden können, wenn man die Winkelgeschwindigkeit der Erde nicht ins Auge faßt, ist seit lange wohl bekannt.

Während dieser Untersuchung werden wir die kanonische Form der Differentialgleichungen der relativen Bewegung benutzen, die zuerst von Bour²⁾ gegeben worden ist.

Dieses Gleichungssystem ist, wie bekannt:

$$\frac{dq_k}{dt} = -\frac{dH}{dp_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{dH}{dq_k}, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

wo

$$p_k = \frac{dT_1}{dq_k}, \quad \text{und} \quad H = U + K + G - T.$$

1) Studier over Pendulbevaegelsen, Kóbenhavn 1902.

2) Journal de math. pure et appl., 2^{ième} ser. t. VIII. pag. 1—51.

T ist die lebendige Kraft der relativen Bewegung, T_1 die der absoluten, demnach

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right],$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2),$$

wo

$$\xi = \frac{dx}{dt} + \beta z - \gamma y,$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} + \gamma x - \alpha z,$$

$$\zeta = \frac{dz}{dt} + \alpha y - \beta x.$$

α, β, γ sind die Komponenten der augenblicklichen Drehung nach den beweglichen Achsen. U ist das Potential der äußeren Kräfte. Ferner ist

$$K = -u \sum_i m_i x_i - v \sum_i m_i y_i - w \sum_i m_i z_i$$

(u, v, w die Komponenten der Beschleunigung des Anfangspunktes nach den beweglichen Achsen), und

$$G = \frac{1}{2} \sum_i m_i [(\gamma y_i - \beta z_i)^2 + (\alpha z_i - \gamma x_i)^2 + (\beta x_i - \alpha y_i)^2].$$

I.

Ermittlung der Funktionen $T_1, G, U + K$ und H .

Der Unterstützungspunkt des Kreisels wird mit A bezeichnet, AR ist die Achse des Kreisels, AP und AQ sind zwei auf einander senkrechte Geraden durch A , die senkrecht auf der Achse stehen. Die Trägheitsmomente in Bezug auf diese Koordinatenachsen werden mit J_x, J_y, J_z bezeichnet. J_y und J_z sind einander gleich. Außer diesem Koordinatensystem führen wir noch ein anderes $A - MNP$ ein. AP ist die — positiv nach unten — gerichtete Lotlinie des Unterstützungspunktes, die der M ist positiv nach Süden, die der N positiv nach Westen gerichtet.

Die Ebene $[APQ]$ schneidet die Ebene $[AMN]$ in einer Geraden, deren positive Richtung Γ so bestimmt ist, daß $(R_1 \Gamma) = +\frac{\pi}{2}$ (R_1 ist die Richtung der Projektion von AR auf die Ebene $[AMN]$).

Wir führen nun die drei Eulerschen Winkel $(RP) = \theta$, $(\Gamma P) = \varphi$, $(\Gamma M) = \psi$ ein. Bedeuten p , q , r die Komponenten der augenblicklichen Drehung nach den Achsen AP , AQ , AR , so ist, wie bekannt:

$$\begin{aligned} p &= \cos \varphi \cdot \theta' + \sin \theta \sin \varphi \cdot \psi' \\ (1) \quad q &= -\sin \varphi \cdot \theta' + \sin \theta \cos \varphi \cdot \psi' \\ r &= \varphi' + \cos \theta \cdot \psi'. \end{aligned}$$

Führt man in den Ausdruck

$$T = \frac{1}{2} \cdot (J_P \cdot (p^2 + q^2) + J_R r^2)$$

diese Werte ein, dann erhält man

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \cdot [J_P \cdot (\theta'^2 + \sin^2 \theta \cdot \psi'^2) + J_R (\varphi' + \cos \theta \cdot \psi')^2].$$

Werden nun die Koordinaten eines willkürlichen Punktes im Systeme $A - MNP$ durch (x, y, z) bezeichnet, dann ist

$$G = \frac{1}{2} \cdot \int [(\gamma y - \beta z)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta x - \alpha y)^2] dm,$$

die Integration über den ganzen Kreisels erstreckt. Hier ist

$$\alpha = n \cos \lambda, \quad \beta = 0, \quad \gamma = n \sin \lambda.$$

λ ist die geographische Breite des Ortes. n ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde. Diese Größe ist $= c \cdot \frac{1}{13713}$.

Wir erhalten demnach

$$G = \frac{n^2}{2} \cdot \int [y^2 + (x \sin \lambda - z \cos \lambda)^2] dm.$$

Dieses Integral ist das Trägheitsmoment des Kreisels in Bezug auf eine Gerade durch den Unterstützungspunkt, parallel mit der Drehungsachse der Erde.

Bedeuten δ_1 , δ_2 , δ_3 die Kosinus der Winkel, welche diese Achse — positiv nach Süden — mit den Hauptträgheitsachsen des Kreisels einschließt, dann ist

$$G = \frac{n^2}{2} \cdot [J_P (\delta_1^2 + \delta_2^2) + J_R \delta_3^2].$$

Man hat aber

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \cos \lambda \cdot \cos (PM) + \sin \lambda \cos (PP), \\ \delta_2 &= \cos \lambda \cdot \cos (QM) + \sin \lambda \cos (QP), \\ \delta_3 &= \cos \lambda \cdot \cos (RM) + \sin \lambda \cos (RP). \end{aligned}$$

Werden nun in diese Gleichungen die Werte für $\cos(PM)$ usw. eingesetzt, und führt man in den letzten Ausdruck für G die so erhaltenen Werte ein, dann ergibt sich

$$(3) \quad G = \frac{n^2}{2} \cdot [J_P - (J_P - J_R)(\sin \lambda \cos \theta - \cos \lambda \sin \psi \sin \theta)^2].$$

Es bleibt nun übrig, um die Funktion H zu erhalten, $U + K$ zu berechnen. Man hat, wenn m die Masse des Kreisels bedeutet:

$$\frac{d(U + K)}{dx} = \frac{dU}{dx} - mu,$$

$$\frac{d(U + K)}{dy} = \frac{dU}{dy} - mv,$$

$$\frac{d(U + K)}{dz} = \frac{dU}{dz} - mw.$$

U bedeutet hier das Potential der Erde. Man überzeugt sich leicht davon¹⁾, daß man von der Anziehung des Mondes, der Sonne und aller andern Himmelskörper absehen kann. Von dem Widerstande der Luft sehen wir gleichfalls ab.

Man sieht, daß $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$ die Komponenten der Erdanziehung, während $-mu$, $-mv$, $-mw$ die Komponenten der Zentrifugalkraft sind. Also sind $\frac{d(U + K)}{dx}$, $\frac{d(U + K)}{dy}$, $\frac{d(U + K)}{dz}$ die Komponenten des Gewichts des Teilchens dm , wie man dieses beobachtet.

Demnach hat man:

$$\frac{d(U + K)}{dx} = 0, \quad \frac{d(U + K)}{dy} = 0, \quad \frac{d(U + K)}{dz} = mg.$$

Die Integration dieser Gleichungen gibt $U + K = mgs_0$ (s_0 ist die z -Koordinate des Schwerpunktes). Wird die Entfernung des Schwerpunktes von dem Unterstützungspunkte mit l bezeichnet, dann ergibt sich

$$s_0 = l \cos \theta$$

und demnach:

$$(4) \quad U + K = mgl \cos \theta$$

Jetzt ist

$$(5) \quad H = mgl \cos \theta + \frac{n^2}{2} \cdot \{J_P(\theta'^2 + \sin^2 \theta \cdot \psi'^2) + J_R \cdot (\varphi' + \cos \theta \cdot \psi')^2\}.$$

1) Diss. S. 8—10.

Statt θ' , φ' , ψ' führt man in H die neuen Variablen Θ , Φ , Ψ ein, die dadurch bestimmt sind, daß

$$\frac{dT_1}{d\theta'} = \Theta, \quad \frac{dT_1}{d\varphi'} = \Phi, \quad \frac{dT_1}{d\psi'} = \Psi.$$

Man hat aber

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dm,$$

und

$$\xi = \frac{dx}{dt} - n \sin \lambda \cdot y,$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} + n \sin \lambda \cdot x - n \cos \lambda \cdot z,$$

$$\zeta = \frac{dz}{dt} + n \cos \lambda \cdot y.$$

Also

$$T_1 = T + G + n \sin \lambda \int (xy' - yx') dm + n \cos \lambda \int (yz' - zy') dm.$$

Nun ist

$$\int (xy' - yx') dm = J_P (\gamma_1 p + \gamma_2 q) + J_R \cdot \gamma_3 r,$$

$$\int (yz' - zy') dm = J_P (\alpha_1 p + \alpha_2 q) + J_R \cdot \alpha_3 r,$$

indem

$$\gamma_1 = \cos(PP), \quad \gamma_2 = \cos(QP), \quad \gamma_3 = \cos(RP),$$

$$\alpha_1 = \cos(PM), \quad \alpha_2 = \cos(QM), \quad \alpha_3 = \cos(RM),$$

woraus, wenn man einsetzt und ausrechnet,

$$\int (xy' - yx') dm = (J_P \sin^2 \theta + J_R \cdot \cos^2 \theta) \cdot \psi' + J_R \cos \theta \cdot \varphi',$$

$$\begin{aligned} \int (yz' - zy') dm &= J_P \cos \psi \cdot \theta' + (J_P - J_R) \sin \psi \sin \theta \cos \theta \cdot \psi' \\ &\quad - J_R \sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \varphi'. \end{aligned}$$

Im obenstehenden Ausdruck für T_1 führt man diese Werte ein und erhält:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \cdot \{ J_P (\theta'^2 + \sin^2 \theta \cdot \psi'^2) + J_R (\varphi' + \cos \theta \cdot \psi')^2 \} + G \\ &\quad + n \sin \lambda \cdot \{ (J_P \sin^2 \theta + J_R \cos^2 \theta) \cdot \psi' + J_R \cos \theta \cdot \varphi' \} \\ &\quad + n \cos \lambda \cdot \{ J_P \cos \psi \cdot \theta' + (J_P - J_R) \sin \psi \sin \theta \cos \theta \cdot \psi' - J_R \sin \psi \sin \theta \cdot \varphi' \}. \end{aligned}$$

Differentiiert man in Bezug auf θ' , φ' , ψ' , so wird erhalten:

$$\frac{dT_1}{d\theta'} = \Theta = J_P \cdot \theta' + n J_P \cos \lambda \cos \psi,$$

$$\frac{dT_1}{d\varphi'} = \Phi = J_R \cdot (\varphi' + \cos \theta \cdot \psi') + n J_R \cdot (\sin \lambda \cos \theta - \cos \lambda \sin \psi \sin \theta),$$

$$\frac{dT_1}{d\psi'} = \Psi = \cos \theta \cdot \Phi + J_P \sin^2 \theta \cdot \psi' + n J_P \sin \theta \cdot (\sin \lambda \cos \theta + \cos \lambda \sin \psi \cos \theta)$$

Wenn man diese Gleichungen in Bezug auf $\varphi' + \cos \theta \cdot \psi'$, θ' und ψ' auflöst, so ergibt sich

$$\varphi' + \cos \theta \cdot \psi' = \frac{\Phi}{J_R} - n \cdot (\sin \lambda \cos \theta - \cos \lambda \sin \psi \sin \theta),$$

$$\theta' = \frac{\Theta}{J_P} - n \cos \lambda \cos \psi,$$

$$\psi' = \frac{\Psi - \cos \theta \cdot \Phi}{J_P \sin^2 \theta} - \frac{n}{\sin \theta} \cdot (\sin \lambda \sin \theta + \cos \lambda \sin \psi \cos \theta).$$

Führt man diese Werte in (5) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} H = mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\Theta^2}{J_P} + \frac{\Phi^2}{J_R} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Psi - \cos \theta \cdot \Phi)^2}{J_P \sin^2 \theta} \\ (6) \quad + n \cdot \Theta \cdot \cos \lambda \cos \psi + n \cdot \Phi \cdot (\sin \lambda \cos \theta - \cos \lambda \sin \psi \sin \theta) \\ + n \cdot \frac{\Psi - \cos \theta \cdot \Phi}{\sin \theta} \cdot (\sin \lambda \sin \theta + \cos \lambda \sin \psi \cos \theta). \end{aligned}$$

II.

Die kanonische Form der Bewegungsgleichungen.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind nun den in der Einleitung angeführten Gleichungen zufolge

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1) \quad \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{dH}{d\Phi}, \quad 2) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dH}{d\varphi}, \\ & 3) \quad \frac{d\theta}{dt} = - \frac{dH}{d\Theta}, \quad 4) \quad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dH}{d\theta}, \\ & 5) \quad \frac{d\psi}{dt} = - \frac{dH}{d\Psi}, \quad 6) \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{dH}{d\psi}, \end{aligned}$$

Aus (1)² erhält man, da H φ nicht enthält,

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad \text{woraus} \quad \Phi = C.$$

Es wird im folgenden bequem sein $C = \mu J_R$ zu setzen.¹⁾

Aus (1)¹ ergibt sich:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mu - \frac{\Psi - \mu J_R \cos \theta}{J_P \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta - n (\sin \lambda \cos \theta - \cos \lambda \sin \psi \sin \theta) \\ + n \cdot \cot \theta \cdot (\sin \lambda \sin \theta + \cos \lambda \sin \psi \cos \theta);$$

aber — wie früher gefunden ist —

$$\frac{\Psi - \mu J_R \cos \theta}{J_P \sin^2 \theta} = \psi' + \frac{n}{\sin \theta} \cdot (\sin \lambda \sin \theta + \cos \lambda \sin \psi \cos \theta),$$

und demnach

$$(2) \quad \frac{d\varphi}{dt} + \cos \theta \cdot \frac{d\psi}{dt} = r = \mu - n \cdot (\sin \lambda \cos \theta - \cos \lambda \sin \psi \sin \theta),$$

eine Gleichung, die auch früher gefunden worden ist.

Hat man vermittelst der vier letzten Gleichungen (1) θ und ψ als Funktionen von t bestimmt, dann erhält man φ aus (2) durch Quadratur.

Die Werte von H in (1)^{3, 4, 5, 6} eingesetzt gibt nun

$$(3) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Theta}{J_P} - n \cos \lambda \cos \psi,$$

$$(4) \quad \frac{d\Theta}{dt} = -mgl \sin \theta - \mu \cdot \frac{J_R}{J_P} \cdot \frac{\Psi - \mu J_R \cos \theta}{\sin \theta} \\ + \frac{\cot \theta}{J_P} \cdot \left[\frac{\Psi - \mu J_R \cos \theta}{\sin \theta} \right]^2 - n \cdot \frac{\cos \lambda \sin \psi}{\sin \theta} \cdot \frac{\Psi - \mu J_R \cos \theta}{\sin \theta},$$

$$(5) \quad \frac{d\psi}{dt} = -n \sin \lambda + \frac{1}{J_P \sin \theta} \cdot \frac{\Psi - \mu J_R \cos \theta}{\sin \theta} - n \cos \lambda \sin \psi \cot \theta,$$

$$(6) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -n \cdot \Theta \cdot \cos \lambda \sin \psi - n \mu J_R \cos \lambda \cos \psi \sin \theta \\ + n \cdot \frac{\Psi - \mu J_R \cos \theta}{\sin \theta} \cdot \cos \lambda \cos \psi \cos \theta.^2)$$

Aus (2) sieht man, daß μ die Winkelgeschwindigkeit ist, welche der Kreisel am Anfang der Bewegung um die Figurenachse erhält. Es folgt hieraus für das Pendel, daß die Drehung der Erde allein im stande ist, eine Drehung um die Pendelachse hervorzubringen.

Betrachten wir die dreiseitige Ecke, welche durch die Lotlinie (positiv nach unten), die Pendelachse und eine Gerade durch den An-

1) C ist nämlich die Projektion des Impulses auf die Figurenachse des Kreisels.

2) Ψ ist die Projektion des Impulses auf die Vertikale, und man sieht hieraus, daß Ψ , wenn man n vernachlässigt, konstant ist.

fangspunkt parallel mit der Drehungsachse der Erde (positiv nach Süden, Richtung V) bestimmt wird, dann ist

$$(RP) = \theta, \quad (VP) = \frac{\pi}{2} - \lambda, \quad (VR) = x.$$

Der Raumwinkel gegenüber der Ecke x ist

$$(MR_1) = (M\Gamma) + (\Gamma R_1) = -\frac{\pi}{2} - \psi$$

und also

$$\cos x = \cos \theta \sin \lambda - \sin \theta \cos \lambda \sin \psi.$$

Demnach ist, wenn $\mu = 0$,

$$r = -n \cos x.$$

Wird eine Ebene durch den Aufhängepunkt parallel mit dem Äquator der Erde gelegt, so wird die Bewegung um die Pendelachse oscillierend, wenn diese Achse im Laufe einer Schwingung des Pendels durch die Ebene geht, was nicht geschehen kann, falls die größte Elongation kleiner ist als die geographische Breite des Ortes. Auf dem Äquator wird die Achse immer zwei Mal in jeder Schwingung die Ebene passieren, die Bewegung also hier immer oscillierend werden; anderswo aber immer rotierend, wenn die Elongation kleiner als die Breite des Ortes ist.

III

Integration der Bewegungsgleichungen.

Die Größe H enthält zweierlei Glieder, nämlich solche, die n als Faktor enthalten, und solche, in welchen dieser Faktor nicht vorkommt. Werden diese zwei Arten von Gliedern beziehungsweise H_2 und H_1 bezeichnet, dann hat man

$$H = H_1 + H_2.$$

Man kann aber, weil $n = c \frac{1}{13713}$, H_2 als unendlich klein annehmen und demnach als eine die Bewegung störende Funktion ansehen, deren Einfluß wir vorläufig vernachlässigen werden.

Dann haben wir

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0, \quad \Psi = a$$

und demnach

$$H_1 = mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \left[\frac{\Theta^2}{J_P} + \mu^2 J_R \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{a - \mu J_R \cos \theta}{J_P \sin^2 \theta}.$$

Die Zeit kommt in dieser Gleichung nicht explicite vor, und wir können also die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung

durch Differentiation ausführen, falls man das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$H_1 + h = 0$$

finden kann. In H_1 soll Θ durch $\frac{dV}{d\theta}$ ersetzt werden, und $h = -\frac{dV}{dt}$. Wenn man dann

$$V = -ht + W(\theta, \psi)$$

setzt, wird man zur Bestimmung von W die Gleichung erhalten

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dW}{d\psi} = a \\ \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{dW}{d\theta}\right)^2 = J_P \sin^2 \theta \cdot (2h + 2mgl \cos \theta - \mu^2 J_R) - (a - \mu J_R \cos \theta)^2, \end{cases}$$

wovon sich als vollständiges Integral ergibt:

$$(2) \quad W = \int \sqrt{J_P \sin^2 \theta \cdot (2h + 2mgl \cos \theta - \mu^2 J_R) - (a - \mu J_R \cos \theta)^2} \cdot \frac{d\theta}{\sin \theta} + a\psi + b.$$

Die Größe unter dem Wurzelzeichen werde mit X bezeichnet. Jetzt erhält man:

$$V = -ht + \int \sqrt{X} \cdot \frac{d\theta}{\sin \theta} + a\psi + b. \quad (b \text{ spielt im folgenden keine Rolle.})$$

Die Bewegungsgleichungen der nicht gestörten Bewegung sind nun

$$(3) \quad \frac{dV}{dh} = -t + J_P \int \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{\sqrt{X}} = L$$

$$(4) \quad \frac{dV}{da} = \psi - \int \frac{(a - \mu J_R \cos \theta) d\theta}{\sin \theta \cdot \sqrt{X}} = M.$$

L und M sind willkürliche Konstanten.

Wird in $X = 0$, $\cos \theta = x$ gesetzt, so erkennt man ohne Schwierigkeit, daß die Wurzeln dieser Gleichung reell sind. Sie seien mit x_1 , x_2 , x_3 bezeichnet.

$$-1 < x_2 < x_3 < +1, \quad x_1 < -1.$$

Aus (3) wird jetzt durch bekannte Transformationen erhalten:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{2J_P}{mgl \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}},$$

$$k^2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} < 1, \quad y = \sqrt{\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}},$$

und daraus

$$(5) \quad \cos \theta = x_2 \operatorname{sn}^2 u + x_3 \operatorname{cn}^2 u,$$

indem

$$u = (t - t_0) \sqrt{\frac{mg l \cdot (x_2 - x_1)}{2 J_P}}.$$

Gehen wir nun zur Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung für die von der Drehung der Erde gestörte Bewegung des Kreisels über, so ist bekanntlich diese Gleichung

$$(6) \quad \frac{dV}{dt} - H_1 - H_2 = 0,$$

worin

$$H_2 = n \cdot \Theta \cdot \cos \lambda \cos \psi + n \cdot \Phi \cdot (\sin \lambda \cos \theta - \cos \lambda \sin \psi \sin \theta) \\ + n \cdot \frac{\Psi - \cos \theta \cdot \Phi}{\sin \theta} \cdot (\sin \lambda \sin \theta + \cos \lambda \sin \psi \cos \theta).$$

Wenn man

$$V = -ht + \mu J_R \cdot \varphi + W(\theta, \psi) + W_1(\theta, \psi)$$

setzt (W_1 entspricht den Gliedern in H_2 und ist demnach unendlich klein), so ergibt sich zur Bestimmung von W_1 — indem wir alle Glieder, die unendlich klein von höheren Potenzen als die erste sind, vernachlässigen — die partielle Differentialgleichung

$$\frac{2}{J_P} \cdot \frac{dW}{d\theta} \cdot \frac{dW_1}{d\theta} + \frac{2}{J_P \sin^2 \theta} \cdot \left(\frac{dW}{d\psi} - \mu J_R \cos \theta \right) \cdot \frac{dW_1}{d\psi} - 2n \cdot \frac{dW}{d\theta} \cdot \cos \lambda \cos \psi \\ - 2n \mu J_R \cdot (\sin \lambda \cos \theta - \cos \lambda \sin \psi \sin \theta) \\ - 2n \cdot \frac{\left(\frac{dW}{d\psi} - \mu J_R \cos \theta \right) (\sin \lambda \sin \theta + \cos \lambda \sin \psi \cos \theta)}{\sin \theta} = 0.$$

Das dieser Gleichung entsprechende System simultaner Differentialgleichungen ist bekanntlich — nach Reduktion —

$$\frac{J_P \cdot d\theta}{\sqrt{X}} = \frac{J_P \sin \theta \cdot d\psi}{a - \mu J_R \cos \theta} \\ = \frac{dW_1}{n(\cos \lambda \cos \psi \sqrt{X} - \mu J_R \cos \lambda \sin \psi + a \sin \lambda \sin \theta + a \cos \lambda \sin \psi \cos \theta)}.$$

Hieraus erhält man

$$d\psi = \frac{a - \mu J_R \cos \theta}{\sin \theta \cdot \sqrt{X}} \cdot d\theta, \quad \psi = \int \frac{a - \mu J_R \cos \theta}{\sin \theta \cdot \sqrt{X}} d\theta + C.$$

Führt man diese Werte für ψ ein, dann ergibt sich

$$W_1(\theta, \psi) = nJ_P \cos \lambda \cdot \int \cos \psi \cdot d\theta - n\mu J_R J_P \cos \lambda \cdot \int \frac{\sin \psi}{\sqrt{X}} d\theta \\ + naJ_P \sin \lambda \cdot \int \frac{\sin \theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta + naJ_P \cos \lambda \cdot \int \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sqrt{X}} d\theta.$$

Wir haben demnach für V die vollständige Lösung:

$$V = -ht + \mu J_R \varphi + \int \frac{\sqrt{X}}{\sin \theta} \cdot d\theta + a\psi + b \\ (7) \quad + nJ_P \cos \lambda \cdot \int \cos \psi d\theta - n\mu J_R J_P \cos \lambda \cdot \int \frac{\sin \psi}{\sqrt{X}} d\theta \\ + naJ_P \sin \lambda \cdot \int \frac{\sin \theta}{\sqrt{X}} d\theta + naJ_P \cos \lambda \cdot \int \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sqrt{X}} d\theta.$$

In den Gliedern, die den Faktor n enthalten, müssen wir uns den oben für ψ gefundenen Ausdruck eingesetzt denken.

Nun ist, wenn von Gliedern, die unendlich klein höherer Ordnung sind, abgesehen wird:

$$(7) \quad J_P \cdot \int \frac{\sin \theta}{\sqrt{X}} d\theta = t + L.$$

Um ψ zu berechnen, führen wir durch die Gleichung

$$x = \cos \theta = x_3 \operatorname{sn}^2 v + x_2 \operatorname{cn}^2 v$$

die neue Variable v ein. Man erhält

$$dx = -2 \cdot (x_3 - x_2) \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v \cdot dv$$

$$x - x_1 = (x_3 - x_1) \operatorname{dn}^2 v, \quad x - x_2 = (x_3 - x_2) \operatorname{cn}^2 v, \quad x_3 - x = (x_3 - x_2) \operatorname{sn}^2 v$$

und demnach:

$$\psi - C = \frac{2}{\sqrt{2mgIJ_P \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \int \frac{a - \mu J_R \cdot (x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v)}{[1 + x_3 - (x_3 - x_2) \operatorname{sn}^2 v][1 - x_3 + (x_3 - x_2) \operatorname{sn}^2 v]} \cdot dv.$$

Wird die GröÙe unter dem Integralzeichen in Partialbrüche zerlegt, dann ergibt sich

$$(8) \quad \psi - C = \frac{1}{\sqrt{2mgIJ_P \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \left\{ (a + \mu J_R) \int \frac{dv}{1 + x_3 - (x_3 - x_2) \operatorname{sn}^2 v} \right. \\ \left. + (a - \mu J_R) \int \frac{dv}{1 - x_3 + (x_3 - x_2) \operatorname{sn}^2 v} \right\}.$$

Die Funktionen unter den Integralzeichen sind doppelperiodische mit den Perioden $2K$ und $2iK'$.

Führt man die Bezeichnungen

$$\operatorname{sn} \alpha = \sqrt{\frac{1+x_2}{x_3-x_2}}, \quad \operatorname{sn} \beta = i \cdot \sqrt{\frac{1-x_2}{x_3-x_2}}$$

ein, so kommt:

$$\psi - C = \frac{1}{\sqrt{2mgI J_P \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \left\{ -\frac{a + \mu J_R}{x_3 - x_2} \cdot \int \frac{dv}{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha} + \frac{a - \mu J_R}{x_3 - x_2} \cdot \int \frac{dv}{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \beta} \right\}.$$

Wird durch \int_P die Integration längs der Begrenzung der Periodenrechtecke bezeichnet, hat man bekanntlich:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_P \frac{ds}{\operatorname{sn}^2 s - \operatorname{sn}^2 \alpha} \cdot \frac{H'(s-v)}{H(s-v)} = \Gamma (= \text{Konstante}).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber auch gleich der Summe der Residuen der Funktion unter dem Integralzeichen.

Die Unendlichkeitsstellen dieser Funktion sind

$$s = v, \quad \alpha, \quad -\alpha$$

$$1. \quad s = v; \quad \text{Res.} \quad \frac{1}{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha}.$$

$$2. \quad s = \alpha; \quad \text{Res.} \quad -\frac{1}{2 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha} \cdot \frac{H'(v-\alpha)}{H(v-\alpha)}.$$

$$3. \quad s = -\alpha; \quad \text{Res.} \quad \frac{1}{2 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha} \cdot \frac{H'(v+\alpha)}{H(v+\alpha)}.$$

Demnach ist

$$\Gamma = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha} - \frac{1}{2 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha} \cdot \left(\frac{H'(v-\alpha)}{H(v-\alpha)} - \frac{H'(v+\alpha)}{H(v+\alpha)} \right).$$

Wird $v = iK'$ gesetzt, dann ergibt sich

$$\Gamma = -\frac{1}{2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha} \cdot \left(\frac{H'(iK' - \alpha)}{H(iK' - \alpha)} - \frac{H'(iK' + \alpha)}{H(iK' + \alpha)} \right) = \frac{1}{\operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha} \cdot \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)}$$

und also schließlich:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha} = \frac{1}{2 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha} \cdot \left[2 \cdot \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{H'(v-\alpha)}{H(v-\alpha)} - \frac{H'(v+\alpha)}{H(v+\alpha)} \right]$$

Vertauscht man α gegen β , so erhält man hieraus:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \beta} = \frac{1}{2 \operatorname{sn} \beta \cdot \operatorname{cn} \beta \cdot \operatorname{dn} \beta} \cdot \left[2 \cdot \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} + \frac{H'(v-\beta)}{H(v-\beta)} - \frac{H'(v+\beta)}{H(v+\beta)} \right]$$

Die Gleichung, deren Wurzeln x_1, x_2, x_3 sind, ist aber

$$x^3 + \frac{2hJ_P + \mu^2 J_R^2 - \mu^2 J_R J_P}{2mglJ_P} \cdot x^2 - \frac{2mglJ_P + 2a\mu J_R}{2mglJ_P} \cdot x - \frac{2hJ_P - \mu^2 J_R J_P - a^2}{2mglJ_P} = 0.$$

Man hat demnach:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = -\frac{(a + \mu J_R)^2}{2mglJ_P},$$

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = \frac{(a - \mu J_R)^2}{2mglJ_P},$$

und also:

$$\frac{a + \mu J_R}{\sqrt{2mglJ_P}} = -\nu_1 \cdot i \cdot \sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)},$$

$$\frac{a - \mu J_R}{\sqrt{2mglJ_P}} = \nu_2 \cdot \sqrt{(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)}.$$

(ν_1 das Vorzeichen für $a + \mu J_R$, ν_2 für $a - \mu J_R$.)

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{1}{2 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha} = \nu_1 \cdot i \cdot \frac{(x_3 - x_2) \cdot \sqrt{2mglJ_P} \cdot (x_3 - x_1)}{2 \cdot (a + \mu J_R)},$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{sn} \beta \cdot \operatorname{cn} \beta \cdot \operatorname{dn} \beta} = -\nu_2 \cdot i \cdot \frac{(x_3 - x_2) \cdot \sqrt{2mglJ_P} \cdot (x_3 - x_1)}{2 \cdot (a - \mu J_R)}.$$

Führt man diese Werte in die oben für $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha}$ und $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \beta}$ erhaltenen Ausdrücke ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dv} = & -\frac{i\nu_1}{2} \cdot \left[2 \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{H'(v-\alpha)}{H(v-\alpha)} - \frac{H'(v+\alpha)}{H(v+\alpha)} \right] \\ & - \frac{i\nu_2}{2} \cdot \left[2 \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} + \frac{H'(v-\beta)}{H(v-\beta)} - \frac{H'(v+\beta)}{H(v+\beta)} \right] \end{aligned}$$

und, wenn man integriert,:

$$\begin{aligned} (9) \quad \psi - C = & \frac{\nu_1}{2i} \left[2 \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \cdot v + \operatorname{Log} \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\alpha)} \right] \\ & + \frac{\nu_2}{2i} \cdot \left[2 \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \cdot v + \operatorname{Log} \frac{H(v-\beta)}{H(v+\beta)} \right]. \end{aligned}$$

Wir werden erstens den Fall betrachten, daß $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. In demselben ist

$$(10) \quad \psi = \frac{\nu}{2i} \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \right) \cdot v + \operatorname{Log} \frac{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)} \right\} + C = U + C.$$

Aus (7) und (7') folgt als die erste integrierte Bewegungsgleichung:

$$(11) \quad -t + J_P \cdot \int \frac{\sin \theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta \\ + n J_P \cos \lambda \cdot \frac{d}{dh} \cdot \left\{ \int \cos \psi \cdot d\theta + a \int \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sqrt{X}} d\theta - \mu J_R \int \frac{\sin \psi}{\sqrt{X}} d\theta \right\} = L \\ \text{In } \int \cos \psi \cdot d\theta + a \int \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta - \mu J_R \cdot \int \frac{\sin \psi}{\sqrt{X}} \cdot d\theta$$

wird für ψ die in (10) gefundene Größe eingesetzt, und es soll bewiesen werden, daß man diese Summe allein durch Jacobische Funktionen ausdrücken kann, sodaß die Bewegung des Kreisels durch diese Funktionen und ihre Ableitungen beschrieben werden kann. Dieses Ergebnis ist — soviel mir bekannt — neu, indem die Bewegungsgleichungen des Kreisels bis jetzt, wenn man den Einfluß der Drehung der Erde beachtet hat, Quadraturen erhalten haben, die man nicht durch bekannte Funktionen ausdrücken kann.

Es ist nach (10)

$$\int \cos \psi \cdot d\theta = \cos C \int \cos U \cdot d\theta - \sin C \int \sin U \cdot d\theta.$$

$$\cos U = \frac{1}{2} \cdot \left\{ e^{\left[\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \right] \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)}} \right. \\ \left. + e^{-\left[\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \right] \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)}{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)}} \right\},$$

$$\sin U = \frac{v}{2i} \cdot \left\{ e^{\left[\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \right] \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)}} \right. \\ \left. - e^{-\left[\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \right] \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)}{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)}} \right\},$$

und weiter:

$$dv = \frac{2 \cdot (x_2 - x_1) \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v}{\sqrt{1 - (x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_1 \operatorname{cn}^2 v)^2}} \cdot dv = \frac{2 \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v}{i \cdot \sqrt{(\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha)(\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \beta)}} dv;$$

man hat aber

$$\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{\Theta^2(\alpha) \cdot \Theta^2(v)} \cdot H(v-\alpha) \cdot H(v+\alpha)$$

und die entsprechende Gleichung für β ; demnach ist:

$$d\theta = \frac{2k \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta) \cdot \Theta^2(v) \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v}{i \cdot \Theta^2(v) \cdot \sqrt{H(v+\alpha) \cdot H(v-\alpha) \cdot H(v+\beta) \cdot H(v-\beta)}} \cdot dv.$$

Man erhält dann, wenn kurz $\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}$ durch $\bar{\omega}$ bezeichnet wird

$$(A) \quad \int \cos \psi \cdot d\theta = \left(\frac{1}{i} \cos C + v \sin C \right) \cdot k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \\ \cdot \int e^{\bar{\omega} \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)} \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v \cdot dv + \left(\frac{1}{i} \cos C - v \sin C \right) \\ \cdot k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{-\bar{\omega} \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)} \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v \cdot dv.$$

Die zwei Integrale in (A) werden wir mit J_1 und J_2 bezeichnen. Setzen wir

$$\frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)} \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v = \frac{k'}{k} \cdot F_1(v),$$

so sieht man, daß $F_1(v)$ eine doppelperiodische Funktion zweiter Art ist mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ und zugehörigen Multiplikatoren 1 und $e^{\frac{\pi i}{K} \cdot (\alpha + \beta)}$. Bilden wir demnächst die Funktion

$$f_1(v) = M \cdot \frac{\Theta(v-\alpha) \cdot \Theta(v-\beta)}{H^2(v)},$$

so ist diese auch eine doppelperiodische Funktion zweiter Art mit denselben Perioden und Multiplikatoren als $F_1(v)$. Wird

$$M = - \frac{H'(o)^2}{\Theta(\alpha) \cdot \Theta'(\beta) + \Theta(\beta) \cdot \Theta'(\alpha)}$$

gesetzt, so erhält $f_1(v)$ an der Unendlichkeitsstelle $v = 0$ das Residuum 1. Die Funktion $F_1(z) \cdot f_1(v-z)$ ist nun doppelperiodisch erster Art und hat an der Unendlichkeitsstelle $z = v$ das Residuum $-F_1(v)$.

Wir werden nun die gewöhnliche Hermitesche Methode zur Zerlegung einer doppelperiodischen Funktion zweiter Art in Elementen benutzen.¹⁾ Zuerst muß aber der Hauptteil der Reihenentwicklungen für $F_1(z)$ in der Umgebung der drei Unendlichkeitsstellen $-iK'$, $-\alpha$, $-\beta$ berechnet werden.

Man erhält auf die gewöhnliche Weise für $-iK'$

$$- \frac{\Theta(o) \cdot \Theta_1(o) \cdot H_1(o)}{H'(o) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2K} \cdot (\alpha + \beta)} \cdot \frac{1}{z}.$$

Gleichfalls für $-\alpha$

$$\frac{H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{H'(o) \cdot \Theta(\alpha) \cdot H(\alpha - \beta)} \cdot \frac{1}{z},$$

und für $-\beta$

$$- \frac{H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{H'(o) \cdot \Theta(\beta) \cdot H(\alpha - \beta)}.$$

1) Compt. Rend. T. 85. p. 693.

Jetzt ergibt sich nach Hermite a. a. O.

$$(12) \quad F_1(v) = -\frac{\Theta(o) \cdot \Theta_1(o) \cdot H_1(o)}{H'(o) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)} \cdot e^{-\frac{\pi i}{2K} \cdot (\alpha + \beta)} \cdot f_1(v + iK') \\ + \frac{H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{H'(o) \cdot \Theta(\alpha) \cdot H(\alpha - \beta)} \cdot f_1(v + \alpha) - \frac{H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{H'(o) \cdot \Theta(\beta) \cdot H(\alpha - \beta)} \cdot f_1(v + \beta).$$

Wird in J_1

$$\frac{\Theta^2(v)}{H(v - \alpha) \cdot H(v - \beta)} \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v = \frac{k'}{k} \cdot F_2(v)$$

gesetzt, dann erhält man gleicher Weise:

$$(13) \quad F_2(v) = -\frac{\Theta(o) \cdot \Theta_1(o) \cdot H_1(o)}{H'(o) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)} \cdot e^{-\frac{\pi i}{2K} \cdot (\alpha + \beta)} \cdot f_2(v - iK') \\ + \frac{H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{H'(o) \cdot \Theta(\alpha) \cdot H(\alpha - \beta)} \cdot f_2(v - \alpha) - \frac{H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{H'(o) \cdot \Theta(\beta) \cdot H(\alpha - \beta)} \cdot f_2(v - \beta),$$

indem

$$f_2(v) = N \cdot \frac{\Theta(v + \alpha) \cdot \Theta(v + \beta)}{H^2(v)}$$

und

$$N = \frac{H'(o)^2}{\Theta(\alpha) \cdot \Theta'(\beta) + \Theta(\beta) \cdot \Theta'(\alpha)}.$$

Hermite hat¹⁾ eine Integralformel gegeben, welche wir im folgenden häufig brauchen. Die Formel ist:

$$(B) \quad \int e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right] \cdot v} \cdot \frac{H(v + a) \cdot H(v + b)}{\Theta^2(v)} \cdot dv \\ = -\frac{\Theta(a) \cdot \Theta(b)}{H'(o) \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right] \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v + \alpha + \beta)}{\Theta(v)}.$$

In (A) ist nach (12):

$$k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot J_1 = k' \cdot \frac{H'(o) \cdot \Theta_1(o) \cdot H_1(o)}{\Theta(o) \cdot [\Theta'(\alpha) \cdot \Theta(\beta) + \Theta(\alpha) \cdot \Theta'(\beta)]} \cdot \int e^{\pi v} \cdot \frac{H(v - \alpha) \cdot H(v - \beta)}{\Theta^2(v)} \cdot dv \\ - k' \cdot \frac{H'(o) \cdot \Theta(\beta) \cdot H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot [\Theta'(\alpha) \cdot \Theta(\beta) + \Theta(\alpha) \cdot \Theta'(\beta)]} \cdot \int e^{\pi v} \cdot \frac{\Theta(v) \cdot \Theta(v + \alpha - \beta)}{H^2(v + \alpha)} \cdot dv \\ + k' \cdot \frac{H'(o) \cdot \Theta(\alpha) \cdot H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot [\Theta'(\alpha) \cdot \Theta(\beta) + \Theta(\alpha) \cdot \Theta'(\beta)]} \cdot \int e^{\pi v} \cdot \frac{\Theta(v) \cdot \Theta(v - \alpha + \beta)}{H^2(v + \beta)} \cdot dv.$$

Nach (B) erhält man aber:

$$\int e^{\pi v} \cdot \frac{H(v - \alpha) \cdot H(v - \beta)}{\Theta^2(v)} \cdot dv = \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{H'(o) \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{\pi v} \cdot \frac{\Theta(v - \alpha - \beta)}{\Theta(v)}.$$

1) Compt. Rend. T. 85. S. 732.

Gleichfalls gibt (B) für das zweite Integral, indem man

$$v + \alpha = x + iK'$$

setzt, integriert und darauf wieder v für x einführt:

$$(14) \quad \int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v) \cdot \Theta(v + \alpha - \beta)}{H^2(v + \alpha)} dv = \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{H'(o) \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{s \cdot v} \cdot \frac{H(v - \beta)}{H(v + \alpha)}.$$

Vertauscht man α mit β , so wird hieraus das dritte Integral erhalten:

$$(15) \quad \int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v) \cdot \Theta(v - \alpha + \beta)}{H^2(v + \beta)} dv = \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{H'(o) \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{s \cdot v} \cdot \frac{H(v - \alpha)}{H(v + \beta)}.$$

Schließlich ergibt sich also:

$$(C) \quad \begin{cases} k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot J_1 = \frac{H'(o)}{o \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v - \alpha - \beta)}{\Theta(v)} \\ - k' \cdot \frac{\Theta(\beta) \cdot H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot o} \cdot e^{s \cdot v} \cdot \frac{H(v - \beta)}{H(v + \alpha)} \\ + k' \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot o} \cdot e^{s \cdot v} \cdot \frac{H(v - \alpha)}{H(v + \beta)}. \end{cases}$$

Wenn man α und β mit $-\alpha$ und $-\beta$ vertauscht, dann wird hieraus erhalten:

$$(D) \quad \begin{cases} k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot J_2 = \frac{H'(o)}{o \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{-s \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v + \alpha + \beta)}{\Theta(v)} \\ - k' \cdot \frac{\Theta(\beta) \cdot H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot o} \cdot e^{-s \cdot v} \cdot \frac{H(v + \beta)}{H(v - \alpha)} \\ + k' \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot o} \cdot e^{-s \cdot v} \cdot \frac{H(v + \alpha)}{H(v - \beta)}. \end{cases}$$

Es kostet nur wenig Mühe, die Koeffizienten in (C) und (D) auf eine bequeme Form zu bringen.

Man hat:

$$\begin{aligned} -k' \cdot \frac{\Theta(\beta) \cdot H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot o} &= -k' \cdot \frac{\frac{H_1(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{\Theta_1(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(\alpha)}{\Theta(\beta)}}{\left[\left(\frac{H(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \right)^2 - \left(\frac{H(\beta)}{\Theta(\beta)} \right)^2 \right] \cdot o} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha}{(\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \beta) \cdot o} \cdot \frac{H(\alpha)}{\Theta(\beta)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)(x_2-x_1)}}{2 \cdot \sqrt{x_2-x_1} \cdot o} \cdot \frac{H(\alpha)}{\Theta(\beta)} \\ &= \sqrt{k} \cdot \frac{i v \cdot (\alpha + \mu J_R)}{2 o \cdot \sqrt{2 m g l J_R} \cdot (1+x_2)} \cdot \frac{H(\alpha)}{\Theta(\beta)}. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise wird erhalten

$$k' \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot o} = \sqrt{k} \cdot \frac{v \cdot (\alpha - \mu J_R)}{2 o \cdot \sqrt{2 m g l J_R} \cdot (1-x_2)} \cdot \frac{H(\beta)}{\Theta(\alpha)}.$$

Wir werden nun $\int \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sqrt{x}} \cdot d\theta$ berechnen. Man hat:

$$\int \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sqrt{x}} d\theta = \sin C \cdot \int \frac{\cos U \cdot \cos \theta}{\sqrt{x}} \cdot d\theta + \cos C \cdot \int \frac{\sin U \cdot \cos \theta}{\sqrt{x}} \cdot d\theta.$$

Führt man — wie früher — durch die Gleichung:

$$\cos \theta = x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v$$

die neue Variable v ein, dann ergibt sich ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sqrt{x}} \cdot d\theta &= -\frac{k}{\sqrt{2mgIJ_F}} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_3)^{\frac{3}{2}}} \cdot k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \\ (E) \cdot \left\{ (i \sin C + v \cos C) \cdot \int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)} \cdot (x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v) \cdot dv \right. \\ &\quad \left. + (i \sin C - v \cos C) \cdot \int e^{-s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)} \cdot (x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v) \cdot dv \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben hier die Integrale zu berechnen:

$$\begin{aligned} V_1 &= k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)} \cdot x_2 \operatorname{sn}^2 v \cdot dv, \\ V_2 &= k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)} \cdot x_3 \operatorname{cn}^2 v \cdot dv, \\ V_3 &= k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{-s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)} \cdot x_2 \operatorname{sn}^2 v \cdot dv, \\ V_4 &= k \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{-s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)} \cdot x_3 \operatorname{cn}^2 v \cdot dv. \end{aligned}$$

Führt man in V_1 statt $\operatorname{sn}^2 v$ den Ausdruck $\frac{1}{k} \cdot \frac{H^2(v)}{\Theta^2(v)}$ ein, so kommt

$$V_1 = x_2 \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{s \cdot v} \cdot \frac{H^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)} dv.$$

Da $\frac{H^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)}$ eine doppelperiodische Funktion zweiter Art ist mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ (zugehörige Multiplikatoren 1 und $e^{\frac{\pi i}{K} \cdot (\alpha + \beta)}$), so können wir die Hermitesche Methode zur Zerlegung einer doppelperiodischen Funktion anwenden. Das Element ist

$$f_1(v) = M \cdot \frac{\Theta(v-\alpha) \cdot \Theta(v-\beta)}{H^2(v)}.$$

M hat den früher angegebenen Wert.

Aus einer mit der früheren ganz analogen Entwicklung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} V_1 &= x_2 \cdot \frac{H^2(\alpha) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha+\beta) \cdot H(\alpha-\beta) \cdot \varpi} \cdot e^{s \cdot v} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)} \\ &\quad - x_3 \cdot \frac{H^2(\beta) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha-\beta) \cdot H(\alpha+\beta) \cdot \varpi} \cdot e^{s \cdot v} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)}. \end{aligned}$$

Vertauscht man α und β mit $-\alpha$ und $-\beta$, erhält man:

$$V_2 = -x_2 \cdot \frac{H^2(\alpha) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot \omega} \cdot e^{-s \cdot v} \cdot \frac{H(v + \beta)}{H(v - \alpha)} \\ + x_2 \cdot \frac{H^2(\beta) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \omega} \cdot e^{-s \cdot v} \cdot \frac{H(v + \alpha)}{H(v - \beta)}.$$

Gleichfalls ergibt sich

$$V_2 = k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\alpha) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \omega} \cdot e^{s \cdot v} \cdot \frac{H(v - \beta)}{H(v + \alpha)} \\ - k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\beta) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \omega} \cdot e^{s \cdot v} \cdot \frac{H(v - \alpha)}{H(v + \beta)},$$

und durch Vertauschen von α und β mit $-\alpha$ und $-\beta$:

$$V = -k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\alpha) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \omega} \cdot e^{-s \cdot v} \cdot \frac{H(v + \beta)}{H(v - \alpha)} \\ + k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\beta) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \omega} \cdot e^{-s \cdot v} \cdot \frac{H(v + \alpha)}{H(v - \beta)}.$$

Die Koeffizienten können ohne Schwierigkeit vereinfacht werden.

Man erhält:

$$x_2 \cdot \frac{H^2(\alpha) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot \omega} = x_2 \cdot \frac{\frac{H^2(\alpha)}{\Theta^2(\alpha)}}{\left[\frac{H^2(\alpha)}{\Theta^2(\alpha)} - \frac{H^2(\beta)}{\Theta^2(\beta)} \right] \cdot \omega} \cdot \frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \\ = x_2 \cdot \frac{\frac{\text{sn}^2 \alpha}{(\text{sn}^2 \alpha - \text{sn}^2 \beta)} \cdot \frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)}}{\omega} = \frac{x_2 (1 + x_3)}{2\omega} \cdot \frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)}.$$

Auf ganz analoge Weise ergibt sich

$$x_2 \cdot \frac{H^2(\beta) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot \omega} = -\frac{x_2 \cdot (1 - x_3)}{2\omega} \cdot \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)}, \\ k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\alpha) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot \omega} = -\frac{x_3 \cdot (1 + x_3)}{2\omega} \cdot \frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)}, \\ k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\beta) \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot \omega} = \frac{x_3 (1 - x_3)}{2\omega} \cdot \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)}.$$

Jetzt fehlt nur noch $\int \frac{\sin \psi}{\sqrt{X}} \cdot d\theta$. Führt man für ψ den Ausdruck

$U + C$ ein und verfährt übrigens auf die gewöhnliche Weise, so erhält man:

$$\int \frac{\sin \psi}{\sqrt{X}} \cdot d\theta = -\frac{k^2}{(x_3 - x_2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 m g l J_F}} \\ \cdot \left[(i \sin C + v \cos C) \cdot \int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v + \alpha) \cdot H(v + \beta)} dv \right. \\ \left. + (i \sin C - v \cos C) \int e^{-s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v - \alpha) \cdot H(v - \beta)} dv \right].$$

Um die zwei Integrale zu berechnen, werden wir die Funktion

$$F(v) = \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)},$$

welche doppelperiodisch und von zweiter Art ist, in Elemente zerlegen. Wir erhalten:

$$F(v) = -\frac{\Theta^2(\alpha)}{H'(\alpha) \cdot H(\alpha-\beta)} \cdot f_1(v+\alpha) + \frac{\Theta^2(\beta)}{H'(\beta) \cdot H(\alpha-\beta)} \cdot f_1(v+\beta).$$

$f_1(v)$ hat die früher angegebene Bedeutung. Demnach haben wir

$$\int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)} \cdot dv = \frac{H'(\alpha)}{H(\alpha-\beta) \cdot [\Theta(\alpha) \cdot \Theta'(\beta) + \Theta(\beta) \cdot \Theta'(\alpha)]} \\ \cdot \left\{ \Theta^2(\alpha) \cdot \int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v) \cdot \Theta(v+\alpha-\beta)}{H^2(v+\alpha)} dv - \Theta^2(\beta) \int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v) \cdot \Theta(v-\alpha+\beta)}{H^2(v+\beta)} dv \right\}.$$

Wir haben früher (14) und (15) die auf der rechten Seite stehenden zwei Integrale berechnet. Führen wir in diesen Ausdruck die dort gefundenen Werte ein, so ergibt sich

$$\int e^{s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)} \cdot dv = \frac{1}{H(\alpha-\beta) \cdot H(\alpha+\beta) \cdot \omega} \cdot e^{s \cdot v} \\ \cdot \left\{ \Theta^2(\alpha) \cdot \frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} - \Theta^2(\beta) \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)} \right\}.$$

Vertauscht man α und β mit $-\alpha$ und $-\beta$, so kommt

$$\int e^{-s \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)} dv = -\frac{1}{H(\alpha-\beta) \cdot H(\alpha+\beta) \cdot \omega} \cdot e^{-s \cdot v} \\ \cdot \left\{ \Theta^2(\alpha) \cdot \frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} - \Theta^2(\beta) \cdot \frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)} \right\}.$$

Wir haben also nach Einsetzung:

$$(F) \left\{ \int \frac{\sin \phi}{\sqrt{X}} \cdot d\theta = -\frac{k^2}{(x_2 - x_1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(\alpha)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2mgIJ_P}} \cdot \frac{1}{H(\alpha-\beta) \cdot H(\alpha+\beta) \cdot \omega} \right. \\ \cdot \left\{ (i \sin C + \nu \cos C) \cdot e^{s \cdot v} \cdot \left[\Theta^2(\alpha) \frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} - \Theta^2(\beta) \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)} \right] \right. \\ \left. \left. - (i \sin C - \nu \cos C) \cdot e^{-s \cdot v} \cdot \left[\Theta^2(\alpha) \frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} - \Theta^2(\beta) \cdot \frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)} \right] \right\} \right\}.$$

Der Ausdruck wird dadurch vereinfacht, daß wir setzen:

$$\frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(\alpha)} \cdot \frac{1}{H(\alpha-\beta) \cdot H(\alpha+\beta) \cdot \omega} = \frac{1}{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{H(\alpha)}{\Theta(\alpha)}\right)^2 - \left(\frac{H(\beta)}{\Theta(\beta)}\right)^2} \cdot \frac{1}{\omega} \\ = \frac{1}{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)} \cdot \frac{1}{k \cdot (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)} \cdot \frac{x_2 - x_1}{2k} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

Schließlich haben wir demnach

$$(G) \left\{ \int \frac{\sin \psi}{\sqrt{X}} \cdot d\theta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 m g l J_P \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \left\{ (i \sin C + \nu \cos C) \cdot e^{\omega \cdot \nu} \right. \right. \\ \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v - \beta)}{H(v + \alpha)} - \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v - \alpha)}{H(v + \beta)} \right] + (\nu \cos C - i \sin C) \cdot e^{-\omega \cdot \nu} \\ \cdot \left. \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v + \beta)}{H(v - \alpha)} - \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v + \alpha)}{H(v - \beta)} \right] \right\}.$$

Werden in (A) die in (C) und (D) gefundenen Ausdrücke eingesetzt mit den reduzierten Werten der Koeffizienten, so ergibt sich:

$$(H) \quad \int \cos \psi \cdot d\theta = \sqrt{k} \cdot \frac{\Theta(v)}{\omega \cdot H(\alpha + \beta)} \\ \cdot \left[(-i \cos C + \nu \sin C) \cdot e^{\omega \cdot \nu} \cdot \frac{\Theta(v - \alpha - \beta)}{\Theta(v)} - (i \cos C + \nu \sin C) \cdot e^{-\omega \cdot \nu} \cdot \frac{\Theta(v + \alpha + \beta)}{\Theta(v)} \right] \\ + \frac{a}{2\omega \cdot \sqrt{2 m g l J_P (x_3 - x_1)}} \cdot (\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{\omega \cdot \nu} \\ \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v - \beta)}{H(v + \alpha)} + \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v - \alpha)}{H(v + \beta)} \right] \\ - \frac{a}{2\omega \cdot \sqrt{2 m g l J_P (x_3 - x_1)}} \cdot (-\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{-\omega \cdot \nu} \\ \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v + \beta)}{H(v - \alpha)} + \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v + \alpha)}{H(v - \beta)} \right] \\ + \frac{\mu J_R}{2\omega \cdot \sqrt{2 m g l J_P \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot (\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{\omega \cdot \nu} \\ \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v - \beta)}{H(v + \alpha)} - \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v - \alpha)}{H(v + \beta)} \right] \\ - \frac{\mu J_R}{2\omega \cdot \sqrt{2 m g l J_P \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot (-\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{-\omega \cdot \nu} \\ \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v + \beta)}{H(v - \alpha)} - \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v + \alpha)}{H(v - \beta)} \right].$$

Führt man in (E) die für V_1, V_2, V_3, V_4 gefundenen Werte und die vereinfachten Koeffizienten ein, so erhält man:

$$(I) \quad \int \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sqrt{X}} d\theta = \frac{1}{2\omega \sqrt{2 m g l J_P \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot (\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{\omega \cdot \nu} \\ \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v - \beta)}{H(v + \alpha)} + \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v - \alpha)}{H(v + \beta)} \right] - \frac{1}{2\omega \cdot \sqrt{2 m g l J_P \cdot (x_3 - x_1)}} \\ \cdot (-\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{-\omega \cdot \nu} \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v + \beta)}{H(v - \alpha)} + \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v + \alpha)}{H(v - \beta)} \right].$$

Nach Addition von (G), (H) und (L) ergibt sich:

$$(M) \quad \int \cos \psi \cdot d\theta + a \cdot \int \frac{\sin \psi \cos \theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta + \mu J_R \cdot \int \frac{\sin \psi}{\sqrt{X}} d\theta = e^{iC+s \cdot \psi} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-iC-s \cdot \psi} F_2(v; h, a, \mu),$$

$F_1(v; h, a, \mu)$ und $F_2(v; h, a, \mu)$ sind doppelperiodische Funktionen zweiter Art mit den Perioden $2K$ und $2iK'$. Die zugehörigen Multiplikatoren sind für F_1 : 1 und $e^{\frac{\pi i}{K} \cdot (a+\beta)}$, für F_2 : 1 und $e^{-\frac{\pi i}{K} \cdot (a+\beta)}$.

Die Ausdrücke für diese Funktionen sind

$$(N) \quad F_1(v; h, a, \mu) = \frac{iH'(v)}{s \cdot H(a+\beta)} \cdot \frac{\Theta(v-a-\beta)}{\Theta(v)} + \frac{v}{s \cdot \sqrt{2mglJ_R \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \left[(a + \mu J_R) \cdot \frac{\Theta(a)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} + (a - \mu J_R) \cdot \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(a)} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)} \right],$$

$$(P) \quad F_2(v; h, a, \mu) = \frac{i \cdot H'(v)}{s \cdot H(a+\beta)} \cdot \frac{\Theta(v+\alpha+\beta)}{\Theta(v)} + \frac{v}{s \cdot \sqrt{2mglJ_R \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \left[(a + \mu J_R) \cdot \frac{\Theta(a)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} + (a - \mu J_R) \cdot \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(a)} \cdot \frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)} \right].$$

Wird von den Potenzen von n von höherem als dem ersten Grade abgesehen, so ist nach III (3)

$$J_R \int \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{\sqrt{X}} = t + L,$$

und wir haben (III, (7), (M))

$$(Q) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= -ht + \mu J_R \cdot \varphi + \int \frac{\sqrt{X}}{\sin \theta} \cdot d\theta + a\psi + b + na \sin \lambda \cdot (t + L) \\ &+ nJ_R \cos \lambda \cdot [e^{iC+s \cdot \psi} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-iC-s \cdot \psi} \cdot F_2(v; h, a, \mu)]. \end{aligned} \right.$$

Die Integrale der Bewegungsgleichungen des Kreisels werden bekanntlich aus (Q) durch Differentiation in bezug auf h , a und μ gebildet.

Nun ist

$$X = J_P \cdot (1 - x^2) \cdot (2h + 2mglx - \mu^2 J_R) - (a - \mu J_R x)^2$$

und demnach:

$$\frac{dX}{dh} = 2J_P \cdot (1 - x^2),$$

$$\frac{dX}{da} = -2(a - \mu J_R x),$$

$$\frac{dX}{d\mu} = 2(a - \mu J_R x) \cdot J_R x - 2\mu J_R J_P \cdot (1 - x^2).$$

Also ist

$$\frac{d}{dh} \int \frac{\sqrt{X}}{\sin \theta} \cdot d\theta = -J_P \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\frac{d}{da} \int \frac{\sqrt{X}}{\sin \theta} \cdot d\theta = \int \frac{a - \mu J_R x}{(1-x^2)\sqrt{X}} \cdot dx,$$

$$\frac{d}{d\mu} \int \frac{\sqrt{X}}{\sin \theta} \cdot d\theta = J_R \cdot \int \frac{\mu J_R - ax}{(1-x^2)\sqrt{X}} dx + \mu J_R \cdot (J_R - J_P) \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Die drei Bewegungsgleichungen im integrierten Zustande sind demnach:

$$(a) \quad -t - J_P \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + n J_P \cos \lambda \cdot$$

$$\frac{d}{dh} [e^{v i C + s \cdot v} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-v i C - s \cdot v} \cdot F_2(v; h, a, \mu)] = L_1,$$

$$(b) \quad \psi + \int \frac{a - \mu J_R x}{(1-x^2)\sqrt{X}} dx + n \sin \lambda \cdot (t + L)$$

$$+ n J_P \cos \lambda \cdot \frac{d}{da} [e^{v i C + s \cdot v} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-v i C - s \cdot v} \cdot F_2(v; h, a, \mu)] = L_2,$$

$$(c) \quad \varphi + \mu (J_R - J_P) \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{\mu J_R - ax}{(1-x^2)\sqrt{X}} dx$$

$$+ n \cdot \frac{J_P}{J_R} \cos \lambda \cdot \frac{d}{d\mu} [e^{v i C + s \cdot v} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-v i C - s \cdot v} \cdot F_2(v; h, a, \mu)] = L_3.$$

Sei nun angenommen, daß am Anfang der Bewegung

$$t = t_0, \quad x = x_3, \quad \psi = \psi_0 \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_0$$

ist. Wir haben früher gefunden (III (5)), wenn man den Einfluß der Drehung der Erde vernachlässigt:

$$\cos \theta = x_3 \operatorname{sn}^2 u + x_2 \operatorname{cn}^2 u,$$

wo

$$u = (t - t_0) \cdot \sqrt{\frac{mg l \cdot (x_2 - x_1)}{2 J_P}}.$$

Da wir keine Größen berücksichtigen, welche unendlich klein von höherer Ordnung als die erste sind, so können wir, nachdem die partielle Differentiation in Bezug auf h , a und μ ausgeführt worden ist, in den Gliedern, welche den Faktor n enthalten,

$$v = u$$

setzen. Wir haben für ψ die Größe $U + C$ eingeführt. Also haben wir am Anfang der Bewegung

$$\psi_0 = C + (U)_{t=t_0},$$

$t = t_0$ gibt aber $r = 0$, und mithin ist

$$(U)_{t=t_0} = 0,$$

so daß

$$C = \psi_0$$

Wir haben dann aus (a), (b) und (c) die Bewegungsgleichungen auf die folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad t - t_0 &= -J_P \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{X}} + n J_P \cos \lambda \\ &\cdot \left\{ \frac{d}{dh} [e^{i\psi_0 + s \cdot \nu} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-i\psi_0 - s \cdot \nu} \cdot F_2(v; h, a, \mu)] \right\}_{s=0}^{s=\infty}, \\ \text{(e)} \quad \psi - \psi_0 &= - \int_{x_0}^x \frac{a - \mu J_R \cdot x}{(1-x^2)\sqrt{X}} dx - n \sin \lambda \cdot (t - t_0) - n J_P \cos \lambda \\ &\cdot \left\{ \frac{d}{ds} [e^{i\psi_0 + s \cdot \nu} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-i\psi_0 - s \cdot \nu} \cdot F_2(v; h, a, \mu)] \right\}_{s=0}^{s=\infty}, \\ \text{(f)} \quad \varphi - \varphi_0 &= \mu J_R \cdot \left(\frac{1}{J_R} - \frac{1}{J_P} \right) \cdot J_P \cdot \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{X}} - \int_{x_0}^x \frac{\mu J_R - ax}{(1-x^2)\sqrt{X}} dx - n \frac{J_P}{J_R} \cos \lambda \\ &\cdot \left\{ \frac{d}{ds} [e^{i\psi_0 + s \cdot \nu} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-i\psi_0 - s \cdot \nu} \cdot F_2(v; h, a, \mu)] \right\}_{s=0}^{s=\infty}. \end{aligned}$$

Man sieht hieraus, daß die Bewegungsgleichungen keine unausführbaren Quadraturen enthalten, indem wir die in (d), (e) und (f) vorkommenden Integrale früher untersucht haben.

Aus (d), (e) und (f) erhalten wir ohne Schwierigkeit die Bewegungsgleichungen im Falle

$$\nu_1 = -\nu_2 = \nu.$$

In III (9) haben wir gefunden:

$$\psi - C = \frac{\nu_1}{2i} \cdot \left[2 \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \cdot v + \log \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\alpha)} \right] + \frac{\nu_2}{2i} \cdot \left[2 \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \cdot v + \log \frac{H(v-\beta)}{H(v+\beta)} \right],$$

und wir erhalten also in diesem Falle:

$$\psi - C = \frac{\nu}{2i} \cdot \left\{ 2 \left(\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} - \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \right) \cdot v + \log \frac{H(v-\alpha) \cdot H(v+\beta)}{H(v+\alpha) \cdot H(v-\beta)} \right\}.$$

Wird wie früher $\cos \theta = x = x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v$ gesetzt, so ergibt sich, daß man die Bewegungsgleichungen in diesem Falle bilden kann durch Vertauschen von β mit $-\beta$ in (d), (e) und (f).

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\sigma = \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} - \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)},$$

$$F_3(v; h, a, \mu) = \frac{iH'(v)}{\sigma \cdot H(\alpha - \beta)} \cdot \frac{\Theta(v - \alpha + \beta)}{\Theta(v)} + \frac{v}{\sigma \cdot \sqrt{2mglJ_P \cdot (x_3 - x_1)}}$$

$$\cdot \left[(a + \mu J_R) \frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v + \beta)}{H(v + \alpha)} + (a - \mu J_R) \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v - \alpha)}{H(v - \beta)} \right],$$

$$F_4(v; h, a, \mu) = \frac{iH'(v)}{\sigma \cdot H(\alpha - \beta)} \cdot \frac{\Theta(v + \alpha - \beta)}{\Theta(v)} + \frac{v}{\sigma \cdot \sqrt{2mglJ_P \cdot (x_3 - x_1)}}$$

$$\cdot \left[(a + \mu J_R) \frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v - \beta)}{H(v - \alpha)} + (a - \mu J_R) \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v + \alpha)}{H(v + \beta)} \right],$$

dann wird demnach:

$$(d') \quad t - t_0 = -J_P \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{X}} + nJ_P \cos \lambda$$

$$\cdot \left\{ \frac{d}{dh} [e^{v i \psi_0 + \sigma \cdot v} \cdot F_3(v; h, a, \mu) + e^{-v i \psi_0 - \sigma \cdot v} \cdot F_4(v; h, a, \mu)] \right\}_{v=0}^{v=u},$$

$$(e') \quad \psi - \psi_0 = - \int_{x_1}^x \frac{a - \mu J_R x}{(1 - x^2) \sqrt{X}} dx - n \sin \lambda \cdot (t - t_0) - nJ_P \cos \lambda$$

$$\cdot \left\{ \frac{d}{dh} [e^{v i \psi_0 + \sigma \cdot v} \cdot F_3(v; h, a, \mu) + e^{-v i \psi_0 - \sigma \cdot v} \cdot F_4(v; h, a, \mu)] \right\}_{v=0}^{v=u},$$

$$(f') \quad \varphi - \varphi_0 = \mu J_R \cdot \left(\frac{1}{J_R} - \frac{1}{J_P} \right) \cdot J_P \cdot \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{X}} - \int_{x_1}^x \frac{\mu J_R - ax}{(1 - x^2) \sqrt{X}} dx - n \frac{J_P}{J_R} \cdot \cos \lambda$$

$$\cdot \left\{ \frac{d}{dh} [e^{v i \psi_0 + \sigma \cdot v} \cdot F_3(v; h, a, \mu) + e^{-v i \psi_0 - \sigma \cdot v} \cdot F_4(v; h, a, \mu)] \right\}_{v=0}^{v=u}.$$

In (f) und (f') müssen wir uns $J_P \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{X}}$, — aus (d), beziehungsweise (d'), genommen — eingesetzt denken.

Man sieht, daß wenn $J_R = J_P$ (d. h. die Trägheitsellipsoide in einer Kugel bestehen), die Ausdrücke für ψ und φ von ganz derselben Art sind.

Wird

$$\sqrt{\frac{mgl(x_3 - x_1)}{2J_P}} \cdot J_P \cos \lambda$$

$$\cdot \left\{ \frac{d}{dh} [e^{v i \psi_0 + \sigma \cdot v} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-v i \psi_0 - \sigma \cdot v} \cdot F_2(v; h, a, \mu)] \right\} = \varepsilon$$

gesetzt, so erhält man unmittelbar aus (d)

$$\cos \theta = x_2 \cdot \operatorname{sn}^2(u - n\varepsilon) + x_3 \operatorname{cn}^2(u - n\varepsilon),$$

und man muß daher in den Gliedern, die nicht den Faktor n enthalten,

$$v = u - n\varepsilon$$

setzen.

Wir haben früher gefunden:

$$\int \frac{a - \mu J_R \cos \theta}{\sin \theta \cdot \sqrt{X}} \cdot d\theta = - \int \frac{a - \mu J_R x}{(1 - x^2) \sqrt{X}} dx = \frac{v}{2i} \\ \cdot \left\{ 2\varpi \cdot v + \log \frac{H(v - \alpha) \cdot H(v - \beta)}{H(v + \alpha) \cdot H(v + \beta)} \right\} + C,$$

und es ist demnach:

$$\int \frac{a - \mu J_R x}{(1 - x^2) \sqrt{X}} dx = \frac{v}{2i} \cdot \left\{ 2\varpi(u - n\varepsilon) + \log \frac{H(u - \alpha - n\varepsilon) \cdot H(u - \beta - n\varepsilon)}{H(u + \alpha - n\varepsilon) \cdot H(u + \beta - n\varepsilon)} \right\}.$$

ε enthält Glieder, die proportional mit der Zeit sind. Denkt man sich aber die Bewegung nicht länger fortgesetzt, als daß man $n\varepsilon$ hinreichend klein annehmen kann, dann können wir in eine Reihe entwickeln, und wenn man nur die erste Potenz von n berücksichtigt, ergibt sich:

$$\log \frac{H(u - \alpha - n\varepsilon) \cdot H(u - \beta - n\varepsilon)}{H(u + \alpha - n\varepsilon) \cdot H(u + \beta - n\varepsilon)} = \log \frac{H(u - \alpha) \cdot H(u - \beta)}{H(u + \alpha) \cdot H(u + \beta)} - n\varepsilon \\ \cdot \left[\frac{H'(u - \alpha)}{H(u - \alpha)} - \frac{H'(u + \alpha)}{H(u + \alpha)} + \frac{H'(u - \beta)}{H(u - \beta)} - \frac{H'(u + \beta)}{H(u + \beta)} \right].$$

Die Größe in der Klammer ist doppelperiodisch erster Art mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ und den Unendlichkeitsstellen α , $-\alpha$, β , $-\beta$.

Die Hauptteile der Reihenentwickelungen der Funktion in der Umgebung dieser Unendlichkeitsstellen sind für α und β : $\frac{1}{\varepsilon}$, für $-\alpha$ und $-\beta$: $-\frac{1}{\varepsilon}$.

Bilden wir die Funktion

$$\frac{2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \alpha},$$

so sieht man, daß diese die Unendlichkeitsstellen α und $-\alpha$ hat mit denselben Hauptteilen in deren Umgebungen, nämlich $\frac{1}{\varepsilon}$ und $-\frac{1}{\varepsilon}$.

Wir können dann setzen

$$\frac{H'(u-\alpha)}{H(u-\alpha)} - \frac{H'(u+\alpha)}{H(u+\alpha)} + \frac{H'(u-\beta)}{H(u-\beta)} - \frac{H'(u+\beta)}{H(u+\beta)} = \frac{2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \alpha} \\ + \frac{2 \operatorname{sn} \beta \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \beta}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \beta} + C;$$

führt man in dieser Gleichung $n = 0$ ein, so ergibt sich

$$C = 2 \cdot \frac{\operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha} + 2 \cdot \frac{\operatorname{cn} \beta \cdot \operatorname{dn} \beta}{\operatorname{sn} \beta} - 2 \cdot \frac{H'(\alpha)}{H(\alpha)} - 2 \cdot \frac{H'(\beta)}{H(\beta)}.$$

Führt man jetzt für $-\int_{x_0}^x \frac{a - \mu J_R \cdot x}{(1-x^2) \cdot \sqrt{X}} \cdot dx$ den Wert in (e) ein und bemerkt, daß

$$\frac{H'(\alpha)}{H(\alpha)} - \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} = \frac{\operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha}, \quad \frac{H'(\beta)}{H(\beta)} - \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} = \frac{\operatorname{cn} \beta \cdot \operatorname{dn} \beta}{\operatorname{sn} \beta}$$

ist, so erhält man die zweite Bewegungsgleichung:

$$-\psi_0 = \frac{\nu}{2i} \cdot \left\{ 2\bar{\omega} \cdot u + \log \frac{H(u-\alpha) \cdot H(u-\beta)}{H(u+\alpha) \cdot H(u+\beta)} - 2n \cdot \varepsilon \cdot \left[\frac{\operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{sn} \beta \cdot \operatorname{cn} \beta \cdot \operatorname{dn} \beta}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \beta} \right] \right\} \\ n \sin \lambda \cdot (t - t_0) - n J_P \cos \lambda \cdot \left\{ \frac{d}{da} [e^{\nu i \psi_0 + \bar{\omega} \cdot \nu} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-\nu i \psi_0 - \bar{\omega} \cdot \nu} \cdot F_2(v; h, a, \mu)] \right\}.$$

Es ist leicht, auf gleiche Weise den Ausdruck für $(\varphi - \varphi_0)$ zu bilden. Ich will mich aber nicht dabei aufhalten und gleichfalls nicht bei der Behandlung der Gleichungen (d'), (e'), (f'), welche nun selbstverständlich ist. Die Ableitungen in Bezug auf h , a und μ werden ohne Mühe bestimmt.

Man sieht, daß in allen Fällen die Bewegungsgleichungen keine unausführbaren Quadraturen enthalten.

**Über die stetige Erzeugung gewisser Schleifenkurven,
die einen beliebigen Winkel in gleiche Teile teilen.**

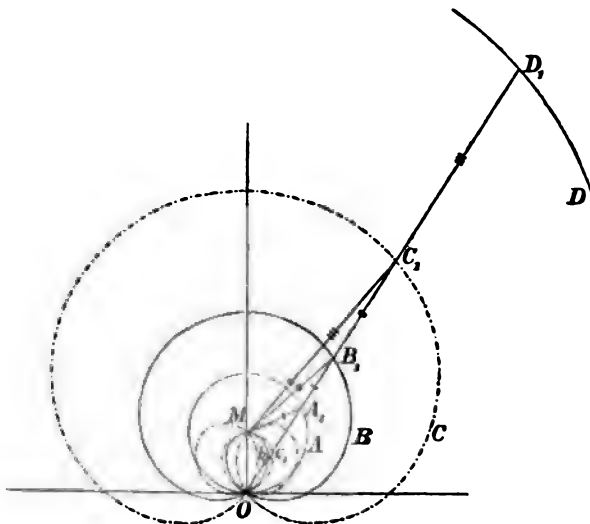
Von A. KEMPE in Rotterdam.

Wir verdanken Pascal die Erfindung, aus dem Kreise (gewissermaßen als Generatrix) den Limaçon entstehen zu lassen. Es ist aber noch nicht versucht worden — wenigstens nach meinem besten Wissen — dieses Verfahren fortzusetzen und aus dem Limaçon neue Kurven zu erzeugen, ähnlich wie jener aus dem Kreise entsteht.

Vor einiger Zeit habe ich diesen Versuch gemacht und Kurven gefunden, die, ihrer Form und Eigenschaften wegen, dem Studium wohl einiges Interesse verleihen.

Fig. 1.

Fig. 1.



Ich verdanke es der Güte des Herrn J. Neuberg in Lüttich, daß die *Mém. de la Société royale des Sciences de Liège*, 2^e sér. t. XX, 1898 eine Abhandlung über diese Kurven enthalten und daß vor kurzem Herr Gino Loria in seinem Buche: *Über spezielle algebraische und transzendente Kurven* (Deutsche

Übersetzung von Fr. Schütte, Leipzig 1902, B. G. Teubners Verlag)
sie in dem Abschnitte *Sectrixkurven* erwähnt hat.

Es soll nun im folgenden dargetan werden, wie man sie stetig erzeugen kann: doch mögen einige kurze Notizen über sie, zum besseren Verständnis der Konstruktion, vorangehen.

Wir verallgemeinern nämlich das Pascalsche Gesetz und verlängern die aus dem festen Punkte O gezogenen Linien (Fig. 1) so, daß wir von ihren Schnittpunkten mit den aus einander entstehenden Kurven Strecken abtragen, die ihrem Abstände vom Mittelpunkte M des Kreises A gleich sind.

Ist also Kurve B (Fig. 1) der Pascalsche Limaçon und ist jede Strecke A_1B_1 dem Radius R des Kreises A gleich — die Strecken sind nach beiden Seiten des Punktes A_1 auf OA_1 abgesetzt worden, $A_1B_1 = A_1b_1$ — so ist Kurve C ähnlich gebaut, nur ändert sich $B_1C_1 = B_1c_1 = B_1M$ bei jedem B . Sie hat drei Schleifen. Ebenso entsteht Kurve D aus C : es ist $C_1D_1 = C_1d_1 = C_1M$. Sie hat sieben Schleifen. Usw.

Die n te Kurve K_n entsteht aus Kurve K_{n-1} , indem man $K_{n-1}K_1 = K_{n-1}k_1 = K_{n-1}M$ macht. Sie hat $2^n - 1$ Schleifen.

Die Kurven $A, B, C \dots K_n$ haben die Eigenschaft, daß sie jeden beliebigen bei M gegebenen Winkel μ beziehentlich in zwei, drei, fünf $\dots 2^n + 1$ gleiche Teile teilen, wie man leicht aus Fig. 2 ersieht,

Fig. 2.

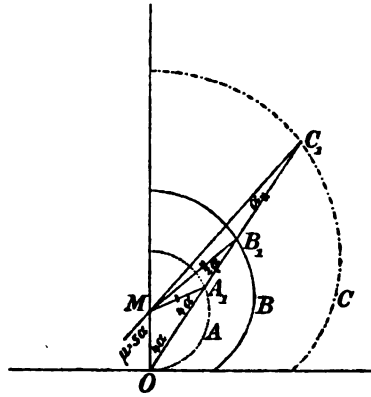
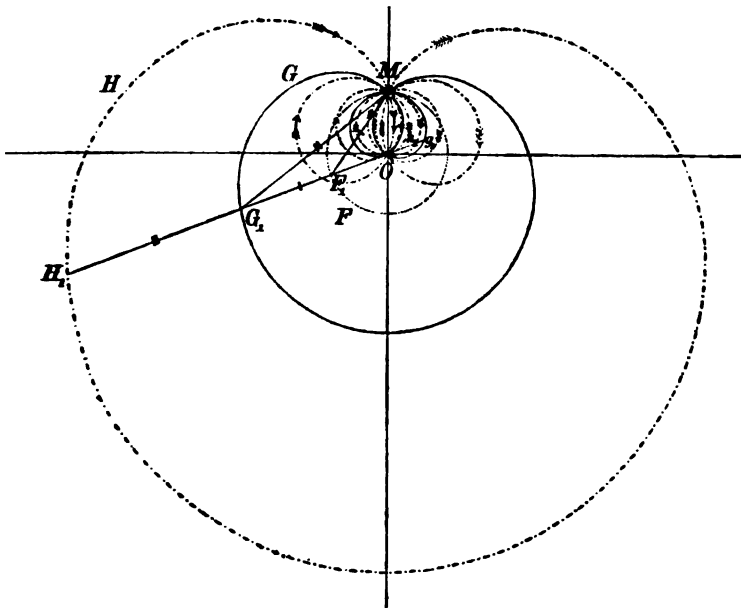


Fig. 3.



wo wir den Beweis für $5 = 2^2 + 1$ angeben. Diese Kurven können also $(2^n + 1)$ -Teiler genannt werden und sind völlig als Sectrixkurven zu bezeichnen.

Wenn wir im Kreise die Punkte M und O so vertauschen, daß O in den Mittelpunkt des Kreises und M auf die Peripherie kommt, aber wieder aus O beliebig viele Geraden ziehen und von ihrem Schnittpunkte mit dem Kreise und mit den daraus erzeugten Kurven Strecken abtragen, die jedesmal dem Abstände vom Punkte M gleich sind, so erhalten wir (Fig. 3)

die Kurve G , wo $F_1 G_1 = F_1 g_1 = F_1 M$; sie hat zwei Schleifen, ferner „ „ H , „ $G_1 H_1 = G_1 h_1 = G_1 M$; „ „ sechs „ „ usw. „ „ L_n „ $L_{n-1} L_n = L_{n-1} l_n = L_{n-1} M$; „ „ $2n-2$ „ „

Diese Kurven haben die Eigenschaft, jeden beliebigen Winkel μ bei M beziehentlich in ein, drei, sieben ... $2^n - 1$ gleiche Teile zu teilen, wie man leicht aus der Fig. 4 ersieht, wo der Beweis für $7 = 2^3 - 1$ gegeben ist. Man kann sie füglich $(2^n - 1)$ -Teiler nennen.

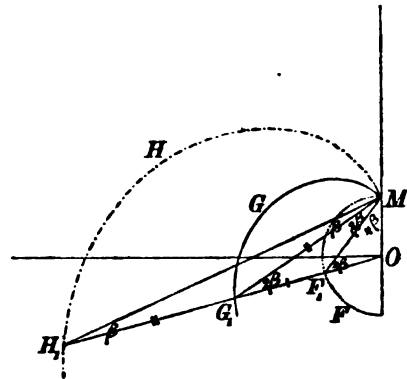
Nehmen wir die beiden Systeme zusammen, so haben wir folgendes Schleifengesetz:

$(2^n + 1)$ -Teiler: 1 3 7 15 31 ... $2n - 1$ Schleifen,

$(2^n - 1)$ - „ : 2 6 14 30 ... $2n - 2$ „ „

Weit wichtiger ist jedoch der Dienst, den das Zusammenzeichnen (Fig. 5) der Kurven uns bezüglich der Teilung leistet. Wird nämlich

Fig. 4.



Winkel μ bei M derart gezeichnet, daß sein einer Schenkel Transversale $H_1 G_1 F_1 M A_1 B_1 C_1$ des ganzen Systems wird, so erhält man den Winkel gleichzeitig in $1:(2^n + 1)$ und in $1:(2^n - 1)$ Teile geteilt, denn es ist

$$\sphericalangle H_1 = \frac{1}{7}\mu, \quad \sphericalangle G = \frac{1}{3}\mu,$$

$$\sphericalangle F_1 = \mu, \quad \sphericalangle A_1 = \frac{1}{3}\mu,$$

$$\sphericalangle B_1 = \frac{1}{3}\mu, \quad \sphericalangle C_1 = \frac{1}{3}\mu$$

usw.

Da nun (nach Fermats Theorem) jede Primzahl p in $(2^{p-1} - 1)$ aufgeht und $2^{p-1} - 1 = \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = (2^n - 1)(2^n + 1)$, so erhält man unmittelbar, daß der Winkel μ hiermit ganz allgemein in alle möglichen Anzahlen gleicher Teile geteilt ist, denn $\frac{2^n \pm 1}{p} = m$ oder $\frac{1}{p} = m \times \frac{1}{2^n \pm 1}$. So z. B. geht 19 in $(2^{18} - 1)$ auf, also entweder

Es hat nun der Punkt B_1 den Bogen BB_1 des Limaçons B beschrieben.

Man überzeugt sich ganz leicht davon, da I_1M den Winkel K_1MH_1 und dessen Gegenwinkel halbiert, $MP \parallel OA_1$ deshalb $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \delta = \sphericalangle \beta$ ist, also $MA_1 = A_1B_1$.

Läßt man nun den Schnittpunkt B_1 , nachdem der Limaçon beschrieben ist und wo B_1 jetzt der verlängerten K_2M und G_1O angehört (also MK_1 die Stellung MK_2 und der Gelenkmechanismus die Stellung $G_1OMH_1 - I_2K_2M$ annimmt), läßt man, wie gesagt, B_1 den Limaçon B beschreiben, so beschreibt jetzt der Schnittpunkt C_1 der verlängerten I_1M und G_1O den Fünfteiler C .

Es ist nämlich wieder wie zuvor $MB_1 = B_1C_1$.

Es kann also mit diesem Gelenkmechanismus jede folgende Kurve aus der ihr unmittelbar vorangehenden stetig beschrieben werden, ebenso wie sie auch theoretisch auseinander entstehen.

Hiermit sind die $(2^n + 1)$ -Teiler vollständig konstruiert.

Es möge hierbei erwähnt werden, daß es möglich ist, mit fehlerfreier Kreisdrehung der MA_1 alle Kurven B, C, D usw. zu erzeugen, wenn man nur den Mechanismus genügend ausbildet.

Man gebe dazu jeder Kurve ihre Raute, demgemäß, daß jede folgende Raute ihre Seite auf der Diagonale der vorhergehenden habe, wie z. B. die Rauten $MK_2I_2H_1$ und $MK_1I_1H_1$, die zu den Kurven C und B gehören. Die gewissermaßen feste Raute MH_1G_1O gehört dem Grundkreise A an.

Um also mehrere Kurven D u. s. w. zu beschreiben, braucht man außer der festen Kreisraute MH_1G_1O ebensoviele bewegliche Rauten wie Kurven gewünscht sind. *Beschreibt dann der Schnittpunkt A_1 seinen Kreis A , so beschreiben zugleich die Punkte B_1, C_1, D_1 usw. ihre Kurven B, C, D usw.*

Dies ist aber vielleicht theoretisch denkbar, jedoch für die Praxis ist es unausführbar, wie ich meine.

Es folgt nun die stetige Erzeugung der $(2^n - 1)$ -Teiler.

Man lege den Gelenkmechanismus Fig. 6 um, sodaß die Stellung Fig. 7 eingenommen wird und lasse nun den Schnittpunkt der verlängerten K_1M und G_1O , also F_1 , den Kreis OM beschreiben: *Der Schnittpunkt L_1 der verlängerten I_1M und G_1O wird die Kurve L beschreiben.*

Weiter: *Beschreibt der Schnittpunkt L_1 die Kurve L , so wird der Schnittpunkt N_1 der verlängerten I_2M und G_1O die Kurve N beschreiben usw.*

Die durch Eigengewicht verursachte Deformation eines längs einer Mantellinie unterstützten Kreis-Cylinders.

Von H. HEIMANN in Zwickau i. S.

In der Praxis pflegt man Cylinder in *derjenigen Lage auszubohren, in der sie später gebraucht werden*, um von der durch Eigengewicht eintretenden Deformation unabhängig zu werden. Es läßt sich fragen, von welchem Cylinderdurchmesser an ist diese Regel der Praxis berechtigt? Das folgende ist eine Versuch zur Beantwortung dieser Frage.

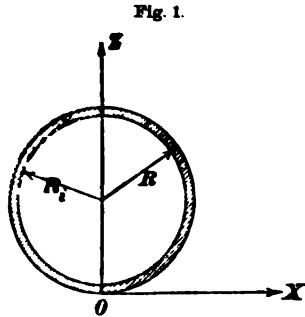


Fig. 1.

Man wähle das Koordinatensystem so, daß die xy -Ebene Stützebene des Cylinders wird und die y -Achse mit der gestützten Mantellinie zusammenfällt. (Fig. 1.) Die Grundgleichungen der Elasti-

zitätstheorie lauten in der Fassung von Clebsch¹⁾, wenn der Querkontraktionskoeffizient mit $\frac{1}{m}$ statt μ bezeichnet wird:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} + 2 \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{X}{E} = 0 \\ \Delta v + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} + 2 \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{Y}{E} = 0 \\ \Delta w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} + 2 \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{Z}{E} = 0 \end{cases}$$

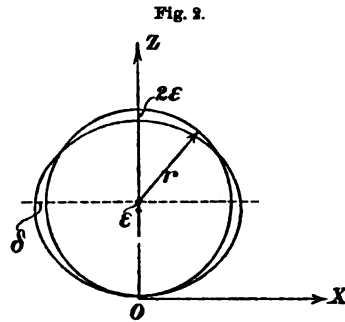
Dabei ist $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $e \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, und X, Y, Z sind die inneren Kräfte. Im vorliegenden Falle ist $X = Y = 0, Z = \gamma$, wenn γ das Gewicht der Volumeinheit bedeutet. Die Verschiebung v längs der y -Achse ist gegen die Querverschiebungen u und w vernachlässigbar, und da bei der eintretenden Deformation eine Mantellinie *grad* bleiben wird, können u und w als Funktionen von x und z allein betrachtet werden. Die Gleichungen 1 gehen dadurch über in:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + 2 \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\gamma}{E} = 0. \end{cases}$$

1) Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1894. S. 264 u. f.

Durch Einführung der Stützkkräfte in die Grenzbedingungen wird das Problem erst zu einem bestimmten. Die Stützkkräfte selbst hängen von der Deformation der Unterlage ab, eine allgemein zulässige Annahme über sie ist kaum aufstellbar. Daher scheint es richtiger, von bestimmten Voraussetzungen über die eintretende Deformation auszugehen und durch experimentell bestimmte Konstanten den Abweichungen der wirklichen Stützung von der vorausgesetzten Rechnung zu tragen.

Im folgenden wird angenommen, daß alle vorher auf einem zum Mantelkreis konzentrischen Kreise vom Radius r gelegenen Elemente nach eingetretener Deformation auf einer Ellipse liegen mit den Halbachsen $r + \delta$ und $r - \varepsilon$. (Fig. 2.)



Für dünnrandige Cylinder lautet gemäß dem gewählten Koordinatensystem die Gleichung eines beliebigen konzentrischen Kreises hinreichend genau:

$$(3) \quad z^2 - 2Rz + x^2 = 0,$$

wenn R der Radius des Mantelkreises ist.

Die Gleichung der entsprechenden Ellipse nach eingetretener Deformation wird:

$$(4) \quad \frac{(z+w)^2 - 2(z+w)(R-\varepsilon)}{(R-\varepsilon)^2} + \frac{(x+w)^2}{(R+\delta)^2} = 0,$$

wenn u und w die Verschiebungen eines Punktes mit den Koordinaten x, z bedeutet.

Unter Benutzung von (3) und Vernachlässigung kleiner Größen II. Ordnung geht (4) über in:

$$w(z-R) + \varepsilon \cdot \frac{z^2 - Rz}{R} + u \cdot x - x^2 \cdot \frac{\delta}{R} = 0,$$

also

$$u = w \cdot \frac{R-z}{x} + \varepsilon \cdot \frac{Rz-z^2}{R} + x \cdot \frac{\delta}{R};$$

Man setze: $w = -\varepsilon \cdot \frac{z}{R} + \varphi(x, z)$, dann wird

$$(5) \quad \begin{cases} u = x \cdot \frac{\delta}{R} + \frac{R-z}{x} \cdot \varphi \\ w = -\varepsilon \cdot \frac{z}{R} + \varphi. \end{cases}$$

Führt man die Werte (5) in die Gleichungen (2) ein, so erhält man für φ folgende beiden Bedingungsgleichungen:

$$(6) \begin{cases} 2 \cdot \frac{m-1}{m-2} \cdot \frac{R-s}{x} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2\varphi}{x^2} \right\} + \frac{1}{x} \left\{ (R-s) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{2\partial \varphi}{\partial z} \right\} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2} \left\{ \frac{R-s}{x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{R-s}{x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\varphi}{x^2} \right\} + 2 \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\gamma}{E} = 0 \end{cases}$$

Eine Lösung für φ , die den Gleichungen (6) genügt, ist:

$$\varphi = a_0 x^2 + a_1 x.$$

w , also auch φ , muß aber eine grade Funktion von x sein, d. h. $a_1 = 0$.

Für a_0 folgt aus den Gleichungen (6):

$$a_0 = 2 \cdot \frac{(m+1)(m-2)}{m(4-m)} \cdot \frac{\gamma}{E}.$$

Mit diesen Werten folgt:

$$(7) \begin{cases} u = x \cdot \left\{ \frac{\delta}{R} + 2 \cdot (R-s) \cdot \frac{(m+1)(m-2)}{m(4-m)} \cdot \frac{\gamma}{E} \right\} \\ w = -\varepsilon \cdot \frac{s}{R} + 2 \cdot \frac{(m+1)(m-2)}{m(4-m)} \cdot \frac{\gamma}{E} \cdot x^2. \end{cases}$$

Die Konstanten δ und ε werden gemäß Figur 3 aus den Bedingungen bestimmt:

$$(8) \begin{cases} 2 \cdot \int_{R_i}^R t_{33} dx = \frac{R+R_i}{2} \cdot \pi \cdot (R-R_i) \cdot \gamma, \text{ für } s=R, \text{ und} \\ \int_{R+R_i}^{2R} t_{11} \cdot s \cdot dz + \int_0^{R-R_i} t_{11} s \cdot dz = \frac{R+R_i}{2} \pi \cdot (R-R_i) \cdot \gamma \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{R+R_i}{2}, \text{ für } s=0; \end{cases}$$

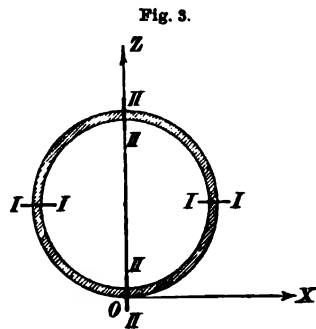
denn die Stützkkräfte im Schnitt I I müssen das Gewicht der oberen Cylinderhälfte aufnehmen, während das Moment der Spannungen im

Schnitt II II in Bezug auf den Drehpunkt O dem durch die Schwere hervorgerufenen Moment das Gleichgewicht zu halten hat.

Drückt man t_{33} und t_{11} durch die Verschiebungen u und w aus, so erhält man für δ und ε bei Vernachlässigung kleiner Größen II. Ordnung:

$$(9) \begin{cases} \delta = \frac{m+1}{m^2} \frac{R^2 \gamma}{E} \left\{ \frac{(m+2)(m-1)}{4-m} - \frac{\pi}{2} \right\} \\ \varepsilon = \frac{m+1}{m^2} \frac{R^2 \gamma}{E} \left\{ \frac{m+1}{4-m} - \frac{\pi}{2} (m-1) \right\}. \end{cases}$$

Für Metalle liegt m zwischen 3 und 4; aus den Formeln folgt eine starke Abhängigkeit der Deformation von dem Werte m . Daher müssen



δ , ε und a_0 für ein bestimmtes Material, ganz abgesehen von dem Unterschiede der vorausgesetzten zur wirklichen Stützung, jeweils durch Versuch bestimmt werden.

Sind die gemessenen Werte für einen Cylinderhalbmesser R' der Reihe nach gleich a'_0 , δ' , ε' , so sind sie für einen Cylinderhalbmesser R gleich $a'_0 \cdot \frac{R^2}{R'^2}$, $\delta' \cdot \frac{R^2}{R'^2}$, $\varepsilon' \cdot \frac{R^2}{R'^2}$.

Es wird dann:

$$(10) \quad \begin{cases} u = x \left\{ \frac{1}{R} \delta' \cdot \frac{R^2}{R'^2} + (R - x) a'_0 \frac{R^2}{R'^2} \right\} \\ w = - \varepsilon' \cdot \frac{R^2}{R'^2} \cdot \frac{x}{R} + a'_0 \frac{R^2}{R'^2} \cdot x^2. \end{cases}$$

Die Versuchskonstanten δ' , ε' , a'_0 reichen zur Bestimmung der Deformation eines Cylinders von beliebigem Radius für die Zwecke der Praxis vollkommen aus.

Als Beispiel diene die Deformation eines in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Band 45, 1901, S. 218 u. f. beschriebenen Gebläsecylinders vom lichten Durchmesser 2100 mm.

Setzt man für Gußeisen $m = 3,9$

$$E = 1\,000\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\gamma = 0,0072 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3},$$

und den äußern Cylinderradius $R = 110$ cm, so erhält man für a_0 , δ und ε die folgenden Werte:

$$a_0 = 3,4 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$$

$$\delta = 0,38 \cdot 10^{-6} \cdot 110^2 \text{ cm} = 0,046 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = 0,12 \cdot 10^{-6} \cdot 110^2 \text{ cm} = 0,014 \text{ mm}.$$

Die Verkürzung des Vertikaldurchmessers beträgt $2\varepsilon \sim \frac{3}{100}$ mm, die Verlängerung des Horizontaldurchmessers beträgt $2\delta \sim \frac{9}{100}$ mm, Deformationen, die unberücksichtigt gelassen, etwa wenn der Cylinder nicht liegend, sondern stehend ausgebohrt wäre, die Abdichtung durch die Kolbenringe in Frage stellen würden.

Allerdings liegt den *ausgerechneten* Werten der *angenommene* Wert m zu Grunde, der vom Material, also von der Zusammensetzung des Gußeisens abhängt und über den einwandfreie Messungen nicht vorliegen.

Über die Zusammensetzung von Vektoren.

Von FRIEDRICH SCHUR in Karlsruhe.

In dem Artikel „Die Prinzipien der rationellen Mechanik“ (Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften IV) hat A. Voß nach einer Übersicht der verschiedenen Beweise des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte auf eine Note von G. Darboux „Sur la composition des forces en statique“ (Bulletin des sciences math. 9 (1875) p. 281 bis 288) hingewiesen mit der Bemerkung, daß hierdurch „ein gewisser Abschluß in der ganzen Frage erreicht“ sei. In der Tat stellt Darboux alle diejenigen Postulate oder Hypothesen auf, welche seiner Meinung nach allen früheren Beweisen des Satzes gemeinsam sind, und zeigt, daß sie wirklich zu einem strengen Beweise des Satzes ausreichen. Diese Postulate sind:

1. Die Resultante zweier Vektoren OA und OB ist ein eindeutig bestimmter Vektor $OC = (OA, OB)$, der mit OA resp. OB zusammenfällt, falls OB resp. OA verschwindet.

2. Für die Zusammensetzung von Vektoren gilt das associative Gesetz, d. h. es ist:

$$((OA, OB), OC) = (OA, (OB, OC)).$$

3. Es gilt ebenso auch das kommutative Gesetz, d. h. es ist $(OA, OB) = (OB, OA)$.

4. Die Zusammensetzung von Vektoren gleicher oder entgegengesetzter Richtung geschieht nach der Regel der algebraischen Addition.

5. Die Zusammensetzung der Vektoren ist allen Drehungen um den Anfangspunkt O gegenüber invariant, d. h. die Resultante der aus OA und OB durch dieselbe Drehung hervorgehenden Vektoren geht durch dieselbe Drehung aus der Resultante der Vektoren OA und OB hervor.

6. Die Funktionen, welche die rechtwinkligen Koordinaten des Endpunktes der Resultante durch diejenigen der Endpunkte der Komponenten darstellen, sind endlich und stetig.

Wenn nun auch Darboux bewiesen hat, daß diese 6 Postulate ausreichen, um die dadurch beschriebene Zusammensetzung von Vektoren als die geometrische Summation zu charakterisieren, so hat er doch die Frage, ob alle diese 6 Postulate hierfür wirklich notwendig seien, weder

gestellt noch beantwortet. Nun sind diese 6 Postulate, wie G. Hamel demnächst zu beweisen gedenkt, in der Tat sämtlich notwendig, wenn man von den Funktionen des 6. Postulats nicht zugleich auch voraussetzt, daß sie erste und zweite Differentialquotienten besitzen. Macht man aber diese den üblichen Annahmen über die Natur der Kräfte durchaus entsprechende Voraussetzung, so ist das 5. Postulat eine Folge der übrigen und ebenso auch das dritte, so zwar, daß außer der Zusammensetzung der als Vektoren betrachteten Drehungen selbst nur die geometrische Summation den Postulaten 1, 2, 4 und 5 genügen kann. Diese Behauptungen, die zum Teil eine unmittelbare Folge aus Lies Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen sind, sollen im folgenden ohne irgend welche Voraussetzungen aus dieser Theorie bewiesen werden, einerseits in Rücksicht auf diejenigen Leser, die Lies Werke zu studieren keine Zeit fanden, andererseits deshalb, weil in ihnen überall von analytischen Funktionen ausgegangen wird.

I.

Sind x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die rechtwinkligen Koordinaten der Endpunkte zweier Vektoren OX und OY in Beziehung auf den Anfangspunkt O und x'_1, x'_2, x'_3 diejenigen des Endpunktes der Resultante, so wird die Zusammensetzung der Vektoren den folgenden analytischen Ausdruck erhalten:

$$(1) \quad x'_a = f_a(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = f_a(x; y). \quad (a = 1, 2, 3)$$

Dann ist das zweite Postulat in den folgenden Formeln enthalten:

$$(2) \quad f_a(f(x; y); z) = f_a(x; f(y, z)) \quad (a = 1, 2, 3)$$

das dritte in den Formeln:

$$(3) \quad f_a(x; y) = f_a(y; x) \quad (a = 1, 2, 3)$$

und das vierte in den Formeln:

$$(4) \quad f_a(x_1, x_2, x_3; tx_1, tx_2, tx_3) = x_a(1 + t). \quad (a = 1, 2, 3)$$

Nach dem ersten Postulate sind die Funktionen $f_a(x; y)$ eindeutig und genügen den Gleichungen:

$$(5) \quad f_a(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 0) = x_a$$

und:

$$(6) \quad f_a(0, 0, 0; y_1, y_2, y_3) = y_a. \quad (a = 1, 2, 3)$$

Wir setzen nun von diesen Funktionen außerdem voraus, daß sie *endliche und stetige erste und zweite Differentialquotienten* besitzen. Aus

diesen Voraussetzungen wollen wir zuerst, ohne das 5. Postulat zu benutzen, beweisen, daß diese Funktionen die Form $x_i + y_i$ haben.

Zu diesem Zwecke führen wir die Funktionen von je drei Veränderlichen:

$$(7) \quad \omega_a^b(x_1, x_2, x_3) = \omega_a^b(x) - \left[\frac{\partial f_a(x; y)}{\partial y_b} \right]_{y_1=y_2=y_3=0}$$

und:

$$(8) \quad \eta_a^b(y_1, y_2, y_3) = \eta_a^b(y) - \left[\frac{\partial f_a(x; y)}{\partial x_b} \right]_{x_1=x_2=x_3=0}$$

ein und ziehen zunächst diejenigen Folgerungen, die das *associative Gesetz* (2) bedingt. Aus (5) und (6) folgt noch:

$$(9) \quad \eta_a^b(0) = \omega_a^b(0) = \delta_{a, b},$$

wenn das Symbol $\delta_{a, b}$ Null oder Eins bedeutet, je nachdem $a \leq b$ oder $a = b$ ist.

Nunmehr ergibt sich aus den Gleichungen (2) durch Differentiation nach s_b und Substitution von $s_1 = s_2 = s_3 = 0$:

$$(10) \quad \omega_a^b(f(x; y)) = \sum_{c=1}^3 \frac{\partial f_a(x; y)}{\partial y_c} \omega_c^b(y). \quad (a, b = 1, 2, 3)$$

Da die Determinante $|\omega_a^b(x)|$ wegen (9) nicht identisch verschwindet, so können wir diese Gleichungen auflösen in der Form:

$$(11) \quad \frac{\partial f_a(x; y)}{\partial y_b} = \sum_{c=1}^3 \omega_a^c(f(x; y)) E_c^b(y),$$

wo:

$$(12) \quad \sum_{c=1}^3 \omega_a^c(y) E_c^b(y) = \delta_{a, b},$$

so daß auch:

$$(13) \quad E_a^b(0) = \delta_{a, b}.$$

Durch nochmalige Differentiation der Gleichungen (11) folgt in Rücksicht auf diese selbst:

$$(14) \quad \frac{\partial^2 f_a(x; y)}{\partial y_b \partial y_{b_1}} = \sum_{c, b_1}^3 \frac{\partial \omega_a^c(x')}{\partial x'_{b_1}} \omega_c^b(x') E_c^{b_1}(y) E_c^b(y) + \sum_{c=1}^3 \omega_a^c(x') \frac{\partial E_c^b(y)}{\partial y_{b_1}}.$$

Vertauscht man hierin b mit b_1 und zieht das Resultat von (14) ab, so ergeben sich als Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen (11) die folgenden Gleichungen:

$$(15) \quad \sum_{c, b, c=1}^3 \left(\frac{\partial \omega_a^c(x')}{\partial x'_b} \omega_b^c(x') - \frac{\partial \omega_a^c(x')}{\partial x'_b} \omega_b^c(x') \right) E_c^b(y) E_c^{b_1}(y) \\ = \sum_{c=1}^3 \omega_a^c(x') \left(\frac{\partial E_c^{b_1}(y)}{\partial y_b} - \frac{\partial E_c^b(y)}{\partial y_{b_1}} \right).$$

Differentiieren wir endlich die Gleichungen (10) nach x_b und setzen darnach $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, so folgt:

$$(16) \quad \sum_{c=1}^3 \left(\frac{\partial \omega_a^b(y)}{\partial y_c} \eta_c^{b_1}(y) - \frac{\partial \eta_a^{b_1}(y)}{\partial y_c} \omega_c^b(y) \right) = 0.$$

Benutzen wir nunmehr das durch die Gleichungen (3) ausgedrückte *kommutative Gesetz*, so folgt durch Differentiation dieser Gleichungen nach y_b und nachheriges Setzen von $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, daß:

$$(17) \quad \omega_a^b(x) = \eta_a^b(x).$$

Hieraus folgt in Rücksicht auf (16), daß die linken Seiten der Gleichungen (15) verschwinden, daß also, weil die Determinante $|\omega_a^c(x')|$ nicht identisch verschwindet, die Gleichungen bestehen:

$$(18) \quad \frac{\partial E_a^{b_1}(y)}{\partial y_b} = \frac{\partial E_a^b(y)}{\partial y_{b_1}}.$$

Nunmehr ziehen wir auch das 4. Postulat heran, das die *algebraische Addition von Vektoren derselben Richtung* fordert und in den Gleichungen (4) seinen Ausdruck findet. Differentiieren wir diese Gleichungen nach t und setzen darnach $t = 0$, so folgt:

$$(19) \quad \sum_{b=1}^3 \omega_a^b(x) x_b = x_a. \quad (a = 1, 2, 3)$$

Auf Grund der Gleichungen (12) folgt hieraus, daß auch:

$$(20) \quad \sum_{c=1}^3 E_a^c(x) x_c = x_a$$

ist. Denn aus (12) und (19) ergeben sich zunächst die Gleichungen:

$$(21) \quad \sum_{c=1}^3 \omega_a^c(x) \sum_{b=1}^3 (E_c^b(x) x_b - x_c) = 0,$$

aus denen die Gleichungen (20) folgen, weil die Determinante $|\omega_a^b(x)|$ nicht identisch verschwindet. Durch Differentiation der Gleichungen (20) nach x_b folgt nunmehr in Rücksicht auf (18):

$$(22) \quad E_a^b(x) + \sum_{c=1}^3 \frac{\partial E_a^b(x)}{\partial x_c} x_c = \delta_{a, b}.$$

Setzen wir daher:

$$(23) \quad t E_a^b(x_1 t, x_2 t, x_3 t) = \varphi_a^b(t),$$

so genügen diese 9 Funktionen einer Veränderlichen t den Differentialgleichungen:

$$(24) \quad \frac{d\varphi_a^b(t)}{dt} = \delta_{a, b}$$

mit den Anfangsbedingungen, daß $\varphi_a^b(0) = 0$ ist. Hieraus folgt, daß $\varphi_a^b(t) = t\delta_{a, b}$, also:

$$(25) \quad E_a^b(x) = \delta_{a, b},$$

folglich auch:

$$(26) \quad \omega_a^b(x) = \delta_{a, b}.$$

Es genügen daher nach (11) unsere Funktionen $f_a(x; y)$ den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f_a(x; y)}{\partial y_b} = \delta_{a, b},$$

d. h. es ist auf Grund der Anfangsbedingungen (5):

$$(28) \quad f_a(x; y) = x_a + y_a,$$

oder *unsre Zusammensetzung ist die geometrische Summation von Vektoren.*

II.

Nachdem wir in § 1 unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $f_a(x; y)$ endliche und stetige erste und zweite Differentialquotienten besitzen, bewiesen haben, daß das 5. Postulat oder das der Invarianz unserer Zusammensetzung gegenüber allen Drehungen um den Anfangspunkt O überflüssig sei, entsteht dieselbe Frage bezüglich der übrigen Postulate. Da ergibt sich denn zuerst, daß das 4. Postulat auch bei Zulassung aller übrigen nicht entbehrt werden kann. Wir brauchen, um dies einzusehen, nur diejenige Zusammensetzung zu betrachten, die aus der geometrischen Summation dadurch entsteht, daß

man jedem Vektor (x_1, x_2, x_3) den Vektor $(\frac{\varphi(r)}{r}x_1, \frac{\varphi(r)}{r}x_2, \frac{\varphi(r)}{r}x_3)$, wo wo $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ist, zuordnet, die zwei Vektoren so zugeordneten Vektoren geometrisch summiert und aus dieser Vektorsumme (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3) rückwärts den Vektor

$$\left(\frac{\psi(r')}{r'}\xi'_1, \frac{\psi(r')}{r'}\xi'_2, \frac{\psi(r')}{r'}\xi'_3\right)$$

bildet, wo $r = \varphi(r) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ ist und $r = \psi(r)$; außerdem muß $\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)_{r=0} = 1$ sein. Diese Art der Zusammensetzung ist dann allerdings die einzige, die allen übrigen Postulaten genügt. Wir verzichten auf den Beweis dieser Behauptungen, den eigentlich schon Darboux a. a. O. gegeben hat, und bemerken nur noch, daß man z. B.:

$$(29) \quad \varphi(r) = \frac{r}{1+r}, \quad \psi(r) = \frac{r}{1-r}.$$

setzen kann.

Was ferner das 3. Postulat oder die Geltung des *kommutativen Gesetzes* betrifft, so kann es zwar auch nicht durch das fünfte ersetzt werden, aber es ist insofern ein wesentlicher Unterschied gegen den eben behandelten Fall vorhanden, als es *nur eine Art der Zusammensetzung gibt, für die die übrigen Postulate gelten, aber nicht das kommutative Gesetz, nämlich die Zusammensetzung der Drehungen selbst.*

Aus der Invarianz der Zusammensetzung gegenüber den Drehungen folgt nämlich zuerst, daß *zwei entgegengesetzt gleiche Vektoren OX und $O\bar{X}$ die Resultante Null* haben müssen; denn jede andre Resultante würde bei den Drehungen um OX , die ja auch $O\bar{X}$ stehen lassen, nicht unveränderlich bleiben. *Haben umgekehrt zwei Vektoren OX und OY die Resultante Null, so sind sie entgegengesetzt gleich.* Denn ist $O\bar{Y}$ der OY entgegengesetzt gleiche Vektor, so ist der Vektor

$$((OX, OY), O\bar{Y}) = (OX, (OY, O\bar{Y}))$$

einerseits $O\bar{Y}$ und andererseits OX , also $OX = O\bar{Y}$, oder $OY = O\bar{X}$.

Sei nunmehr $(OX, OY) = OZ$, aber $(OY, OX) = OU$; ergibt dann die Umwendung um die auf OX und OY senkrechte Achse:

$$(O\bar{X}, O\bar{Y}) = OZ' \text{ und } (O\bar{Y}, O\bar{X}) = OU',$$

so folgt aus:

$$(OZ, OU') = ((OX, OY), (O\bar{Y}, O\bar{X})) = (OX, O\bar{Y}) = 0,$$

daß $OU' = O\bar{Z}$ und ebenso $OZ' = O\bar{U}$. OZ und OU liegen daher in einer auf der Ebene OXY senkrechten Ebene und sind Spiegel-

bilder von einander in Beziehung auf die Ebene OXY . Wir erkennen hieraus jedenfalls, daß wir die Geltung des kommutativen Gesetzes ersetzen können durch das Postulat: *Die Resultante zweier Vektoren liegt in deren Ebene.* Nehmen wir dies nicht an, so können wir nur so viel schließen, daß *die beiden Resultanten zweier Vektoren, die durch die Vertauschung der Reihenfolge der Zusammensetzung entstehen, Spiegelbilder von einander in Beziehung auf die Ebene der beiden Vektoren sind.*

Hieraus ergeben sich für die Funktionen $f_a(x; y)$ die folgenden Gleichungen:

$$(30) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, 0; y_1, y_2, 0) = f_1(y_1, y_2, 0; x_1, x_2, 0), \\ f_2(x_1, x_2, 0; y_1, y_2, 0) = f_2(y_1, y_2, 0; x_1, x_2, 0), \\ f_3(x_1, x_2, 0; y_1, y_2, 0) = -f_3(y_1, y_2, 0; x_1, x_2, 0) \end{cases}$$

und ihnen analoge für die beiden andern Koordinatenachsen. Daraus folgt weiter:

$$(31) \quad \omega_1^1(x_1, x_2, 0) = \eta_1^1(x_1, x_2, 0); \quad \omega_1^2(x_1, x_2, 0) = \eta_1^2(x_1, x_2, 0).$$

Führen wir daher die Bezeichnung ein:

$$(32) \quad \frac{\partial \omega_a^b(0)}{\partial x_c} - \frac{\partial \omega_a^c(0)}{\partial x_b} = c_{b,c}^a,$$

so ergibt sich hieraus und aus den Gleichungen (16):

$$(33) \quad c_{1,2}^1 = 0 \text{ und analog } c_{1,2}^2 = 0,$$

während $c_{1,2}^3 = 2 \frac{\partial \omega_1^3(0)}{\partial x_2}$ ist, aber im allgemeinen von Null verschieden sein wird. Da offenbar $c_{b,c}^a$ stets verschwindet, wenn $b = c$ ist, und nur sein Zeichen wechselt, wenn man b mit c vertauscht, so werden von diesen 18 Konstanten überhaupt nur $c_{1,2}^3$, $c_{2,3}^1$ und $c_{3,1}^2$ von Null verschieden sein können. Aus der Invarianz unserer Zusammensetzung gegenüber allen Drehungen folgt aber leicht, daß diese drei Konstanten jedenfalls denselben Wert haben müssen. Machen wir nämlich die Drehung:

$$(34) \quad x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_3, \quad x'_3 = x_1$$

(um die Achse mit den Richtungskosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ und der Amplitude 240°), so findet nach der Erklärung des 5. Postulats diese Invarianz der Zusammensetzung gegenüber dieser Drehung ihren Ausdruck in den Gleichungen:

$$(35) \quad f_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = f_2(x_2, x_3, x_1; y_2, y_3, y_1) \text{ usw.}$$

Aus ihnen folgt:

$$(36) \quad \omega_1^2(x_1, x_2, x_3) = \omega_2^1(x_2, x_3, x_1) \text{ usw.}$$

und hieraus:

$$(37) \quad \frac{\partial \omega_1^2(0)}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega_2^1(0)}{\partial x_1} \text{ usw.}$$

Es ist also in der Tat

$$(38) \quad c_{1,2}^2 = c_{2,3}^1 = c_{3,1}^2 = c.$$

Setzen wir nunmehr in den Gleichungen (15) $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$, so folgt:

$$(39) \quad \frac{\partial E_a^{b_1}(x)}{\partial x_{b_1}} - \frac{\partial E_a^{b_2}(x)}{\partial x_{b_2}} = \sum_{c, b=1}^3 c_{c, b}^a E_c^{b_1}(x) E_b^{b_2}(x).$$

Ist daher $c = 0$, so ist unsre Zusammensetzung auf Grund des 4. Postulats wieder die geometrische Summation. Nun ergibt aber dies Postulat unter allen Umständen die vollständige Bestimmtheit der Funktionen $E_a^b(x)$, falls die Konstanten $c_{c, b}^a$ gegeben sind. Aus den Gleichungen (20) und den aus ihnen durch Differentiation entstehenden Gleichungen:

$$(40) \quad E_a^b(x) + \sum_{b_1=1}^3 \frac{\partial E_a^{b_1}(x)}{\partial x_{b_1}} x_{b_1} = \delta_{a, b}$$

folgt nämlich in Rücksicht auf (39):

$$(41) \quad E_a^b(x) + \sum_{b_1=1}^3 \frac{\partial E_a^{b_1}(x)}{\partial x_{b_1}} x_{b_1} = \delta_{a, b} - \sum_{c, b=1}^3 c_{c, b}^a E_c^{b_1}(x) x_{b_1}.$$

Es ergeben sich also für die in (23) definierten Funktionen $\varphi_a^b(t)$ die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(42) \quad \frac{d\varphi_a^b(t)}{dt} = \delta_{a, b} - \sum_{c, b_1=1}^3 c_{c, b_1}^a \varphi_c^{b_1}(t) x_{b_1}, \quad (a = 1, 2, 3)$$

die durch Elementarfunktionen vollständig integriert werden können. Man sieht zugleich, daß die Veränderung der Konstanten c , so lange sie von Null verschieden bleibt, nur die Bedeutung einer Veränderung des Maßstabes besitzt, durch den die Vektoren gemessen werden.

Da nun durch die $\varphi_a^b(t)$ die $E_a^b(x)$, hieraus die $\omega_a^b(x)$ und daraus und aus den Anfangsbedingungen auch die $f_a(x; y)$ bestimmt sind, so gibt es nur eine Art der Zusammensetzung von Vektoren, für die alle unsre Postulate gelten bis auf das dritte.

Es ist nun leicht zu sehen, daß die *Zusammensetzung der Drehungen selbst, wenn wir jede Drehung durch einen Vektor darstellen, der auf die Drehungsachse fällt und der Amplitude der in irgend einem Maßstabe gemessenen Drehung gleich ist, alle unsre Postulate erfüllt bis auf das dritte*. Der wahre Grund dafür, daß man die Zusammensetzung von Drehungen als eine solche Zusammensetzung von Vektoren auffassen kann, liegt natürlich darin, daß die Aufeinanderfolge zweier Drehungen wieder eine Drehung ist. Wir erkennen dies am einfachsten daraus, daß man jede Drehung durch die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen an zwei Ebenen durch die Drehungsachse erzeugen kann, von denen die zweite aus der ersten durch die Drehung um die halbe Amplitude entsteht. Sind also zwei Drehungen gegeben, so kann man die Ebene ihrer Achsen für die erste Drehung als die zweite der spiegelnden Ebenen betrachten und für die zweite Drehung als die erste annehmen, so daß die Aufeinanderfolge der beiden Drehungen auch aus der Aufeinanderfolge der beiden Spiegelungen an der ersten und der vierten der vier Ebenen entsteht, die zu den vier Spiegelungen gehören, in die die beiden Drehungen zerlegt sind. Man erkennt hieraus zugleich, daß die Vertauschung der Reihenfolge der beiden Drehungen die resultierende Drehung in ihr Spiegelbild in Bezug auf die Ebene der beiden Drehungsachsen verwandelt.

Die Gültigkeit des 1. Postulats ist ja nun selbstverständlich, die des zweiten folgt daraus, daß wir die Drehungen auch als Transformationen des Raumes auffassen können, das Resultat von drei Drehungen also einmal durch die im associativen Prinzip geforderten Zusammenfassungen, dann aber auch durch die bloße Aneinanderfügung der drei Transformationen gebildet werden kann, daher von der Art dieser Zusammenfassung unabhängig ist. Das kommutative Gesetz gilt, wie wir sahen, gerade nicht, die algebraische Addition von Drehungen um dieselbe Achse ist ja selbstverständlich und ebenso die Invarianz gegenüber allen Drehungen. Es muß folglich diese Zusammensetzung der Drehvektoren diejenige sein, die wir für den Fall, daß die Konstante c von Null verschieden sei, aus den obigen Formeln erhalten, und es hängt diese Konstante von dem Maßstabe ab, in dem wir die Amplituden der Drehungen als Vektoren auftragen.

Nehmen wir an, daß der vollen Umdrehung der Vektor π entspreche, so geht der analytische Ausdruck dieser Zusammensetzung aus den bekannten Formeln:

$$(43) \quad \xi'_1 = \frac{\xi_1 + \eta_1 - \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3}{1 - \xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2 - \xi_3 \eta_3}, \quad \text{usw.}$$

hervor vermöge der Substitution:

$$(44) \quad \xi_a = x_a \frac{\operatorname{tg} r}{r},$$

woraus folgt $r = \operatorname{tg} r$, also umgekehrt:

$$(45) \quad x_a = \xi_a \frac{r}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} r}.$$

(S. z. B. Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Leipzig, 1898, p. 149 u. 154). Da diese Formeln, wie man sieht, sehr verwickelt werden, so glauben wir auf den analytischen Beweis unserer Behauptungen nicht eingehen zu sollen und bemerken nur noch, daß bei diesem Maßstabe die Konstante $c = 2$ ist.

Nachdem wir gesehen haben, daß das kommutative Gesetz auch bei Zulassung aller übrigen Postulate nicht zu entbehren ist, kann dies um so weniger der Fall sein, wenn wir wie in I auf die Invarianz gegenüber den Drehungen keine Rücksicht nehmen. Ein Beispiel einer solchen Zusammensetzung von Vektoren, bei der den Postulaten 3 und 5 nicht, wohl aber den übrigen genügt wird, liefern die Formeln:

$$(46) \quad \begin{aligned} x'_1 &= x_1 + y_1, \quad x'_2 = x_2 + y_2, \\ x'_3 &= \frac{x_1 + y_1}{1 - e^{-(x_1 + y_1)}} \left(x_2 (1 - e^{-x_1}) + \frac{y_2}{y_1} (1 - e^{-y_1}) e^{-x_1} \right). \end{aligned}$$

Daß schließlich das associative Gesetz unter allen Umständen die Grundlage der Voraussetzungen bilden muß, ist selbstverständlich, mag aber durch das Beispiel:

$$(47) \quad x'_a = (x_a + y_a) \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}{\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2}},$$

vollends in Evidenz gesetzt sein. Wir haben in ihm eine Zusammensetzung von Vektoren, bei der alle Postulate erfüllt sind bis auf das associative Prinzip.

Karlsruhe, im Juni 1903.

Über die Zusammensetzung von Vektoren.

Von GEORG HAMEL in Karlsruhe.

Einleitung.

Herr Darboux¹⁾ hat gezeigt, daß zur Charakterisierung der üblichen Zusammensetzung von Vektoren die folgenden 6 Axiome ausreichen:

1. Die Summe, d. h. die Resultante zweier endlichen Vektoren ist ein eindeutig bestimmter, endlicher Vektor.

2. Die Resultante mehrerer Vektoren ändert sich nicht, wenn man einzelne, auf einander folgende Summanden durch ihre Teilsumme ersetzt. (Das associative Gesetz der Addition.)

3. Die Resultante zweier Vektoren ist unabhängig von der Reihenfolge der Vektoren. (Das kommutative Gesetz der Addition.)

4. Vektoren, die in derselben Geraden liegen, werden algebraisch addiert.

5. Das Resultat der Addition ist in seiner relativen Lage zu den gegebenen Vektoren nur von der relativen Lage dieser Vektoren zu einander abhängig, nicht aber von ihrer absoluten Lage im Raume; eine Drehung um den Bezugspunkt²⁾ ändert also die relative Lage der Resultanten zu ihren Komponenten nicht.

6. Die Operation der Zusammensetzung ist stetig, d. h. man kann, nachdem man um den Endpunkt der Resultanten zweier Vektoren ein beliebig kleines Gebiet G_1 abgegrenzt hat, auch um die Endpunkte der Komponenten derartig kleine Gebiete G_2 und G_3 abgrenzen, daß der Endpunkt der Resultanten im Innern von G_1 bleibt, wenn sich die Endpunkte der Komponenten im Innern der Gebiete G_2 resp. G_3 bewegen.

Darboux hat dann noch gezeigt, daß man dieses letzte Axiom durch das folgende ersetzen kann:

6a. Die Resultierende liegt in dem Winkel kleiner als 180° , den die Komponenten einschließen.

1) Darboux: „Sur la composition des forces en statique“. Bulletin des sciences mathématiques 9. (1875). Auch als Note in der Mécanique von Despeyroux I, p. 371. Paris 1884. Zur Geschichte des Problems lese man Nr. 19 des Encyclopädieartikels IV, 1 von A. Voß: „Die Prinzipien der rationalen Mechanik“.

2) D. h. den Punkt, von dem aus wir uns alle Vektoren abgetragen denken.

Daß die Resultierende in der Ebene durch die beiden Komponenten liegt, folgt nach Darboux schon aus den Axiomen 5 und 3.

Darboux hat indessen noch nicht bewiesen, daß die genannten 6 Axiome auch notwendig, d. h. unabhängig von einander sind. *Und zur Frage nach der Unabhängigkeit jener 6 Axiome soll nun diese Note einen Beitrag liefern.*

Daß die Axiome 1, 2, 3 notwendig sind, hat bereits Herr Schur in einer in dieser Zeitschrift veröffentlichten Note über denselben Gegenstand¹⁾ hervorgehoben; daß man das vierte Axiom nicht entbehren kann, folgt leicht aus den Betrachtungen Darboux'. Inwieweit die Axiome 6 resp. 6a notwendig sind, will ich dahin gestellt sein lassen²⁾; es erübrigt also nur noch eine Diskussion des fünften Axioms, das die Unabhängigkeit des Resultates von den Drehungen um den gemeinsamen Bezugspunkt der Vektoren ausspricht.

Herr Schur hat nun in der erwähnten Note mittels gruppentheoretischer Betrachtungen gezeigt, daß man das fünfte Axiom entbehren kann, wenn man statt seiner annimmt, daß gewisse auftretende Funktionen erste und zweite Differentialquotienten besitzen.

Hier soll nun folgendes dargetan werden:

1. Das fünfte Axiom Darboux' ist *nicht entbehrlich*, wenn man auf die *Differentiierbarkeit* verzichtet.

2. Es ist aber schon dann *nicht mehr notwendig*, wenn man nur die Existenz eindeutiger, stetiger und bestimmter *erster* Differentialquotienten der in Frage kommenden Funktionen voraussetzt.

Diese Tatsache gründet sich auf folgenden analytischen Satz, den wir auch beweisen werden:

Die einzigen homogenen Funktionen erster Dimension, die nebst ihren ersten Ableitungen in der Umgebung der Nullstellen der Variablen endlich, stetig und eindeutig sind, sind die ganzen linearen Funktionen.

3. Endlich soll dann noch auf eine neue Weise gezeigt werden, daß sämtliche Axiome Darboux' hinreichend sind (Ich nenne diesen Satz im folgenden kurz den Darboux'schen Satz.). Die dabei verwendeten Methoden sind zwar nicht ganz so elementar wie die Darboux'schen, benutzen aber keine speziellen elementargeometrischen Sätze und dürften dadurch an Durchsichtigkeit gewinnen.

Ein Kenner der Grundlagen der Geometrie wird übrigens merken, daß es sich bei dem ganzen Problem eigentlich nur um die Geometrie

1) Siehe diesen Band, S. 352.

2) Um die Unabhängigkeit zu beweisen, käme es darauf an, eine unstetige Funktion $\varphi(x)$ zu konstruieren, die der Funktionalgleichung $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ genügt.

des Strahlenbündels, d. h. um die ebene elliptische Geometrie handelt. Nennen wir das in § 2 betrachtete Gebilde $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ eine „Gerade“ in den homogenen Koordinaten x, y , so zeigt § 1, daß diese „Geraden“ bei geeigneten Koordinaten linearen Gleichungen genügen. Und da das Stetigkeitsaxiom erfüllt ist, so stellt die von diesen „Geraden“ gebildete Geometrie nichts anderes dar als eine Punktabbildung der gewöhnlichen elliptischen Geometrie. In dieser neuen Geometrie gelten natürlich auch die Kongruenzaxiome, es gibt also eine Gruppe von ∞^1 Bewegungen. Und nun sagt Axiom 5 einfach aus, daß diese Gruppe mit der Gruppe der Bewegungen der gewöhnlichen elliptischen Geometrie identisch ist. Daraus wird dann geschlossen, daß die Abbildung allein die kongruente sein kann, daß also die neu definierte Geometrie vollständig mit der elliptischen Geometrie der Ebene übereinstimmt. Und das ist dann im wesentlichen der Inhalt des Darboux'schen Satzes.

§ 1.

Die Addition und Subtraktion von Vektoren.

Bezeichnen wir, weil es so bequem ist, beliebige Vektoren mit \bar{a}, \bar{b} etc. (nach Résal, Somoff und Heun), den Vektor, der λ mal so groß ist wie \bar{a} , aber gleichgerichtet, mit $\lambda \cdot \bar{a}$ und die Resultierende der Vektoren \bar{a} und \bar{b} mit $\bar{a} + \bar{b}$, so gelten für diese Operation der Zusammensetzung nach den Axiomen 1—4 und 6 die folgenden Sätze:

α) Für die Vektoren $\lambda\bar{a}$ und $\mu\bar{a}$ bestehen die gewöhnlichen Rechnungsregeln der Addition, es ist also

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{a} = (\lambda + \mu)\bar{a} \quad (\text{Axiom 4})$$

Insbesondere ist auch

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = 0,$$

wenn wir mit $-\bar{a}$ den zu \bar{a} entgegengesetzt gleichen Vektor bezeichnen.

β) Es gilt das associative Gesetz

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \quad (\text{Axiom 2})$$

γ) Es gilt das kommutative Gesetz

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}. \quad (\text{Axiom 3})$$

δ) Es gilt das distributive Gesetz

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}.$$

Denn zunächst ist nach α), β) und γ)

$$2(\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} + \bar{b}) = 2\bar{a} + 2\bar{b}.$$

Ebenso ergibt sich der Satz für jedes ganzzahlige λ . Sei nun $\lambda = \frac{1}{n}$, wo n eine ganze Zahl ist, so ist nach dem schon Bewiesenen

$$n\left(\frac{1}{n}\bar{a} + \frac{1}{n}\bar{b}\right) = \bar{a} + \bar{b},$$

also

$$\frac{1}{n}\bar{a} + \frac{1}{n}\bar{b} = \frac{1}{n}(\bar{a} + \bar{b}).$$

Daraus folgt dann der behauptete Satz weiter für jedes rationale λ und schließlich nach dem Stetigkeitsaxiom auch für irrationales λ .

$\epsilon)$ Es gibt außer $-\bar{a}$ keinen Vektor \bar{b} , sodaß

$$\bar{a} + \bar{b} = 0$$

wäre. Denn sonst folgte

$$\bar{a} + \bar{b} + (-\bar{b}) = -\bar{b},$$

also nach $\alpha)$ und $\beta)$

$$\bar{a} = -\bar{b}$$

w. z. b. w.

$\xi)$ Die Subtraktion ist eindeutig, d. h. es gibt zu zwei bekannten Vektoren \bar{a} und \bar{b} nur einen bestimmten Vektor, nämlich $\bar{x} = \bar{b} + (-\bar{a})$ — wofür wir dann auch $\bar{b} - \bar{a}$ schreiben —, sodaß

$$\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$$

wird.

(Folgerung aus ϵ .)

$\eta)$ Für Vektoren der Form $\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ gelten die gewöhnlichen Regeln der Addition und Subtraktion unter einander, sowie der Multiplikation mit gewöhnlichen Zahlen.

Dieser Satz faßt nur die vorhergehenden Sätze noch einmal zusammen. Die Subtraktion macht deshalb keine Schwierigkeiten, weil ja nach dem Vorhergehenden die Differenz $\bar{a} - \bar{b}$ nichts anderes ist als die Summe $\bar{a} + (-\bar{b})$.

§ 2.

Beweis der Unabhängigkeit des fünften Axioms.

Wir schicken diesem Beweise noch zwei Bemerkungen voran:

$\alpha)$ Ein Vektor kann nicht auf zweierlei Weise in der Form $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ dargestellt werden, wo $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ gegebene Vektoren sind, die nicht in einer Geraden liegen. Denn aus

$$x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} = x'\bar{\lambda} + y'\bar{\mu}$$

folgt $(x - x')\bar{\lambda} + (y - y')\bar{\mu} = 0$. Und das ist nach § 1 und nach der Annahme über $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ nur möglich, wenn $x = x'$ und $y = y'$ ist.

β) Wählen wir zwei nicht in derselben Geraden liegende Vektoren $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ und betrachten die Gesamtheit der Vektoren $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ bei variablen x und y , so erfüllen die Endpunkte dieser Vektoren *nicht* den ganzen Raum. Denn sonst gäbe es eine ein-eindeutige (Axiom 1 und Satz α , § 2) und stetige (Axiome 4 und 6) Abbildung der ebenen Mannigfaltigkeit x, y auf einen dreidimensionalen Raum, die unmöglich ist.¹⁾

Daher können wir einen Vektor $\bar{\nu}$ finden, sodaß $\bar{\nu}$ nicht in der Mannigfaltigkeit $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ vorkommt. Aus denselben Gründen kann noch verlangt werden, daß $\bar{\nu}$ nicht in der durch $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ bestimmten Ebene liegt.

Wir fassen jetzt die Gesamtheit der durch

$$x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} + z\bar{\nu}$$

darstellbaren Vektoren ins Auge, wobei $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ drei feste, nicht in einer Ebene gelegene Einheitsvektoren bedeuten. Außerdem sei $\bar{\nu}$ nicht in der Mannigfaltigkeit $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ enthalten. (Siehe β); $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ aber sollen nicht in einer Geraden liegen. x, y, z mögen unabhängig von einander sämtliche reellen Zahlen durchlaufen.

Dann beweist man ebenso, wie in α) für die Vektoren $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ geschehen ist, daß kein Vektor durch zwei verschiedene Zahlentripel x, y, z dargestellt werden kann.

Betrachten wir nun x, y, z als Koordinaten in einem Bildraume, bezogen auf ein zu dem Dreikant $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ kongruentes Achsensystem $O'xyz$, so wird durch die obige Darstellung dieser Bildraum eindeutig und stetig auf einen gewissen Teil²⁾ des Original-, d. i. des Vektorraumes abgebildet.

Diese Abbildung hat überdies noch die Eigenschaft, daß Punkte, die auf einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt O' liegen, wieder in Punkte auf einer Geraden durch den Anfangspunkt O des

1) Siehe G. Cantor: „Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten“. Göttinger Nachrichten 1879 Seite 127. Man findet dort auch die weiteren Literaturangaben.

2) Es sei bemerkt, daß man ohne Hinzunahme des fünften Axioms oder eines Axioms der Differentiierbarkeit beweisen kann, daß diese Abbildung auf den *ganzen* Originalraum stattfindet und umkehrbar eindeutig ist. Der elementaren Darstellung wegen habe ich den Beweis für diese Behauptung, die ich nicht brauche, hier unterdrückt.

Vektorraumes übergehen (Distributives Gesetz 1, δ). Außerdem ist die Punktabbildung der einzelnen Geraden ähnlich (Axiom 4 und das distributive Gesetz 1, δ); speziell werden drei Geraden ($x\bar{\lambda}$, $y\bar{\mu}$ und $z\bar{\nu}$) kongruent transformiert.

Da nun der Zusammensetzung von Vektoren im Originalraum die gewöhnliche Zusammensetzung von Vektoren im Bildraum entspricht (Satz η , § 1), so *haben wir jetzt die allgemeinste Methode, Vektoren nach den Axiomen 1, 2, 3, 4 und 6 zusammenzusetzen* und zwar die folgende¹⁾:

Man bilde das Geradenbündel durch 0 eineindeutig und stetig auf das Geradenbündel durch 0' ab und zwar so, daß drei beliebig gewählte, aber nicht in einer Ebene liegende Geraden ihre gegenseitige Lage beibehalten. Dann erzeuge man eine ein-eindeutige, stetige Punkttransformation dadurch, daß man die Punkte einer Originalgeraden in die Punkte ihrer Bildgeraden ähnlich transformiert, wobei man den Punkt 0 jedesmal in den Punkt 0' überführt und die Punkte der drei ausgezeichneten Geraden kongruent überträgt. Der Ähnlichkeitsfaktor muß im übrigen von Strahl zu Strahl stetig variieren.

Um nun Vektoren zusammenzusetzen, suche man ihre Bilder, setze diese nach der gewöhnlichen Methode zu einer Resultierenden zusammen und bestimme zu dieser wieder das Original. Nennen wir dieses Original die Resultierende der gegebenen Vektoren, so haben wir eine Art der Zusammensetzung, die offenbar alle Axiome 1, 2, 3, 4 und 6 erfüllt, und nach den vorliegenden Betrachtungen auch die allgemeinste.

Jeder neuen Abbildung entspricht im allgemeinen eine neue Zusammensetzung, nur bei kongruenter Abbildung ergibt sich die gewöhnliche. Daß es aber sehr viele der oben beschriebenen Abbildungen gibt, leuchtet ein, ein spezielles Beispiel soll am Schlusse des folgenden Paragraphen gegeben werden. *Damit ist die Unabhängigkeit des Axiomes 5 erwiesen.*

§ 3.

Der Satz von den homogenen Funktionen erster Dimension.
Die Voraussetzung der Differenzierbarkeit usw. ersetzt das Axiom 5 vollständig.

Um nun die Rolle zu erkennen, welche die Differenzierbarkeit bei der ganzen Frage spielt, drücken wir unser Resultat analytisch aus.

1) Ich habe den Satz so ausgesprochen, als ob die Möglichkeit der Darstellung eines jeden Vektors durch $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} + z\bar{\nu}$ bewiesen wäre (siehe die Anmerkung 2) der vorigen Seite). Für den Fortgang der Untersuchung macht das nichts aus.

Seien die Koordinaten im Originalraum (bezogen auf $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$) ξ, η, ζ , so ist unsere Abbildung gegeben durch

$$\xi = \xi(x, y, z); \quad \eta = \eta(x, y, z); \quad \zeta = \zeta(x, y, z),$$

und diese Funktionen genügen der Funktionalgleichung:

$$f(tx, ty, tz) = t \cdot f(x, y, z), \quad (t = \xi, \eta, \zeta)$$

d. h. ξ, η, ζ sind stetige, eindeutige, homogene Funktionen erster Dimension. Außerdem ist noch

$$\xi(x, 0, 0) = x; \quad \xi(0, y, 0) = 0; \quad \xi(0, 0, z) = 0 \text{ usw.}$$

Homogene Funktionen erster Dimension gibt es natürlich in großer Anzahl. Wir behaupten aber, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, daß die einzige homogene Funktion erster Dimension, die sich in der Umgebung der Stelle $x = 0, y = 0, z = 0$ nebst ihren ersten Differentialquotienten endlich, stetig und eindeutig verhält, die ganze lineare Funktion ist.

Beweis: Zunächst folgt aus obiger Funktionalgleichung, daß

$$f(0, 0, 0) = 0$$

ist. Daher kann man nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung schreiben:

$$f(tx, ty, tz) = tx \cdot f_1(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z) + ty f_2(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z) + tz f_3(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z),$$

wo f_1, f_2, f_3 die partiellen Ableitungen von f nach den drei Variablen bedeuten, ϑ aber eine Zahl zwischen 0 und t .

Da aber nach der Funktionalgleichung die linke Seite gleich $t \cdot f(x, y, z)$ sein soll und alle vorkommenden Größen stetig sind, so ist

$$f(x, y, z) = x \cdot f_1(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z) + y f_2(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z) + z f_3(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z).$$

Geht man jetzt zur Grenze $t = 0$ also auch $\vartheta = 0$ über, so werden f_1, f_2, f_3 bestimmte Konstante c_1, c_2, c_3 , also

$$f(x, y, z) = c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

und damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wenn wir daher die Existenz bestimmter, endlicher und stetiger Differentialquotienten als neues Axiom hinzunehmen, so können wir setzen

$$\xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$

$$\eta = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$

$$\zeta = c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

Da aber für $y = 0$, $z = 0$ auch $\eta = 0$, $\xi = 0$ und $\xi = x$ werden sollte u. s. w., so folgt noch

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_2 = c_3 = 0.$$

Es bleibt als einzig mögliche Abbildung die kongruente Abbildung, und damit ist die von Herrn Schur aufgestellte Behauptung nochmals erwiesen. *Das fünfte Axiom der Unabhängigkeit von den Drehungen läßt sich durch das Axiom der Differentiierbarkeit vollständig ersetzen, und zwar genügt bereits die Existenz und das reguläre Verhalten der ersten Differentialquotienten.*

Der anschauliche Inhalt des Beweises ist folgender: Jede Abbildung ist bei der Existenz regulärer Differentialquotienten im Unendlichenkleinen affin und hier sogar kongruent nach den Nebenbedingungen. Da aber die Geraden durch 0 wieder in Gerade durch 0' und die Punkte einer jeden Geraden durch 0 ähnlich transformiert werden, so ist die Abbildung auch im Endlichen kongruent.

Leisten wir aber auf die Existenz, Stetigkeit, Endlichkeit oder Eindeutigkeit der Differentialquotienten Verzicht, so gibt es noch unendlich viele andere Funktionen, wie wir sie brauchen, z. B. können wir setzen

$$\xi = \frac{x^3}{x^3 + y^3 + z^3},$$

$$\eta = \frac{y^3}{x^3 + y^3 + z^3},$$

$$\xi = \frac{z^3}{x^3 + y^3 + z^3},$$

also

$$x = \xi^{1/3} [\xi^{2/3} + \eta^{2/3} + \xi^{2/3}] \text{ usw.}$$

Daraus aber ergibt sich eine andere als die gewöhnliche Zusammensetzung, z. B. hat der Endpunkt der Resultierenden von ξ , 0, 0 und 0, η , 0 die Koordinaten

$$\frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}, \quad 0 \quad (\text{statt } \xi, \eta, 0).$$

Damit ist die Unabhängigkeit des fünften Axioms nochmals durch ein Beispiel dargetan.

§ 4.

Der Beweis des Darboux'schen Satzes unter Benutzung des fünften Axioms.

Der Vollständigkeit halber mag jetzt der Beweis des Darboux'schen Satzes unter Hinzunahme des fünften Axioms durchgeführt werden.

Wie schon Darboux gezeigt hat, liegt nach diesem Axiom die Resultierende zweier Vektoren stets in der Ebene durch diese, unsere Flächen $x\bar{\lambda} + x\bar{\mu}$ sind also Ebenen, wie man auch $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ wählen mag. Mithin hat die in § 2 besprochene Abbildung des Strahlenbündels durch 0 die Eigenschaft, Ebenen in Ebenen überzuführen, die Abbildung ist also projektiv. Weil ferner von vornherein drei Geraden und wie man durch fortgesetzte Anwendung des fünften Axioms erkennt, alle durch Winkelhalbieren aus ihnen ableitbaren Geraden ihre gegenseitige Lage nicht ändern, so ist die Abbildung des Strahlenbündels kongruent. Fernerhin muß der Ähnlichkeitsfaktor, der bei der Punktabbildung für jeden Strahl auftritt, überall gleich 1 sein, wie man ebenfalls leicht aus der Unabhängigkeit des Resultates von allen Drehungen folgert.

Mithin ist die kongruente Abbildung die allein mögliche, *die gewöhnliche Addition der Vektoren ist die einsige, welche alle sechs Axiome befriedigt.*

Anhang.

Es mag noch kurz angedeutet werden, wie sich unser Beweis des Darboux'schen Satzes umgestaltet, wenn man gleich das fünfte Axiom hinzuzieht, aber statt des Stetigkeitsaxioms nur fordert, daß die Resultierende zweier Vektoren im Innern des von ihnen gebildeten Winkels liegt (Axiom 6a).

Zunächst bleiben die in § 1 genannten Sätze gültig bis auf das distributive Gesetz δ). Dieses kann einstweilen nur für den Fall geschlossen werden, daß λ in $\lambda(\bar{a} + \bar{b})$ eine rationale Zahl ist. Beschränken wir uns also zunächst auf rationale x, y, z , so erhalten wir eine eindeutige Abbildung der rationalen Punkte des x, y, z -Raumes auf gewisse Punkte des Originalraumes. Da aber für rationale t, a, b, c die Endpunkte von $t(a\bar{\lambda} + b\bar{\mu} + c\bar{\nu})$ bei variablem t auf einer Geraden liegen, so gehen bei unserer Abbildung des Originalraumes ξ, η, ζ auf den Bildraum x, y, z nach Axiom 5 Ebenen wieder in Ebenen über, die ganze Abbildung ist daher nach der Schlußweise des § 5 kongruent. Vektoren $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} + z\bar{\nu}$ mit rationalem x, y, z werden in der gewöhnlichen Weise zusammengesetzt.

Da aber alle Schlüsse dieselben geblieben wären, wenn man statt der Einheitsvektoren $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ drei andere, unter sich gleichlange¹⁾

1) Gleichlang müssen sie sein, damit Punkte der Halbierungslinien rational darstellbar sind und daher die Schlußweise von § 4 angewendet werden kann.

Vektoren gewählt hätte, so gilt der eben genannte Satz auch noch für alle Vektoren $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} + z\bar{\nu}$, für die nur die Verhältnisse $x:y:z$ rational sind.

Betrachten wir nun den Vektor $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ bei beliebigem aber festem x und variablem y , so ist die Richtung dieses Vektors eine monotone Funktion von y (nach Axiom 6a), d. h. der Vektor $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ nähert sich bei wachsendem positiven y immer mehr der Richtung von $\bar{\mu}$. Da aber für alle y , die zu x in rationalem Verhältnis stehen, die Richtung von $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ zu den Richtungen $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ dieselbe Lage hat, wie im Bildraume der durch die Koordinaten x, y gegebene Vektor zu $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ im Bildraum, so gilt dasselbe auch noch, wenn $x:y$ eine beliebige irrationale Zahl ist.

Infolgedessen ist sicherlich für jedes t

$$t \cdot x \cdot \bar{\lambda} + t \cdot y \cdot \bar{\mu} = \varphi(t)(x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}).$$

Es hat aber $\varphi(t)$ folgende Eigenschaften:

- 1) Für rationale t ist $\varphi(t) = t$. (Beweis genau so wie bei § 1, d.)
- 2) $\varphi(t)$ hat das Vorzeichen von t . (Axiom 6a.)
- 3) Es besteht nach Axiom 4) und den Sätzen α, β, γ des § 1 die Funktionalgleichung

$$\varphi(t + t') = \varphi(t) + \varphi(t').$$

Daher ist nach Darboux stets $\varphi(t) = t$.

Die Vektoren der durch $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ bestimmten Ebene werden also sämtlich in der gewöhnlichen Weise zusammengesetzt. Da aber $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ beliebig gewählte Einheitsvektoren sein konnten, so gilt das Resultat für alle Vektoren; *der Darboux'sche Satz ist somit bewiesen.*

Ein Apparat zur Bestimmung des Flächeninhalts, des statischen Moments, Trägheitsmoments und beliebiger anderer Momente krummlinig begrenzter ebener Figuren.

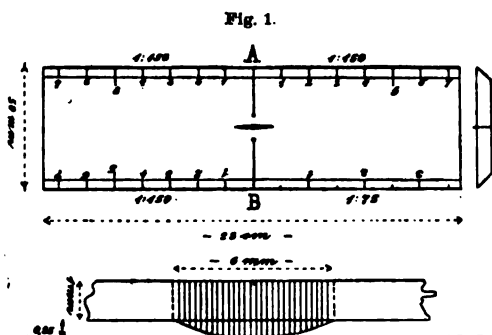
Von J. SCHNÖCKEL in Düsseldorf.

Allgemein bekannt ist das Verfahren, ebene n -Ecke durch eine einfache, geometrische Konstruktion in $n - 1$ -Ecke und nach $n - 3$ -maliger Anwendung der Methode in Dreiecke zu verwandeln, welche dem n -Eck an Fläche gleich sind. Der Praktiker bedient sich zu diesem Zweck zweier, gegen einander verschiebbarer Dreiecke aus Holz, Celluloid oder Metall und einer Kopiernadel, um Punkte auf dem Papier mit Sicherheit zu bezeichnen. Man kann sich nun die Frage vorlegen, ob es nicht ein ebenso einfaches Verfahren gibt, *krummlinig begrenzte* Figuren nach Fläche auszugleichen, oder, was gleich bedeutend ist, in geradlinig begrenzte zu verwandeln, deren Flächeninhalt leicht als das Produkt von zwei Faktoren ermittelt werden kann.

Diese Aufgabe wird im folgenden gelöst, und es wird gezeigt werden, daß man nicht allein nach Flächeninhalt, sondern auch ebenso leicht in bezug auf das statische Moment, das Trägheitsmoment und jedes beliebige andere Moment auszugleichen vermag.

Beschreibung des Apparats.

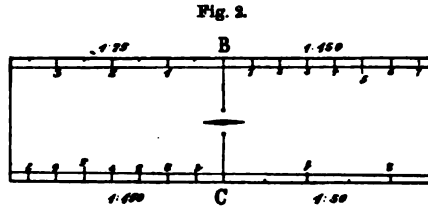
Die Figur 1 stellt ein zweiseitig geteiltes Lineal von 25 cm Länge, 5 cm Breite und 1 mm Dicke aus völlig durchsichtigem Celluloid in Form eines prismatischen Maß-



stabes vor. Der kurze Strich in der Mitte von AB bezeichnet eine, der Kante parallele, stählerne Schneide (siehe auch den Längsschnitt Fig. 1 unten), die in das Lineal eingelassen ist. Sie ist nach unten kreisförmig scharf angeschliffen und tritt auf der Kehrseite des Stabes etwa 0,35 mm hervor.

Die Kante A ist von der Mitte aus nach den Seiten hin im Maßstab 1:150 geteilt. Die Teilung ist auf der Unterseite des durch-

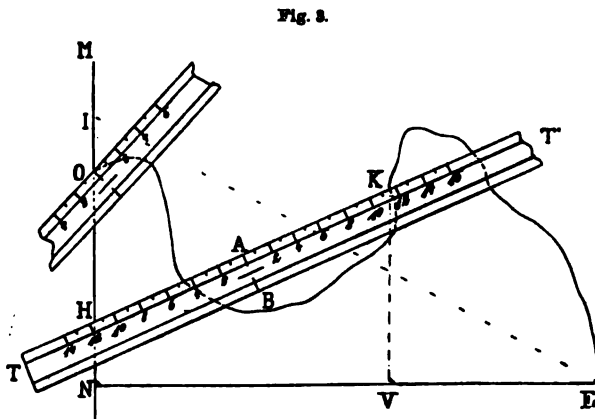
sichtigen Lineals mit kräftigen, schwarzen Strichen ausgeführt und auf Meterstriche beschränkt, damit die Übersichtlichkeit nicht durch für den vorliegenden Zweck unnötige Kleinstreiche beeinträchtigt wird. Die Kante *B* zeigt Teilungen in 1:150 und 1:75. Das Lineal Fig. 2 gleicht bis auf eine Verschiedenheit in den Teilungen dem in Fig. 1 dargestellten vollkommen. Die Kante *C* entspricht *A* in Fig. 1 und ist im Maßstab 1:150 und 1:50 von der Mitte aus geteilt. Infolge der bedeutenden Länge eines Meterintervalles empfehlen sich hier kleine Zwischenstriche bei 0,5.



Die Ausgleichung.

Die Lineale Fig. 1 und 2 sind für die Ausgleichung offener Kurvenzüge wie Fig. 3 oder geschlossener, krummlinig begrenzter Figuren bestimmt.

Um den Linienzug *OKE* (Fig. 3) von *O* aus gegen die Leitlinie *MN* auszugleichen, legt man die Kante *A* des Apparats mit der Nullmarke so im Anfangspunkt der Kurve *O* an, daß die Kante in die



Tangentenrichtung fällt. Drückt man nun die Schneide des Celluloid-lineals mit der rechten Hand ein wenig auf das Papier, so ist nur eine Drehung des Stabes um den Berührungspunkt der Schneide mit dem Papier und eine gleitende Bewegung in der Kantenrichtung möglich. Das Lineal wird nun mit Hilfe der Linken in der Schneidenrichtung

stetig nach rechts verschoben und zugleich allmählich so gedreht, daß sich die gemeinsame Nullmarke der Teilungen immer zwischen dem Schnittpunkt der Kante mit der Leitlinie MN und der Kurve befindet. Die Entfernung der Nullmarke von den Schnittpunkten H und K wird durch die Teilungen der Kante so geregelt, daß für diese Punkte an den Skalen die gleichen Zahlen abgelesen werden. Mit der stetigen Änderung der Lage des Lineals ändern sich auch die Ablesungen stetig, jedoch ist die Bewegung so zu regeln, daß für eine bestimmte Lage beide Ablesungen gleich werden. In der Figur schneidet die Leitlinie die linke Teilung kurz vor der 12. Wäre bei K die 12 schon erreicht, so müßte eine korrigierende Veränderung in der Lage des Lineals stattfinden. Eine genauere Ablesung zwischen den Strichen wird nicht gemacht, aber es ist nötig, schätzungsweise die Entfernung des Schnittpunktes vom nächsten Strich zu merken. Man verfolgt so den ganzen Verlauf der auszugleichenden Kurve, ohne die Punkte H und K aus den Augen zu lassen. Benutzt man die Kante A , so liegt die Nullmarke auf der Mitte zwischen H und K , während sie bei B und C mehr nach K hin fällt.

Es gehört einige Übung dazu, einen Linienzug schnell und fehlerlos auszugleichen. Die Schwierigkeit, H und K ständig im Auge zu behalten, wächst zunächst mit der Entfernung der beiden Punkte, jedoch lehrt die Erfahrung, daß es immerhin leicht ist, Kurven in einer Längenausdehnung von 20 bis 50 cm scharf auszugleichen. Auch kommt dem Verfahren eine äußerst günstige Fehlerausgleichung zu statten.

Die Kante A ist zur Ausgleichung nach Fläche bestimmt. Während der Bewegung befindet sich die Nullmarke immer auf der Mitte zwischen H und K , da rechts und links von A gleiche Teilungen 1 : 150 entworfen sind.

Um nach dem statischen Moment auszugleichen, benutzt man die Kante B des Apparats. Die Teilungen um B sind verschieden 1 : 150 und 1 : 75 (siehe Fig. 1 und 2); es wird daher $BK = \frac{1}{3}BH$.

Bei Anwendung der Seite C , Ausgleichung nach dem Trägheitsmoment einer Kurve, sind die Teilungen 1 : 150 und 1 : 50 gewählt, sodaß $CK = \frac{1}{3}CH$ ist.

Verwertung der ausgleichenden Geraden.

Der Kurvenzug OE (Fig. 4) wird durch die Gerade EA nach Fläche, durch EB nach dem statischen und durch EC nach dem Trägheitsmoment in bezug auf die Leitlinie MN ausgeglichen.

Es ergibt sich als Flächeninhalt des zwischen der Geraden OE und der Kurve liegenden Teils

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2} AO \cdot (EO) = 34,7,$$

als statisches Moment

$$\Sigma_2 = \frac{1}{3} BO (EO)^2 = 405,0,$$

als Trägheitsmoment

$$\Sigma_3 = \frac{1}{4} CO (EO)^3 = 5550,0.$$

Man erhält die Schwerpunktsordinate, indem man $PO = \frac{1}{3} EO$ macht und zu AP durch B eine Parallele zieht, die EO in S schneidet. Dann ist SO der Abstand der Schwerlinie von MN .

Ebenso leicht wird die reduzierte Pendellänge für O als Drehungspunkt konstruiert.

Man mache $P'O = \frac{1}{2} EO$ und ziehe zu BP' durch C eine Parallele, die EO in L schneidet. LO ist die gesuchte Länge.

Bei der Ausgleitung sehr unregelmäßiger oder in ihrer Hauptrichtung der Leitlinie paralleler Kurven kann es vorkommen, daß die ausgleichende Kante des Lineals die Linie sehr schräg schneidet. Diese ungünstige Lage wird dadurch vermieden, daß man die Ausgleitung an irgend einer Stelle der Kurve abbricht und an einem anderen Punkte weiter fortsetzt. Der Linienzug wird so durch *zwei oder mehrere* Gerade ausgeglichen, was durch die Fig. 5 veranschaulicht wird.

Die Geraden A_1E und A_2E gleichen die Figur nach Fläche, B_1E und B_2E nach dem statischen Moment in bezug auf MN aus. Der Anfangspunkt der Ausgleitung ist für die rechte und linke Seite der Kurve Z . Für Berechnungen gelten die Formeln:

$$\text{Fläche } \Sigma_1 = \frac{1}{2} A_1 A_2 (EO), \quad \text{stat. Moment } \Sigma_2 = \frac{1}{3} B_1 B_2 (EO)^2.$$

Fig. 4.

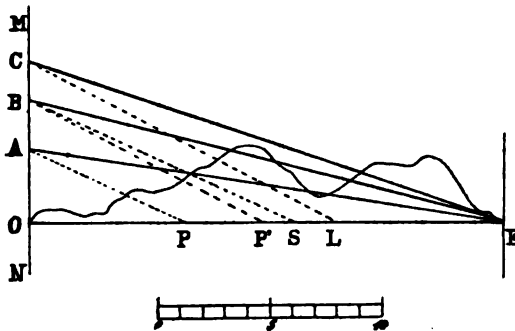
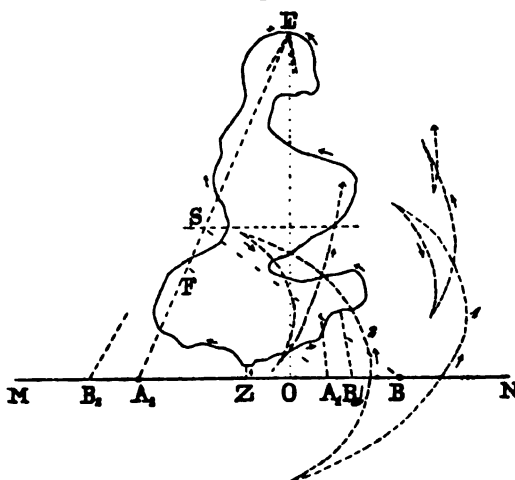


Fig. 5.



Da, wo es auf die zahlenmäßige Ermittlung von Σ_1 ankommt, empfiehlt es sich, EO zu 20 anzunehmen, für Σ_2 zu $\sqrt{30}$ und für Σ_3 zu $\sqrt{40}$. Die Lage des Endpunktes E kann auch außerhalb der Kurve gewählt werden. Dieser Fall tritt ein, wenn die Figur in mehr als zwei Teile zur Ausgleichung zerlegt wird. Man hat dann zu berücksichtigen, daß die Punkte E gleiche Entfernung von der gemeinsamen Leitlinie haben.

Der Weg, den die Schneide bei der Ausgleichung beider Kurvenzweige nach dem statischen Moment genommen hat, ist durch die punktierten Kurven 1 und 2 zur Anschauung gebracht.

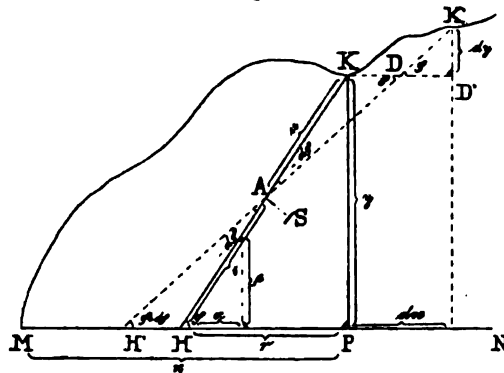
Für Flächenausgleichungen unregelmäßiger Figuren ist es zulässig und oft vorteilhaft, *krumme Leitlinien* zu ziehen, anstatt Zerlegungen der Kurven vorzunehmen.

Das Prinzip des Verfahrens ist durch die Betrachtung der drei am häufigsten in der Praxis vorkommenden Summenformen Σ_1 , Σ_2 und Σ_3 zur Genüge erläutert, so daß es mit Benutzung der weiterhin entwickelten Formel leicht wird, nach jeder gewünschten Summenform auszugleichen.

Theorie.

Die Gerade HK sei Kante des Lineals mit der Nullmarke A und der Schneide S . Soll die Kurve MKK' gegen die Leitlinie MHH' nach Fläche ausgeglichen werden, so muß $MHKM$ konstant bleiben, während HK in die unendlich wenig abweichende Lage $H'K'$ übergeht. Dann sind die spitzen Dreiecke AKK' und AHH' flächengleich. Also

Fig. 6.



(Fig. 6)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} AK \cdot AK' \cdot d\varphi \\ & = \frac{1}{2} AH \cdot AH' d\varphi. \end{aligned}$$

Ist KK' und HH' unendlich klein, so kann man setzen

$$AK = AK' = u, \quad AH = AH' = v.$$

Nach beiderseitiger Hebung des spitzen Winkels $d\varphi$ wird

$$u = v.$$

Für die Flächenausgleichung sind demnach die Teilungen der Kante einander gleich.

Mit Hilfe des Rotationskörpers von MK um MN ergibt sich nach der Guldinschen Regel ein ähnlicher Beweis für die Ausgleichung nach dem statischen Moment. Der Einfachheit wegen empfiehlt es sich aber, sogleich zur analytischen Ableitung der alle einzelnen Fälle umfassenden Formel für u und v überzugehen.

Für die Fläche $MHPKM$ besteht die Integralgleichung

$$\Sigma_1 = \int_{y=0}^{y=y} y dx.$$

Dieser entspricht für das rechtwinklige Dreieck

$$HPK = \int_{\beta=0}^{\beta=y} \beta d\alpha.$$

Die Ausgleichung bedingt, daß die Differenz der beiden Flächenstücke konstant bleibt:

$$\int_{y=0}^{y=y} y dx - \int_{\beta=0}^{\beta=y} \beta d\alpha = K.$$

Eine allgemeine Form erhält die Bedingung, wenn man schreibt

$$(1) \quad \int_{y=0}^{y=y} y^n dx - \int_{\beta=0}^{\beta=y} \beta^n d\alpha = K.$$

Als Gleichung der Geraden HK ergibt sich aus Fig. 6

$$\alpha = \frac{r}{y} \beta,$$

und als Ableitung folgt:

$$d\alpha = \frac{r}{y} d\beta.$$

Dieser Wert von $d\alpha$ wird in (1) eingesetzt und der Richtungskoeffizient $\frac{r}{y}$ vor das Integralzeichen gezogen:

$$(1a) \quad \int_{y=0}^{y=y} y^n dx - \frac{r}{y} \int_{\beta=0}^{\beta=y} \beta^n d\beta = K.$$

Schreibt man y statt β und differenziert, so wird

$$(2) \quad y^n dx = \left(\frac{r}{y}\right) y^n dy + d\left(\frac{r}{y}\right) \int y^n dy.$$

Aus Fig. 6 ersieht man, daß

$$\frac{r}{y} = \cotg \varphi \quad \text{und} \quad d\left(\frac{r}{y}\right) = -\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Durch Benutzung dieser Gleichungen nimmt (2) leicht folgende Form an:

$$(3) \quad dx - dy \cdot \cotg \varphi = -\frac{y \cdot d\varphi}{(n+1) \sin^2 \varphi}.$$

Nach dem Sinussatz ist in dem spitzen Dreieck AKD

$$KD = KA \cdot \frac{\sin KAD}{\sin KDA}.$$

Da nun $\sphericalangle KDA = \sphericalangle AHP = \varphi$, so wird

$$KD = -\frac{u d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $DD'K'$ folgt

$$DD' = dy \cdot \cotg \varphi.$$

Bildet man die Differenz zwischen $KD' = dx$ und DD' , so ergibt sich

$$dx - dy \cdot \cotg \varphi = -\frac{u d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Durch Substitution in (3) erhält man

$$(4) \quad u \cdot \sin \varphi = \frac{y}{n+1}.$$

Im Dreieck HPK ist

$$y = (u + v) \sin \varphi = u \sin \varphi + v \sin \varphi.$$

Nun folgt weiter aus (4)

$$(5) \quad v \cdot \sin \varphi = y \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n \cdot y}{n+1}.$$

Durch (4) und (5) gelangt man zu der gesuchten Beziehung zwischen u , v und n :

$$(6) \quad v = n \cdot u.$$

Wird die Ausgleichung im Anfangspunkte M der Kurve begonnen, so ist in der Formel (1a) die Konstante $K = 0$. Man erhält für das allgemeine Integral

$$(7) \quad \int_0^x y^n dx = \frac{r}{n+1} \cdot y^n.$$

Die oben behandelten Sonderfälle sind:

$$\begin{aligned} n = +1, & \quad \text{Fläche } \Sigma_1 = \int y dx = \frac{1}{2} r y; \\ n = +2, & \quad \text{Statisches Moment } \Sigma_2 = \int y^2 dx = \frac{1}{3} r y^2; \\ n = +3, & \quad \text{Trägheitsmoment } \Sigma_3 = \int y^3 dx = \frac{1}{4} r y^3. \end{aligned}$$

Ist (Fig. 3 und 6) die Kante des Lineals in der Richtung AH im Maßstab $1:m$ geteilt, so muß nach Gleichung (6) AK in $1:m \cdot n$ geteilt werden.

Für positive, ganze oder gebrochene n liegt die Schneide S zwischen H und K , für negative ganze n jenseits K und für gebrochene jenseits H . Nur für $n = -1$ versagt die Formel (6), da die Schneide im Unendlichen läge.

Wie erwähnt, wird bei der Ausgleichung nach der Summenform

$$\Sigma_{-n} = \int \frac{dx}{y^n} = \frac{r}{(1-n)y^n}$$

die Schneide und Nullmarke in die Verlängerung von HK (bei Fig. 3 und 7) nach T fallen. Da man von T aus nach einer Richtung nicht zwei Skalen $1:m$ und $1:m \cdot n$ an der Kante auftragen kann, hilft man sich dadurch, beide Teilungen auf folgende Weise in einer einzigen Skalentabelle zu vereinigen. Die Bedingung, welche erfüllt werden muß, lautet:

Wird in der Entfernung s von der Nullmarke die Zahl t an der Kante abgelesen, so soll bei $s' = n \cdot s$ die Zahl $t' = t + 1$, bei $s'' = n^2 \cdot s$ die Zahl $t'' = t + 2$ und allgemein bei $s_a = n^a \cdot s$ die Ziffer $t_a = t + a$ erhalten werden.

Die noch unbekannte Gleichung der Skalentabelle möge durch die Beziehung

$$s = f(t)$$

ausgedrückt werden, wo f als Funktionszeichen dient. Durch Einsetzen ergibt sich aus der gestellten Bedingung die Funktionalgleichung:

$$s_a = n^a \cdot f(t) = f(t_a) = f(t + a).$$

Die partielle Ableitung des zweiten und vierten Gliedes der Gleichung nach t und a führt auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t+a)}{\partial t} &= n^a \cdot f'(t) = n^a \cdot \frac{ds}{dt}, \\ \frac{\partial f(t+a)}{\partial a} &= n^a \cdot \log \text{nat } n \cdot f(t) = n^a \cdot \log \text{nat } n \cdot s. \end{aligned}$$

Die Ableitungen der symmetrischen Form $f(t+a)$ müssen einander gleich sein. Es ist daher

$$\log \operatorname{nat} n \cdot dt = \frac{ds}{s}.$$

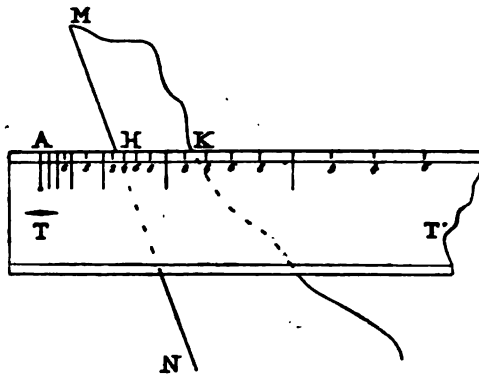
Durch Integration erhält man

$$\log \operatorname{nat} s = t \cdot \log \operatorname{nat} n$$

und durch Umkehrung die Gleichung der Exponentialskala

$$(8) \quad s = n^t.$$

Fig. 7.



Figur 7 veranschaulicht die Skala zur Ausgleichung nach der Integralform

$$\Sigma = \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{2r}{\sqrt{y}}.$$

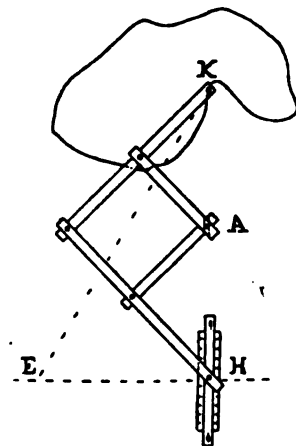
Hier ist $n = -2^{-1}$, so daß die Gleichung der entsprechenden Teilung lautet

$$s = 2^t.$$

Die Ziffern für die langen Teilstriche 0, 1 ... t sind in der Zeichnung weggelassen. Bei jedem dieser Striche beginnt die Bezifferung wieder mit Null.

Es mag noch bemerkt werden, daß die Nullmarke A (vgl. Fig. 3) sich überall in der Entfernung der *mittleren Höhe* des Flächenstücks

Fig. 8.



$NOKV$ von NV befindet, sodaß also ein bei A befestigter Farbstift den Verlauf der Integration von 0 bis K auf dem Papier graphisch zum Ausdruck bringt. Das Lot von A auf NV ist immer gleich $\frac{1}{2}(NO + VK)$, wenn nach Fläche ausgeglichen wurde.

Das allgemeine Ausgleichungsprinzip läßt sich, wie Fig. 8 zeigt, auch zur Konstruktion eines Umfahungsplanimeters verwenden.

Die überbrückte Walze H ist durch einen Storchschnabel mit dem Fahrstift K und einem die Schneide ersetzenden Rädchen A verbunden. Der Weg HE der Walze entspricht der Leitlinie, während des Storchschnabel bewirkt, daß $AH:AK = n:1$ bleibt. Macht man für $n=1$ die lotrechte Ent-

fernung des Anfangspunktes von der Leitlinie $HK = k = 2$, so entspricht die Umdrehungszahl der Walze resp. ihr Weg HE der Fläche der umfahrenen Figur. Ähnliches gilt für das statische und das Trägheitsmoment.

Genauigkeit der Ausgleichung.

Die Instrumentalfehler, welche das Resultat der Ausgleichung beeinflussen, sind zunächst gröbere Ungenauigkeiten in den Maßstäben u und v . Ihre gemeinsame Nullmarke muß mit der Projektion des Mittelpunktes der Schneide auf die Kante zusammenfallen, und schließlich müssen die letzteren einander parallel sein. Trifft diese Bedingung nicht zu, so weicht die ausgleichende Kante konstant nach einer Seite hin ab. Der Fehler ist dem von der Schneide zurückgelegten Wege proportional, fällt aber für geschlossene Kurvenzüge (vergl. Fig. 5) fort, da Hin- und Rückweg (Linie 1 und 2) etwa gleich werden.

Außer den genannten Fehlern, deren Beseitigung auf mechanischem Wege erreicht wird, ist die Genauigkeit nur von den Schätzungsfehlern bei H und K abhängig. Sie sind gleich häufig positiv und negativ, sodaß man für die mittlere, seitliche Abweichung nach dem Fehlergesetz schreiben kann

$$\mu = \pm \kappa \sqrt{s},$$

wenn s die Länge der Kurve und κ eine Konstante bezeichnet. Die Versuche ergaben für Linienzüge von ca. 15 cm Länge einen mittleren Ausgleichungsfehler von weniger als 0,5 mm.

Anmerkung. Wegen anderer Apparate für denselben Zweck vergl. A. Amsler, Über mechanische Integrationen, Dycks Katalog mathematisch-physikalischer Modelle, 1892, Abschnitt 3, S. 110. — Außer dem Integrappen von Abdank-Abakanowicz gehört ferner zu dieser Gattung von Integrationsapparaten der sogenannte „Prytzsche Stangenplanimeter“.

Kleinere Mitteilungen.

Zur Reduktion eines Kräftesystems auf zwei Einzelkräfte.

Ein Kräftesystem, das auf ein starres Punktsystem wirkt, läßt sich, wie bekannt, auf unendlich viele Arten durch zwei Einzelkräfte ersetzen, von welchen die eine ihren Angriffspunkt in einem beliebig gegebenen Punkte hat. Man kann fragen, 1) welches dabei der geometrische Ort für den Endpunkt jener Einzelkraft ist, wenn ihr Angriffspunkt fest bleibt, 2) wie sich mit der Lage dieses Angriffspunktes der genannte geometrische Ort ändert.

Diese Fragen sollen hier mit Hilfe Grassmannscher Methoden beantwortet werden.

Das gegebene Kräftesystem sei mit S bezeichnet. Der Angriffspunkt der ersten Einzelkraft heiße a , ihr Endpunkt p . Diese Kraft selbst — als „Linienteil“ oder „Stab“ aufgefaßt — ist also durch das äußere Produkt $[ap]$ dargestellt, wenn wir uns die Punkte a und p mit der Masse 1 versehen denken. Daher wird, wenn man die zweite Einzelkraft X nennt,

$$[ap] + X = S$$

oder

$$(1) \quad X = S - [ap].$$

Damit X wirklich eine einzelne Kraft sei, muß das Eigenmoment von X (das äußere Produkt von X mit sich selbst) verschwinden, also, weil $[apap] = 0$ ist,

$$(2) \quad [XX] = [SS] - 2[Sap] = 0$$

sein. Diese Gleichung ist in bezug auf p vom ersten Grade, stellt folglich eine Ebene dar, womit die erste Frage beantwortet ist.

Wir können übrigens die gefundene Gleichung in bezug auf a und p homogen machen, indem wir mit Grassmann die unendlich ferne Ebene ω einführen. Das äußere Produkt von ω mit irgend einem Punkte ist nämlich der Masse dieses Punktes gleich, also wird bei obiger Festsetzung über die Massen von a und p :

$$(3) \quad [\omega a] = 1, [\omega p] = 1,$$

und Gleichung (2) läßt sich schreiben

$$[4] \quad [SS][\omega a][\omega p] - 2[Sap] = 0.$$

Bezeichnen wir die durch letztere Gleichung dargestellte Ebene (den Ort von p bei festem a) mit α , so ist

$$0 = [\alpha p] = [SS] [\omega a] [\omega p] - 2 [Sap],$$

folglich

$$(5) \quad \alpha = [SS] [\omega a] \omega - 2 [Sa].$$

Man sieht aus dieser Gleichung (wie auch schon aus (4) oder (2)), daß die Ebene α parallel zur Ebene $[Sa]$, d. h. zur Nullebene des Punktes a in bezug auf das durch das Kräftesystem S bestimmte Nullsystem ist, weshalb die Intensität der Einzelkraft $[ap]$ ein Minimum wird, wenn diese Kraft senkrecht auf der Nullebene von a steht.

Da nach Gleichung (5) die Ebene α eine lineare Funktion des Punktes a ist, so haben wir als Antwort auf die zweite Frage: Wenn a (der Angriffspunkt der ersten Einzelkraft) eine Gerade beschreibt, so dreht sich die Ebene α (der geometrische Ort des Endpunktes der ersten Einzelkraft) ebenfalls um eine Gerade, oder durch Zuordnung von a und α entsteht eine lineare reziproke Verwandtschaft (Korrelation). Untersuchen wir, ob diese Verwandtschaft involutorisch ist (ein Polarsystem bedingt) oder nicht. Sei b ein beliebiger Punkt, β die zugeordnete Ebene, dann ergibt sich durch äußere Multiplikation von (5) mit b :

$$[\alpha b] = [SS] [\omega a] [\omega b] - 2 [Sab]$$

und hieraus durch Vertauschung von a mit b :

$$[\beta a] = [SS] [\omega b] [\omega a] - 2 [Sba],$$

oder weil

$$[Sba] = -[Sab],$$

$$[\beta a] = [SS] [\omega a] [\omega b] + 2 [Sab].$$

Demnach folgt aus

$$[\alpha b] = 0$$

nicht allgemein

$$[\beta a] = 0,$$

also hat man es mit keinem Polarsystem zu tun.¹⁾

Welches Verhalten die Wirkungslinie der zweiten Einzelkraft X zeigt, wenn a fest bleibt und p sich in α bewegt, ist zwar aus bekannten Sätzen

1) Die beiden Kernflächen dieser Korrelation arten aus. Denn der Ort der Punkte a , welche in ihren zugeordneten Ebenen α liegen, hat die Gleichung $[\alpha a] = 0$, d. h. nach (5)

$$[SS] [\omega a]^2 = 0$$

oder weil $[SS]$ von Null verschieden ist,

$$[\omega a]^2 = 0,$$

welche Gleichung die doppelt zu denkende unendlich ferne Ebene darstellt. Ist aber $[\omega a] = 0$, so wird

$$\alpha = -2 [Sa],$$

d. h. α fällt mit der Nullebene von a zusammen, die Nullebenen aller unendlich fernen Punkte bilden jedoch einen Ebenenbündel mit dem Nullpunkt der unendlich fernen Ebene als Mittelpunkt, in welchen Bündel demnach die zweite Kernfläche ausartet.

über Nullsysteme leicht zu erschließen, möge aber der Vollständigkeit wegen hier noch aus den obigen Gleichungen abgeleitet werden. X muß (wie bekannt) immer in einer bestimmten Ebene, der Nullebene $[Sa]$ von a liegen, denn durch äußere Multiplikation von (1) mit a erhält man $[Xa] = [Sa]$, welche Gleichung aussagt, daß die Verbindungsebene von X und a mit der festen Ebene $[Sa]$ zusammenfällt. Da zufolge (1) die Gerade X von dem Punkte p linear abhängt, so entsteht durch Zuordnung von X und p eine lineare reziproke Verwandtschaft zwischen den Ebenen $[Sa]$ und α . Diese Korrelation kann nicht etwa in der Weise ausarten, daß die Linie von X immer durch einen und denselben Punkt a' von $[Sa]$ geht, denn sonst hätte man $[Xa'] = 0$, oder wegen (1)

$$[apa'] = [Sa'],$$

es fiel also die Verbindungsebene $[apa']$ des in der Ebene α beweglichen Punktes p und der beiden festen Punkte a und a' fortwährend mit der festen Ebene $[Sa']$, der Nullebene von a' in dem durch S bestimmten Nullsystem zusammen. Das ist (für einen im Endlichen liegenden Punkt a) nicht möglich, weil sonst α durch a gehen, d. h. $[\alpha a] = 0$ sein und mithin wegen (5) das Eigenmoment $[SS]$ des Kräftesystems S verschwinden oder dieses Kräftesystem in ein solches ausarten müßte, das auf eine einzige Kraft reduziert werden kann.

Stuttgart.

R. MEHMKE.

Aussprüche über sexagesimale Winkeltteilung und über Rechenmaschinen.

Lesefrüchte aus den Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens von H. Bruns.¹⁾

(Einleitung, S. 2.) Stevin — einer der Erfinder der Dezimalbrüche — hat seinerzeit, in klarer Erkenntnis der Wichtigkeit des Gegenstandes, die Forderung erhoben, daß entsprechend der streng dezimalen Anlage der Rechnung fortan auch die Maßgrößen dezimal abzustufen seien, wenn anders die neu erfundene Rechnungsart ihren vollen Wert entfalten solle. Leider ist die Rechentechnik auch heute noch recht weit davon entfernt, den aus einer Erfüllung der genannten Forderung fließenden Gewinn einheimen zu können. Denn selbst auf rein wissenschaftlichem Gebiete, wo man noch am ehesten das Durchdringen einer solchen Neuerung erwarten sollte, behauptet sich z. B. in der *Winkeltteilung ein atavistischer Rest der alten Sexagesimalteilung*, die doch nur in einer früheren, unvollkommeneren Entwicklungsphase der Rechentechnik einen vernünftigen Sinn besaß. Dies ist um so mehr zu bedauern, als solche Rudimente früherer Bildungen ein ernsthaftes Hindernis sind, den massenhaften Ziffernverbrauch, der schon jetzt mit seiner routinemäßigen Ode in drückender Weise auf einzelnen rechnenden Wissenschaften lastet, auf besondere Rechenmaschinen abzuwälzen, die eigens für gewisse, massenhaft auftretende Operationen konstruiert sind.

(S. 7.) Einige von den Wissenschaften, die mit einem starken Ziffernverbrauch belastet sind, wie z. B. die Fixstern-Astronomie, stehen — falls

1) Leipzig 1903, B. G. Teubner.

sie ihre Probleme mit Erfolg bewältigen wollen — vor der Notwendigkeit, über kurz oder lang zu einem zentralisierten Großbetriebe überzugehen, bei dem bestimmte zusammengesetzte Rechenoperationen hunderttausend- und millionenfach auszuführen sind. Daß hierbei die Maschine, und zwar die jedesmal für eine einzige bestimmte Aufgabe möglichst vollkommen durchgebildete Maschine, der unentbehrliche Helfer sein wird, steht meiner Überzeugung nach außer Frage. *Es besitzt übrigens ein gewisses psychologisches Interesse, zu beobachten, wie auf der einen Seite z. B. bei der Ausrüstung einer Sternwarte für ein neues Instrument ansehnliche Summen verausgabt und dabei nach Möglichkeit die Fortschritte der Technik herangezogen werden, wie man aber auf der anderen Seite vorläufig gar nicht daran denkt, ob die Technik, die so sinnreiche Apparate wie die Schreibmaschine und die Kontrollkasse geschaffen hat, nicht etwa auch für die Rechenarbeit, welche zeitlich bemessen ein Vielfaches der Beobachtungsarbeit ausmacht, hilfreiche Dienste leisten könnte.*

Auskünfte.

V. V., A. Das *Spiegellineal* nach Prof. Reusch zur mechanischen Bestimmung der Normalen gezeichnet gegebener Kurven kann, aus Glas in einer Länge hergestellt, die für gewöhnliche Zwecke genügt, von Hofoptiker E. Spindler, Stuttgart, Langestraße 17, bezogen werden. M.

Fr. S., Sz. Eine Darstellung des *absoluten Maßsystems* mit Angabe der Quellen finden Sie in dem von C. Runge verfaßten Abschnitt über Maß und Messen in der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Band V 1, Heft 1, S. 19 u. f. M.

Bücherschau.

P. Harzer. *Über die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen.* Mit einem Anhang unter Mithilfe von F. Ristenpart und W. Ebert berechneter Tafeln. Publ. der Sternw. in Kiel. XI. 4^o. 106 S. u. 22 S. Tafeln. Leipzig 1901.

Nach Anlage und Durchführung bietet die schöne und wichtige Arbeit Harzers, die auf einem der bedeutsamsten Gebiete der theoretischen Astronomie Neues schafft, ebensowohl dem Mathematiker wie jedem Astronomen hohes Interesse.

Das Problem der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen läuft in der Fassung, wie es bei der Bahnberechnung auftritt, auf die Ermittlung von 11 Unbekannten hinaus, denen 11 Gleichungen gegenüberstehen. Natürlich muß man zur Lösung einen indirekten Weg einschlagen, und die Art dieses Weges ist es, die den Unterschied der einzelnen Methoden ausmacht. Durch eine erste Näherung, die wie alle ersten Bahnbestimmungen kurze Zwischenzeiten voraussetzt, reduziert sich die Aufgabe auf drei Gleichungen mit drei

Unbekannten, die bei Harzer die drei den drei geozentrischen Beobachtungen entsprechenden heliozentrischen Distanzen sind. Übersichtlich setzt der Verfasser den Grundgedanken der Näherung nach Gauß, Encke, v. Oppolzer und Gibbs auseinander und weist analytisch und numerisch das Übergewicht der Gibbsschen Darstellung der Ausgangsfunktion nach. Er führt aber nun aus, daß gleich von vornherein die Annäherung sich noch weiter treiben lasse, so weit, daß die Hypothesen der früheren Methoden fortfallen und sogleich die wahren Werte der drei heliozentrischen Distanzen hervorgehen. Nachdem diese bekannt, ist die Ableitung der übrigen Bahnelemente ein Kleines. In einem zweiten Abschnitt werden nun die dem Zwecke einer weitergehenden Annäherung dienenden Reihenentwicklungen vorgenommen, die die Verhältnisse der Dreiecksflächen als Funktionen der heliozentrischen Entfernungen geben. Die Art des Konvergenzbeweises scheint uns von einer Bedeutung zu sein, die über den Rahmen der Arbeit hinausgeht.

Den bei ersten Bahnrechnungen fast nur in Frage kommenden Fall dreier Beobachtungen mit kleinen Zwischenzeiten und folglich auch geringen heliozentrischen Bewegungen behandelt das dritte Kapitel, wobei es sich als zweckmäßig herausstellt, den durch eine Reihenentwicklung ausgedrückten Parameter der Bahnellipse neben den drei heliozentrischen Radienvektoren mitzubestimmen. Während aber vielleicht die hier vorgetragene Methode noch keinen in die Augen springenden praktischen Gewinn gegenüber andern Verfahren darbietet, ergibt sich ein solcher unzweifelhaft für Beobachtungen, die um große Zwischenzeiten voneinander abliegen, wenn es also die Verbesserung einer schon genähert bekannten Bahn nach drei Beobachtungen gilt (Kap. IV). Reihenentwicklung verbietet hier die Länge der Zwischenzeiten, die selbst den Fall durch ganze Umläufe des Planeten getrennter Beobachtungen einschließen. Die Auswertung der Koeffizienten der linearen Gleichungen, die die Korrektur der zu Grunde gelegten geozentrischen Abstände liefern, ist sowohl für kleine Exzentrizitäten (Planetenbahnen) als auch für große um Eins herum gelegene (Kometenbahnen) durchgeführt. Eine Untersuchung über die Einwirkung von Fehlern in den geozentrischen Beobachtungen auf die Beträge der Unbekannten (i. e. heliozentrische Distanzen und Elemente) (Kap. V.) findet sich hier wohl zum erstenmal in einer für die praktische Verwendung völlig hinreichenden und einfachen Weise. Das Schlußkapitel des Werkes, betitelt „Beispiele“, bietet an Hand der klassischen Beispiele der *Theoria motus* und eines einer modernen Kometenbahn entnommenen eine eingehende Rekapitulation der vorgetragenen Methode und enthält zahlreiche wertvolle Winke. — Ein Anhang vereinigt mehrere Hilfstafeln für die Funktionen, die bei der Anwendung jener Methode auftreten.

Sehr bald nach ihrer Veröffentlichung hat sich Harzers Bahnbestimmung Eingang in die Praxis verschafft: schon jetzt sind mehrfach Planeten- und noch mehr Kometenbahnrechnungen nach ihren Regeln durchgeführt worden.

Straßburg i. E.

C. W. WIRTZ.

H. Andoyer, Théorie de la lune. 8°. 86 S. Paris 1902.

Dieses Buch, das die Nr. 17 der bei C. Naud erscheinenden Kollektion „Scientia“ bildet, setzt es sich zum Ziel, nur unter Benützung der einfacheren Hilfsmittel aus der Differential- und Integralrechnung analytisch die Bewegung des Mondschwerpunktes in bezug auf den Erdschwerpunkt zu lehren. Das

Hauptgebiet der Theorie findet eine geschlossene Darstellung, dagegen wird von vorneherein auf die numerische Bestimmung der in der Mondtheorie auftretenden Glieder verzichtet. Recht eingehend behandelt Kapitel II und III den Einfluß der Sonne auf die Bewegung des Mondes, allerdings — und das lag im Wesen der gestellten Aufgabe — nicht soweit, daß die Genauigkeit der Entwicklung einigermaßen jener der Beobachtung gleichkäme. Jedenfalls genügt es indes, um die Art der Schwierigkeiten, auf die man stößt, aufzudecken und zu zeigen, wie man sie überwindet. Strebt man aber eine Mondtheorie von höchstmöglicher praktischer Präzision an, so muß man ohnehin den rein analytischen Weg verlassen und mit Hansen, Hill, Brown rein numerisch das Problem anfassen. Kapitel IV und V befaßt sich mit den Gliedern zweiter Ordnung in der Bewegung des Mondes, die teils der Wirkung der Planeten, teils der Gestalt von Erde und Mond ihren Ursprung verdanken, und das VI. Kapitel berührt noch kurz die Einwirkung der säkularen Ungleichheiten im Sonnenlauf auf die Bewegung des Mondes.

Straßburg i. E.

C. W. WIRTZ.

L. Dünner, Die älteste astronomische Schrift des Maimonides.

Aus zwei Manuskripten der Nationalbibliothek in Paris, bezeichnet: Fonds hébreu Nr. 1058 und Nr. 1061. Ein Beitrag zur Geschichte der Astronomie. 8°. 54 S. Würzburg 1902.

Dem bekannten jüdischen Gelehrten Rabbi Mose ben Maimun, gewöhnlich Maimonides genannt (* Cordoba 1135 März 30, † Alt-Kairo 1204 Dezember 13), verdanken wir u. a. eine Schrift Qidusch Hachodesch (Heiligung des Neumonds), in welcher er streng wissenschaftlich die Grundlagen des jüdischen Kalenders behandelt. Als kurzer Auszug aus jener größeren Arbeit kann nun eine Reihe von Kapiteln gelten, die Maimonides in jungen Jahren (1158) in Briefform einem Freunde zukommen ließ und in denen er die Regeln über die Berechnung des Neumonds (Molad) und des Beginnes der Jahreszeiten (Tekufoth) gemeinverständlich niederlegt. Diese Briefsammlung findet sich in den beiden im Titel bezeichneten MS. der Pariser Nationalbibliothek. Die Handschriften sind in neuhebräischer Schrift abgefaßt und bereits in den Jahren 1849 und 1859 veröffentlicht. Herr Dünner gibt zum ersten mal die deutsche Übersetzung, der er einige einleitende Worte und viele kritische Anmerkungen beifügt. Die 11 Hilfstafeln des Maimonides sind mit abgedruckt; die zweite, die sich im MS. nicht mehr vorfand, hat der Herausgeber neu berechnet. Der oben erwähnten großen Arbeit Qidusch Hachodesch fügt die hier veröffentlichte „Abhandlung über die Wissenschaft der Kalenderlehre“ nichts Neues hinzu, und da jene größere Schrift des Maimonides schon mehrfach von Historikern und Astronomen besprochen worden, kann hier auf eine nähere Inhaltsangabe der „Wissenschaft der Kalenderlehre“ verzichtet werden.

Straßburg i. E.

C. W. WIRTZ.

I. H. Lamberts Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Kometen.

Deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von L. Bauschinger.
16°. 149 S. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 133).
Leipzig 1902.

Der Herausgeber hat sich das Verdienst erworben, die Leistungen I. H. Lamberts (1728—1777) auf dem Gebiete der Kometenbahnberechnung in einem modernen Gewande leicht zugänglich gemacht und so dem elsässischen Gelehrten zu seinem historischen Recht verholfen zu haben. Der Hauptsache nach sind es zwei Abhandlungen Lamberts, die hier in ausgezeichnete Übersetzung vorliegen: „*Insigniores orbitae Cometarum proprietates*“ (1761) und „*Observations sur l'Orbite apparente des Comètes*“ (1771), und diesen folgen dann in den Anmerkungen Auszüge aus anderen Schriften Lamberts, die sich auf unseren Gegenstand beziehen. In jenen Anmerkungen gibt ferner der Herausgeber eine kurzgefaßte übersichtliche Darstellung der Geschichte der Bahnbestimmung der Kometen und hebt eben dort die großen Verdienste Lamberts um dieses Problem klar hervor. Die Olbersche Methode, die heutigen Tages über alle anderen Vorschläge den Sieg davongetragen, unterscheidet sich, abgesehen von einem Punkte, der zur Kürzung der Rechnung beiträgt, kaum von der Lambertschen.

Schließlich sei hier noch hingewiesen auf eine aufs engste mit dem Thema verknüpfte interessante Arbeit des Herausgebers: „Über die Lambertsche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen (Veröff. d. Kgl. astron. Recheninst. zu Berlin, Nr. 20), die sich eingehend mit der Frage der Identität der Lambertschen und Olberschen Methode beschäftigt und nachweist, „daß Lambert alle prinzipiellen Grundlagen der heute gebräuchlichsten, indirekten Bahnbestimmungsmethode der Kometen geschaffen hat und daß diese daher seinen Namen mit größerem Rechte zu tragen hätte, als den von Du Séjour und Olbers, wodurch des letzteren Verdienst, die Methode in ihrer einfachsten Form dargestellt und allgemein eingeführt zu haben, keineswegs geschmälert wird.“

Straßburg i. E.

C. W. WIRTZ

F. Hayn, Selenographische Koordinaten. I. Abhandlung. Abh. d. math.-ph. Kl. d. K. S. Ges. d. Wiss. XXVII. Bd, Nr. IX. 8°. 61 S.
Leipzig 1902.

Die Abhandlung bildet die theoretische Vorarbeit zu einer vom Verfasser am 30 cm - Refraktor der Leipziger Sternwarte ausgeführten Beobachtungsreihe zur Bestimmung der selenographischen Lage einer größeren Anzahl von Punkten der Mondoberfläche. Die vorteilhafte Wahl der Gestalt des Hauptnetzes ermöglichte nun aber außerdem eine unabhängige Bestimmung der Rotationselemente des Mondes. Vor der Berechnung unterwarf indes der Verfasser die mathematische Behandlung der Monddrehung einer Revision, deren Ergebnis den Inhalt dieser Schrift bildet. Frühere Bearbeitungen beschränkten sich bei der Integration der Bewegungsgleichungen auf die erste Näherung und unterließen den Nachweis der verschwindenden Kleinheit der höheren Glieder. Es sollen hier nun die Untersuchungen so weit geführt werden, daß die Genauigkeitsgrenze selenozentrisch 2", geozentrisch aber 0".01 beträgt. Das entspricht der bei analogen irdischen Vorgängen festgehaltenen

Schärfe. Im Gegensatze zu früheren Bestrebungen, die die physische Mondlibration mehr geometrisch anschaulich geschlossen darzustellen suchten, will Verfasser sein Ziel nur auf dem Wege numerischer Durchrechnung erreichen. In den ersten vier Kapiteln wird von der direkten Anziehungswirkung der Sonne auf die Rotationsbewegung des Mondes abgesehen, der man von vorneherein einen sehr geringen Einfluß zuschreiben darf, und in der Tat lehrt dann das fünfte Kapitel, daß die einzig bemerkbare Wirkung der Sonnenanziehung auf das rotierende Mondellipsoid darin besteht, daß hierdurch die mittlere Neigung des Mondäquators um ein geringes sich anders ergibt, als wenn die Erde allein wirkt. Bei der Berechnung der physischen Libration darf der Einfluß der Sonne vernachlässigt werden.

Wenn auch das Endresultat der schönen und interessanten Arbeit darauf hinausläuft, „daß schließlich vielleicht die bisherigen Entwicklungen dem praktischen Bedürfnis genügen können,“ so wird man doch dem Verfasser durchaus beistimmen, „daß es jedenfalls ein wissenschaftliches Interesse hat, über die Rotationsverhältnisse des Mondes bis zu einem gewissen Grade genau unterrichtet zu sein; außerdem entspricht es den Gepflogenheiten der Astronomie, die Unsicherheiten der Beobachtungen nicht durch Ungenauigkeit der Rechnung zu vergrößern.“

Der Veröffentlichung des II. Teiles, der wohl die Bestimmung der Rotationselemente des Mondes aus den Leipziger Beobachtungen bringen wird, sehen wir mit Interesse entgegen.

Straßburg i. E.

C. W. WIRTZ.

Neue Bücher.

Analysis.

1. BRUNS, HEINRICH, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. 8°. VI u. 159 S. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 4.

Astronomie, Geodäsie, Nautik.

2. MOOSER, J., Theorie der Entstehung des Sonnensystems. Eine mathem. Behandlung der Kant-Laplace'schen Nebularhypothese. gr. 8°. 30 S. St. Gallen, Fehr. M. 1.20.
3. STEBBINS, F. C., Navigation and nautical astronomy. 8vo. pp. 352. London, Macmillan. 8 s. 6 d.

S. auch Nr. 28.

Darstellende Geometrie.

4. ENBLOM, R. S., Perspektivisch quadrierte Kartons. 2. verb. Aufl. 3 Bl. je 55,5 × 40 cm. Lith. Nebst Anleitung zum Gebrauch. 8°, 6 S. m. 2 Fig. Stuttgart, Wittwer. M. 3.

Geschichte.

5. ERMENTY, Dr. Josef Petzvals Leben u. Verdienste. 2., wesentlich verm. Ausg. m. 11. Bildern u. 2 Fig. gr. 8°, VIII u. 86 S. Halle, Knapp. M. 2.40.

Mechanik.

6. CAVALLI, ERNESTO, Avviamento allo studio della meccanica: elementi di cinematica teorica. 2^a ediz. 8°. p. 91 & 4 tav. Napoli. L. 4.
7. ENCYKLOPÄDIE d. mathemat. Wissenschaften. IV. Bd. 1. Tl. 3. Heft. Leipzig, Teubner. M. 4.60.
8. FÖPPL, AUG., Vorlesungen über technische Mechanik. II. Band. Graphische Statik. 2. Aufl. 8°, XII u. 471 S. m. 176 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 10.
9. LOCHT-LARAYE, LÉON DE et LEGRAND, LAURENT, Cours de graphostatique pure. In-4° avec fig. Liège, Cluck. Frs. 12.
10. MAGGI, GIAN ANTONIO, Principi di stereodinamica: corso sulla formazione, l'interpretazione e l'integrazione delle equazioni del movimento dei solidi. 8°. p. 275. Milano. L. 7.50.
11. WERNICKE, AD., Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung mit Anwendungen und Übungen aus den Gebieten der Physik und Technik. (In 2 Teilen.) I. Teil: Mechanik fester Körper. Von Alex. Wernicke. 4. völlig umgearbeitete Aufl. 3. (Schluß-)Abteilung: Statik und Kinetik elastisch-fester Körper (Lehre von der Elastizität u. Festigkeit). Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 10; geb. M. 11.

Physik.

12. BROWN, THEODORE, Stereoscopic phenomena of light and sight. Cr. 8vo. pp. 100. London, Guttenberg press. 3 s. 6 d.
13. CHRISTIANSEN, C., und MÜLLER, J. C., Elemente der theoretischen Physik. 2. verb. Aufl. 8°, VIII u. 532 S. m. 160 Fig. Leipzig, Barth. M. 10; geb. M. 11.
14. DONLE, WILHELM, Lehrbuch der Experimentalphysik für Realschulen u. Realgymnasien. 2. verm. u. verbess. Aufl. gr. 8°, X u. 380 S. m. 420 Abb. u. 560 Übungsaufgaben. Stuttgart, Grub. geb. M. 3.60.
15. IZES, PETRUS, Über die Abhängigkeit der Absorption des Lichtes v. der Farbe in kristallisierten Körpern. Gekrönte Preisschrift. Diss. gr. 8°, 82 S. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 2.
16. KERSTLER, FRANZ, Das Ampèresche elektrodynamische Elementarpotential. 8°, 17 S. Budapest, Buchdruckerei der Pester Lloyd-Gesellschaft.
17. KOLLERT, JULIUS, Katechismus der Physik. 6. verbesserte u. vermehrte Aufl. 8°, XV u. 593 S. m. 364 Fig. Leipzig, Weber. geb. in Leinw. M. 7.
18. NORDMANN, CHARLES, Essai sur le rôle des hertiennes en astronomie physique et sur diverses questions qui s'y rattachent (thèse). In-4°, avec 16 fig. Paris Gauthiers-Villars. Frs. 6.
19. QUESNEVILLE, M. G., Théorie nouvelle de la polarisation rotatoire. In-8° avec fig. Paris, Hermann. Frs. 4.
20. SKLODOWSKA-CURIE, M^{me}, Recherches sur les substances radio-actives (thèse). In-8°, avec fig. Paris, Gauthiers-Villars. Frs. 4.
21. STEINMETZ, CHARLES PROTEUS, Theoretische Grundlagen der Starkstrom-Technik. Übers. v. J. HEFTY. gr. 8°, XI u. 331 S. m. 143 Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 9; geb. in Leinw. M. 10.
22. STEINMETZ, CHARLES PROTEUS, Théorie et calcul des phénomènes du courant alternatif. Traduit sur la 3^e édition américaine, revue et augmentée par HENRI MOUZET. Gr. in-8° avec 210 fig. Paris, Vve Dunod. Frs. 20.
23. TAMMANN, GUSTAV, Kristallisieren und Schmelzen. Ein Beitrag zur Lehre der Änderungen des Aggregatzustandes. 8°, X u. 348 S. m. 38. Abb. Leipzig, Barth. M. 8; geb. M. 9.
24. TETMAIER, L. v., Die Gesetze der Knickungs- u. der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe. 3. vervollständ. Aufl. gr. 8°, VIII u. 211 S. m. 19 Abb. u. 6 Taf. Wien, Deuticke. M. 8.

Rechenmaschinen, Tafeln.

25. BOUVART, C., et RATINET, A., Nouvelles tables de logarithmes à 5 décimales conformes à l'arrêté ministériel du 3 août 1901. Edition simple, division centésimale. In-8°, Paris, Hachette. Cart. Frs. 2.
26. — —, Les mêmes tables, édition double. Division centésimale et division sexagésimale. Cart. Frs. 2.50.
27. BURNITT, F. G., Tables of logarithms and decimals adapted to business and statistical calculations. 8vo. London, Simpkin. 1 s.
28. KOLL, OTTO, Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine. gr. 8°, IV u. 81 S. m. in den Text gedruckten Figuren. Halle a. S., Strien. geb. M. 5.

Verschiedenes.

29. AUERBACH, FELIX, Das Zeißwerk und die Karl-Zeiß-Stiftung in Jena, ihre wissenschaftliche, technische u. soziale Entwicklung und Bedeutung für weitere Kreise dargestellt. 8°, IV u. 124 S. m. 78 Abb. Jena, Fischer.
30. BIEL, B., Mathematische Aufgaben f. d. höheren Lehranstalten, unter möglicher Berücksichtigung der Anwendungen, wie überhaupt der Verknüpfung der Mathematik m. anderen Gebieten zusammengestellt. Ausg. f. Gymnasien. 1. Tl.: Die Unterstufe. gr. 8°, VI u. 161 S. Leipzig, Freytag. geb. in Leinw. M. 2.50.
31. FUHRMANN, ARWED, Bauwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung. Lehrbuch, Aufgabensammlung und Literaturnachweis. (Teil IV der „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau u. in der Technik.“) gr. 8°, XIII u. 292 S. m. 88 Holzschnitten. Berlin, Ernst & Sohn. M. 9, geb. in Leinw. M. 10.
32. INTERMEDIATE Science. Applied mathematics papers. Being the questions set at the University of London from 1887 to 1903. (University Tutorial series.) Cr. 8vo, sd., pp. 58. London, Clive. 2 s. 6 d.
33. KÜBLER, J., Die Proportion des goldenen Schnitts als das geometrische Ziel der stetigen Entwicklung und die daraus hervorgehende Fünfgestalt mit ihrer durchgreifenden Fünfgliederung. 8°, 86 S. m. 15 Fig. auf 4 Taf. Leipzig, Teubner. M. 1.60.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- BLOCHMANN, RUDOLF, Die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Nach einem auf der 34. Jahresversammlung des Deutschen Nautischen Vereins in Berlin gehaltenen Vortrage. gr. 8°, 24 S. Leipzig u. Berlin, Teubner. M. —.60.
- BRUNS, H., Wissenschaftliches Rechnen, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 1.
- CHRISTIANSEN, C. u. MÜLLER, J. C., Elemente der theoretischen Physik, s. N. B. 13.
- DASSEN, CLAUDIO CORNELIO, Étude sur les quantités mathématiques. Grandeurs dirigées. Quaternions. Paris, Hermann. Frs. 5.
- DOMLA, W., Lehrbuch der Experimentalphysik, s. N. B. 14.
- EURIQUES, FEDERIGO, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Hermann Fleischer. Mit einem Einführungswort von Felix Klein. Leipzig Teubner. M. 8; geb. in Leinw. M. 9.

- ERMÁNYI, Dr. Josef Petzvals Leben u. Verdienste, s. N. B. 6.
- FÖPPL, A., Graphische Statik, s. N. B. 8.
- FUHRMANN, A., Bauwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung, s. N. B. 31.
- GLINZER, E., Kurzgefaßtes Lehrbuch der Baustoffkunde nebst einem Abriß der Chemie. Zum Selbstunterricht für Studierende, Baubeflissene, Maurer- und Zimmermeister sowie besonders als Leitfaden für den Unterricht an Baugewerkschulen. 3., verm. u. verb. Aufl. Dresden, Kühnemann. M. 4; geb. M. 4.20.
- GREEN, GEORGE, Mathematical papers. Edited by N. M. Ferrers. Fac-similé reprint. Paris, Hermann. Frs. 20.
- KERNTLER, FR., Das Ampèresche elektrodynamische Elementarpotential, s. N. B. 16.
- KOLL, O., Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine, s. N. B. 28.
- KOLLEKT, J., Katechismus der Physik, s. N. B. 17.
- KOMMERELL, V. und KOMMERELL, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. I. Band. (Sammlung Schubert XXIX.) Leipzig, Göschen. geb. M. 4.80.
- , Dasselbe. II. Band. (Sammlung Schubert XLIV.) Ebenda. geb. M. 5.80.
- KÜBLER, J., Die Proportion des goldenen Schnitts, s. N. B. 33.
- KÜHL, J. H., Grundriss der Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht. II. Stereometrie. 2. verm. Aufl. bearb. v. A. Kasten. Dresden, Kühnemann. M. 1.80; geb. M. 2.
- LAMÉ, G., Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Réimpression fac-similé. Paris, Hermann. Frs. 5.
- OSTMANN, PAUL, Ein objektives Hörmaß und seine Anwendung. gr. 8°, 75 S. m. 9 Kurventafeln. Wiesbaden, Bergmann. M. 5.
- PORTIG, GUSTAV, Die Grundzüge der monistischen und dualistischen Weltanschauung unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Naturwissenschaft. (Sonderabdruck aus dem II. Band von „Das Weltgesetz des kleinsten Kraftaufwandes in den Reichen der Natur und des Geistes“.) Stuttgart 1904, Kielmann. M. 2; geb. M. 3.
- ROSÉN, KARL, D. P., Studien und Messungen an einem Dreipendelapparate. Stockholm, Centraltryckeriet.
- SCHLOTKE, J., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Dresden, Kühnemann. M. 7.80; geb. M. 8.50.
- SCHUBERT, HERMANN, Elementare Berechnung der Logarithmen, eine Ergänzung der Arithmetik-Bücher. 8°, 87 S. Leipzig, Göschen. M. 1.60.
- , —, Niedere Analysis. II. Teil. Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen. (Sammlung Schubert XLV.) Leipzig, Göschen. geb. M. 3.80.
- SOHNCKE, L. A., Sammlung von Aufgaben aus der Differential- u. Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung. Hrsg. v. Hermann Amstein. 6. verbess. Aufl. bearb. v. Martin Lindow. 8°, VIII u. 304 S. m. 124 Fig. Halle a. S., Schmidt. M. 5.
- TAMMANN, G., Kristallisieren und Schmelzen, s. N. B. 23.
- WEBER, HEINRICH und WELLSTEIN, JOSEF, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearb. v. Heinrich Weber. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 8.
- WEIGHARDT, E., Mathematische Geographie. Leitfaden für den Unterricht in der Obertertia der Mittelschulen. 2. verb. u. verm. Aufl. Bühl (Baden) 1902. Konkordia. M. —.60.
- WERNICKE, A., Lehrbuch der Mechanik, III. (Schluß-) Abteilung, s. N. B. 11.



Soeben erschien:

VORLESUNGEN ÜBER TECHNISCHE MECHANIK

VON

DR. AUG. FÖPPL

PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

IN 4 BÄNDEN. II. BAND

GRAPHISCHE STATIK

MIT 176 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE AUFLAGE

[XII u. 471 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. M. 10.—

Gegenüber der im Jahre 1900 erschienenen ersten Auflage sind an manchen Stellen kleinere Änderungen vorgenommen worden, wodurch sich der Umfang des Bandes um 19 Seiten erhöht hat. Einem mehrfach geäußerten Wunsche entsprechend habe ich diesmal auch ein kurz gehaltenes Sachverzeichnis beigefügt.

Gegen das ganze Werk sind von den Herren Weingarten und Heun zahlreiche kritische Bedenken ausgesprochen worden, die ich freilich der Mehrzahl nach nicht für berechtigt zu halten vermag. Bei der Neuauflage dieses Bandes hierauf einzugehen, hatte ich indessen keine Veranlassung, da sich die Einwendungen der beiden Kritiker gegen ihn nicht richteten. Dagegen behalte ich mir vor, bei den Neuauflagen der übrigen Bände an den einzelnen Stellen, um die es sich dabei handelt, auf diese Angriffe zurückzukommen.

Mit Rücksicht auf den schnellen Absatz, den die schon in einer gegenüber den anderen Bänden verdoppelten Anzahl gedruckte erste Auflage dieses Bandes gefunden hat, wurde die Neuauflage in abermals stark vergrößerter Auflagenhöhe hergestellt. Man darf daher annehmen, daß der Bedarf jetzt für eine längere Zeit gedeckt sein wird.

München.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Erster Abschnitt. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte am materiellen Punkte und in der Ebene	1—65
§ 1. <i>Zeichnung und Rechnung in der Mechanik</i>	1
Genauigkeit, Zeichenfehler	4
Zusammensetzen von Kräften an einem Punkte	6
§ 2. <i>Zerlegung einer Kraft nach gegebenen Richtungslinien</i>	7
Bockgerüst, Zerlegung nach Culmann	10
Zerlegung nach Müller-Breslau	13
Geometrischer Satz über veränderliche n -Ecke	14
Ausnahmefälle	16
§ 3. <i>Kräftepläne für einfache Dachbinder</i>	18
Zweckmäßigste Anordnung des Kräfteplanes	23
§ 4. <i>Die reziproken Kräftepläne</i>	25
Geometrische Beziehungen zwischen Kräfteplan und Binderfigur	26
Aufeinanderfolge der äußeren Kräfte	28
§ 5. <i>Konstruktion des reziproken Kräfteplanes nach dem Verfahren von Bow</i>	30
§ 6. <i>Die Aufeinanderfolge der Pfeile an einer Ecke des reziproken Kräfteplanes</i>	36
§ 7. <i>Zusammensetzen der Kräfte in der Ebene</i>	39
§ 8. <i>Zerlegen von Kräften in der Ebene</i>	42
Culmannsches Verfahren	42
Momentenmethode von Ritter	44
§ 9. <i>Anwendung der Ritterschen Methode auf die Berechnung von Fachwerkträgern</i>	45
Wiegmann-Binder	46
Andere Lösung der Aufgabe, mit Hilfe des Satzes über die Eigenschaften veränderlicher Vielecke	49
Brückenträger	52

	Seite
Aufgaben 1—9	53
Kräfteplan für Winddruckbelastung (Aufg. 3 und 4)	55
Krangerüst (Aufg. 6)	59
Derrik-Kran (Aufg. 9)	63
Zweiter Abschnitt. Das Seilpolygon oder Seileck	66—180
§ 10. <i>Zusammensetzen von Kräften in der Ebene mit Hilfe des Seileckes</i>	66
Reziproke Beziehungen zwischen Seilpolygon und Kräfteplan	67
Satz über vollständige Vierecke	68
§ 11. <i>Seilpolygone, die zu verschiedenen Polen gehören</i>	68
§ 12. <i>Zerlegung paralleler Kräfte nach zwei Richtungslinien</i>	71
Auflagerkräfte von Balken	73
Schlußlinie des Seilpolygons	75
§ 13. <i>Die Seilkurven</i>	75
Belastungslinie und Belastungsfläche	75
Konstruktion der Seilkurve	76
§ 14. <i>Differentialgleichung der Seilkurve</i>	78
Parabel als Seilkurve	80
Näherungsformel für die Bogenlänge der Parabel	82
§ 15. <i>Die Kettenlinie</i>	83
Hyperbelfunktionen	87
§ 16. <i>Die Momentenfläche</i>	89
Systeme fest miteinander verbundener Lasten	91
Maximalmomentenfläche	92
§ 17. <i>Besondere Fälle für die Konstruktion der Momentenfläche</i>	92
Mittelbare Belastung	92
Gerbersche Kragträger	95
§ 18. <i>Die graphische Ermittlung von Trägheitsmomenten</i>	99
Verfahren von Mohr	99
Verfahren von Nehls	102
§ 19. <i>Die elastische Linie als Seilkurve</i>	105
Das zweite Seileck	107
Verzerrung der elastischen Linie	109
Beispiel	109
Veränderliche Trägheitsmomente	111
Zerlegung in Komponenten bei Lasten, die in verschiedenen Ebenen liegen	114
§ 20. <i>Ermittlung von Flächeninhalten mit Hilfe des Seileckes</i>	115

	Seite
Aufgaben 10—19	118
Träger mit schiefer Auflagerung (Aufg. 10)	118
Lokomotive (Aufg. 11)	120
Telegraphendraht (Berücksichtigung der Temperaturänderung, Aufg. 13)	121
Drahtseil, Kettenlinie (Aufg. 14)	122
Gerbersche Kragträger über drei Öffnungen (Aufg. 17)	127
Maximalmomentenfläche (Aufg. 18)	127
Dritter Abschnitt. Die Kräfte im Raume	131—193
§ 21. <i>Zurückführung auf ein Kräftekreuz</i>	131
§ 22. <i>Zusammensetzung von Kräftepaaren</i>	134
Momentenvektor als freier Vektor	139
Geometrische Summierung der Momentenvektoren	142
§ 23. <i>Gleichwertigkeit von Kräftekreuzen</i>	143
Punkt vorgeschrieben für eine Kraft	146
Ebene vorgeschrieben für eine Kraft	146
Wirkungslinie der einen Kraft vorgeschrieben	147
Nulllinie	148
Nullpunkt und Nullebene	149
§ 24. <i>Das Nullsystem</i>	150
Konjugierte Geraden	150
Achsenrichtung	151
Konjugierte Geraden in Achsenrichtung projiziert	153
Zusammenhang des Nullsystems mit der Theorie der reziproken Kräftepläne	154
§ 25. <i>Praktische Ausführung und spezielle Fälle</i>	154
Drei windschiefe Kräfte	156
Vier windschiefe Kräfte	157
Hyperboloidische Lage der Richtungslinien	158
§ 26. <i>Das Kräftekreuztetraeder</i>	159
Bedeutung des Tetraederinhaltes	161
§ 27. <i>Die Zentralachse eines Kräftesystemes</i>	162
§ 28. <i>Die Koordinaten eines Kräftesystemes nach der analytischen Darstellung</i>	165
§ 29. <i>Zerlegung einer Kraft nach sechs gegebenen Richtungslinien</i>	167
Lösung nach der Momentenmethode	172
Bedingung für den Ausnahmefall	173
§ 30. <i>Praktische Anwendungen dieser Zerlegungsaufgabe</i>	174
Tisch mit sechs Beinen	176
Behandlung eines Beispiels	178

	Seite
Momentengleichungen für unendlich ferne Achsen	180
Aufgaben 20—24	182
Biegemomente für Schwungradwelle von Dampfmaschine (Aufg. 22)	186
Beispiel für Tisch mit sechs Beinen (Aufg. 24)	192
Vierter Abschnitt. Das ebene Fachwerk	194—267
§ 31. <i>Die Zahl der notwendigen Stäbe</i>	194
Überzählige Stäbe	195
Ausnahmefall	197
Stabvertauschung	198
Einfache Fachwerke	199
Statisch unbestimmte Fachwerke	199
Analytische Berechnung der Stabspannungen	200
§ 32. <i>Die Grundfigur</i>	205
§ 33. <i>Die Bildungsweisen des Fachwerkes</i>	209
Scheiben	209
Imaginäre Gelenke	210
Zurückführung jeder Grundfigur durch Stabvertauschungen auf ein einfaches Fachwerk	215
§ 34. <i>Die Methode von Henneberg</i>	216
Ersatzstäbe	216
Zwei Stabvertauschungen	219
§ 35. <i>Die Berechnung der sechseckigen Grundfigur mit Hilfe der imaginären Gelenke</i>	221
Ausnahmefall	226
Pascalsche Sechsecke	228
§ 36. <i>Die Methode von Müller-Breslau</i>	230
Senkrechte Geschwindigkeiten	232
Deutung des Ausnahmefalles	235
Ersatz der Arbeiten durch statische Momente	236
§ 37. <i>Analytische Untersuchung des Ausnahmefalles</i>	238
Eliminationsdeterminante Δ	241
Lehrsatz	244
§ 38. <i>Die Fachwerkträger</i>	244
Auflagerbedingungen	245
Träger mit drei einzelnen Auflagerbedingungen	246
Beispiele für statisch bestimmte Träger mit vier oder mehr Auflagerbedingungen	248
Versteifte Hängebrücken	249
§ 39. <i>Der Dreigelenkbogen</i>	252
Einflußlinie	253

	Seite
Seileck durch drei vorgeschriebene Punkte	254
Aufgaben 25—30	256
Fünfter Abschnitt. Das Fachwerk im Raume	266—336
§ 40. <i>Die Zahl der notwendigen Stäbe</i>	268
Auflagerbedingungen	274
§ 41. <i>Das Flechtwerk</i>	278
Satz von Euler	277
Lehrsatz über das Flechtwerk	278
Flechtwerkträger	280
§ 42. <i>Die Schwedlersche Kuppel</i>	282
Berechnung für symmetrische Belastung	284
Gegendiagonalen	285
Einzellast, spannungslose Stäbe	288
Praktische Brauchbarkeit der Theorie	292
§ 43. <i>Die Netzwerkkuppel</i>	296
Ausnahmefall	296
Endliche Verschieblichkeit der quadratischen Netz- werkkuppel	299
Berechnung der Stabspannungen für eine Einzellast	300
§ 44. <i>Das Tonnenflechtwerkdach</i>	304
Löhlesche Tonnenflechtwerkdächer	309
§ 45. <i>Flechtwerkträger eines Krangerüsts</i>	309
§ 46. <i>Anwendung des Stabvertauschungsverfahrens auf die Berechnung räumlicher Fachwerke</i>	318
Zimmermannsche Kuppel	319
Aufgabe 31 (Leipziger Kuppel)	333
Sechster Abschnitt. Die elastische Formänderung des Fachwerkes und das statisch unbestimmte Fach- werk	337—405
§ 46. <i>Methode von Maxwell und Mohr</i>	337
§ 47. <i>Der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen</i>	343
§ 48. <i>Der Verschiebungsplan</i>	345
Durchführung eines Beispiels	350
Zurückdrehen	353
Konstruktion von der Mitte her	355
Verbindung des Verschiebungsplanes mit der Träger- figur	356
(Man beachte auch den Nachtrag zu § 48, S. 405.)	

	Seite
§ 49. <i>Die Stabspannungen im einfach statisch unbestimmten Träger</i>	359
Montierungsspannungen	360
Verfahren von Maxwell und Mohr	361
§ 50. <i>Träger mit zwei oder mehr übersähligen Stäben</i>	365
§ 51. <i>Die Temperaturspannungen</i>	368
§ 52. <i>Einflußlinien für die statisch unbestimmten Größen</i>	374
§ 53. <i>Die Ausnahmefachwerke als statisch unbestimmte Konstruktionen</i>	385
Berechnung für Lasten, die nicht zu sehr großen Spannungen führen	388
§ 54. <i>Fortsetzung</i>	388
Lasten, die zu verhältnismäßig sehr großen Spannungen führen	389
Behandlung eines Beispiels	389
Besondere Verhältnisse beim Verschiebungsplane	394
Aufgaben 32—36	395
Nachtrag zu § 48 (Verschiebungsplan von Keelhoff)	405
Siebenter Abschnitt. Theorie der Gewölbe und der durchlaufenden Träger	406—464
§ 55. <i>Gleichgewichtsbedingungen für das Tonnengewölbe</i>	406
Belastungslinie	407
Einsturzmöglichkeiten	410
Kantenpressungen	412
Druckhöhe	413
§ 56. <i>Stützl原因 und Drucklinie</i>	414
Lotrechte Fugenschnitte	414
Gewölbe mit Gelenken	417
Dreigelenkgewölbe, im Raume statisch unbestimmt	417
§ 57. <i>Schiefe Projektion des Gewölbequerschnittes mit eingezeichneter Stützl原因</i>	418
§ 58. <i>Ältere Ansichten über die wirklich auftretende Stützl原因</i>	420
Prinzip des kleinsten Widerstandes	420
Theorie der günstigsten Drucklinie	423
§ 59. <i>Die Elastizitätstheorie des Tonnengewölbes</i>	424
Satz von Winkler	426
§ 60. <i>Vereinfachte Berechnung der Gewölbe</i>	429
§ 61. <i>Die Kuppelgewölbe</i>	431

	Seite
Minimum der Formänderungsarbeit	433
Stützzlinie für die symmetrisch belastete Kuppel . .	434
§ 62. Die graphische Berechnung der durchlaufenden Träger	440
Träger über zwei Öffnungen	440
Träger über drei oder mehr Öffnungen	442
§ 63. Gleichung von Clapeyron	452
Gleichung der drei Momente	453
Gleichungen für die Enden, wenn diese eingespannt sind	456
Aufgaben 37—40	456
— — — — —	
Zusammenstellung der wichtigsten Formeln	464—46
Sachverzeichnis	469—47



Bestell-Zettel.

Bei

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B. G. Teubner
in Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:

- A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik.**
Einführung in die Mechanik. 2. Aufl. [XIV u. 412 S.]
 gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. \mathcal{M} 10.—
 ——— **Graphische Statik.** 2. Aufl. [XII u. 471 S.] gr. 8.
 1903. In Leinw. geb. n. \mathcal{M} 10.—
 ——— **Festigkeitslehre.** 2. Aufl. [XVII u. 512 S.] gr. 8.
 1900. In Leinw. geb. n. \mathcal{M} 12.—
 ——— **Dynamik.** 2. Aufl. [XV u. 506 S.] gr. 8. 1901. In
 Leinw. geb. n. \mathcal{M} 12.—

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

Das nicht Gewünschte gefl. durchstreichen!

loeben erschien:

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

ZWEITE, DURCH ZUSÄTZE VERMEHRTE UND MIT FÜNF ANHÄNGEN
VERSEHENE AUFLAGE.

MIT ZAHLREICHEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

So fängt denn alle menschliche Erkenntnis
mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen
und endigt mit Ideen.

Kant, Kritik der reinen Vernunft,
Elementarlehre 2. T. 2. Abt.

Die Geometrie bedarf — ebenso wie die Arithmetik — zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit *Euklid* in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Literatur sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läßt auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zu Tage tritt.

Die hinzugefügten Anhänge sind: I. Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte. II. Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck. III. Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie. IV. Über die Grundlagen der Geometrie. V. Über die Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung.

Göttingen.

D. Hilbert.

Inhalt.

Grundlagen der Geometrie.

Aus der Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmales in Göttingen, Leipzig 1893.

Seite

Einleitung 1

Kapitel I. Die fünf Axiomgruppen.

§ 1. Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen	2
§ 2. Die Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung	2
§ 3. Die Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung	4
§ 4. Folgerungen aus den Axiomen der Verknüpfung und der Anordnung . .	5
§ 5. Die Axiomgruppe III: Axiome der Kongruenz	7
§ 6. Folgerungen aus den Axiomen der Kongruenz	10
§ 7. Die Axiomgruppe IV: Axiom der Parallelen (Euklidisches Axiom) . . .	15
§ 8. Die Axiomgruppe V: Axiome der Stetigkeit	16

Kapitel II. Die Widerspruchslösigkeit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome.

	Seite
9. Die Widerspruchslösigkeit der Axiome	18
10. Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms (Nicht-Euklidische Geometrie)	20
11. Die Unabhängigkeit der Kongruenzaxiome	20
12. Die Unabhängigkeit der Stetigkeitsaxiome V (Nicht-Archimedische Geometrie)	22

Kapitel III. Die Lehre von den Proportionen.

13. Komplexe Zahlensysteme	24
14. Beweis des Pascalschen Satzes	26
15. Die Streckenrechnung auf Grund des Pascalschen Satzes	31
16. Die Proportionen und die Ähnlichkeitssätze	35
17. Die Gleichungen der Geraden und Ebenen	36

Kapitel IV. Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene.

18. Die Zerlegungsgleichheit und Inhaltsgleichheit von Polygonen	39
19. Parallelogramme und Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe	41
20. Das Inhaltsmaß von Dreiecken und Polygonen	42
21. Die Inhaltsgleichheit und das Inhaltsmaß	45

Kapitel V. Der Desarguessche Satz.

§ 22. Der Desarguessche Satz und der Beweis desselben in der Ebene mit Hilfe der Kongruenzaxiome	47
§ 23. Die Nichtbeweisbarkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene ohne Hilfe der Kongruenzaxiome	49
§ 24. Einführung einer Streckenrechnung ohne Hilfe der Kongruenzaxiome auf Grund des Desarguesschen Satzes	53
§ 25. Das kommutative und assoziative Gesetz der Addition in der neuen Streckenrechnung	55
§ 26. Das assoziative Gesetz der Multiplikation und die beiden distributiven Gesetze in der neuen Streckenrechnung	56
§ 27. Die Gleichung der Geraden auf Grund der neuen Streckenrechnung	60
§ 28. Der Inbegriff der Strecken aufgefaßt als komplexes Zahlensystem	63
§ 29. Aufbau einer räumlichen Geometrie mit Hilfe eines Desarguesschen Zahlensystems	64
§ 30. Die Bedeutung des Desarguesschen Satzes	66

Kapitel VI. Der Pascalsche Satz.

§ 31. Zwei Sätze über die Beweisbarkeit des Pascalschen Satzes	67
§ 32. Das kommutative Gesetz der Multiplikation im Archimedischen Zahlensystem	68
§ 33. Das kommutative Gesetz der Multiplikation im Nicht-Archimedischen Zahlensystem	69
§ 34. Beweis der beiden Sätze über den Pascalschen Satz (Nicht-Pascalsche Geometrie)	71
§ 35. Beweis eines beliebigen Schnittpunktsatzes mittels des Desarguesschen und des Pascalschen Satzes	72

Kapitel VII. Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I—IV.	
§ 36. Die geometrischen Konstruktionen mittels Lineals und Eichmaßes	74
§ 37. Analytische Darstellung der Koordinaten konstruierbarer Punkte	74
§ 38. Die Darstellung algebraischer Zahlen und ganzer rationaler Funktionen als Summe von Quadraten	75
§ 39. Kriterium für die Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittels Lineals und Eichmaßes	75
Schlußwort	82

Anhang I.

Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte, aus Math. Ann. Bd. 46	83
---	----

Anhang II.

Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, aus den Proceedings of the London Math. Society Vol. 35	85
---	----

Anhang III.

Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie, aus Math. Ann. Bd. 57 1903	107
--	-----

Anhang IV.

Über die Grundlagen der Geometrie, aus Math. Ann. Bd. 56 1903	111
---	-----

Anhang V.

Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung, aus den Transactions of the American Math. Society Vol. 2 1901	116
---	-----

**Bestell-Zettel.**

Bei _____

Buchhandlung in _____

bestellt der Unterzeichnete hiermit das im Verlage von B. G. Teubner in
Leipzig soeben erschienene Werk [zur Ansicht]:**Hilbert**, Grundlagen der Geometrie. [VIII u. 175 S.]
gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. M. 5.60.

Ort, Wohnung:

Unterschrift:

soeben erschienen:

LEOPOLD KRONECKER:

VORLESUNGEN ÜBER MATHEMATIK.

I. TEIL: VORLESUNGEN ÜBER ALLGEMEINE ARITHMETIK.

I. ABSCHNITT: VORLESUNGEN ÜBER DETERMINANTEN-
THEORIE. I. BAND.

VORLESUNGEN ÜBER
DIE THEORIE DER
DETERMINANTEN

VON

LEOPOLD KRONECKER.

BEARBEITET UND FORTGEFÜHRT VON

DR. KURT HENSEL,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT MARBURG.

ERSTER BAND.

ERSTE BIS EINUNDZWANZIGSTE VORLESUNG.

MIT 11 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.

Die Determinantentheorie hat sich sowohl bei Lebzeiten Kroneckers und unter seiner wirksamen Mitarbeit, als auch in den zwölf Jahren nach seinem Tode so stark und so erfolgreich entwickelt, daß die bisher veröffentlichten Lehrbücher dieser Disziplin nicht mehr eine vollständige Darstellung ihres reichen Inhaltes geben. In dieser Beziehung bildeten die Universitätsvorlesungen Kroneckers (1883—1891) über diese Disziplin bereits einen bedeutsamen Fortschritt. Aber auch er hielt die Zeit noch nicht für gekommen, seine eigenen tiefergehenden Untersuchungen, sowie die erst in den letzten Jahren vollständig abgeschlossenen Theorien anderer Forscher, welche so viel zur Vertiefung und Vereinfachung dieser Disziplin beigetragen haben, in den Kreis seiner Betrachtungen zu ziehen. Nun hat sich aber gezeigt, daß man gerade diese neueren Probleme der Determinantentheorie in besonders einfacher Weise durch Benutzung und konsequente Ausgestaltung der Gedanken behandeln kann, welche Kronecker in seinen letzten Vorlesungen und Arbeiten über diesen Gegenstand dargelegt hat. Aus diesem Grunde entschloß ich mich, die Vorlesungen Kroneckers unter sorgfältiger Erhaltung seiner Grundprinzipien und unter Benutzung seiner einfachen und wirksamen Methoden so zu bearbeiten und fortzuführen, daß dieses Werk eine systematische Darstellung der modernen Determinantentheorie und ihrer wichtigsten Anwendungen enthält.

Der Darstellung der allgemeinen Theorie geht eine sehr eingehende Untersuchung der Determinanten zweiter, dritter und vierter Ordnung voraus, nebst ihren Anwendungen auf die Geometrie, die Arithmetik und die Formentheorie. So erreicht Kronecker, daß der Leser mit der Determinantenkalkül wohlvertraut ist, wenn nun alle Grundeigenschaften der Determinanten n^{ter} Ordnung aus der Betrachtung der Lösung eines Systemes von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten mit einem Schlage in Evidenz gesetzt werden.

An die Stelle der älteren Determinantentheorie ist heute die Untersuchung der Systeme oder Matrizen getreten, und das Rechnen mit diesen Systemen ist jetzt so ausgebildet und vereinfacht worden, daß die tiefsten Resultate der Determinantenlehre zu ganz einfachen Sätzen einer Arithmetik werden, welche nur wenig schwerer ist, als die elementare Zahlentheorie. Der Darstellung dieser Arithmetik unter Benutzung der Kroneckerschen Methoden, und ihrer Anwendung auf die Theorie der Elementarteiler, und auf die Äquivalenz und die Teilbarkeit der Systeme ist der von mir hinzugefügte letzte Teil des vorliegenden ersten Bandes gewidmet.

Marburg a. L.

K. Hensel.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Erste Vorlesung	1—9
<p>Einleitung: Die Determinanten sind ein Werkzeug zur Auflösung linearer Gleichungen. — Ihre Erfindung durch <i>Leibnitz</i> und <i>Cramer</i>. — <i>Vandermonde</i> und <i>Lagrange</i>. — <i>Gauß</i> und seine arithmetische Behandlung der Determinanten. — Systematischer Aufbau der Theorie durch <i>Cauchy</i>, <i>Jacobi</i> und dessen Schüler. — Die Determinanten als Invarianten. <i>Cayley</i> und <i>Sylvester</i>.</p>	
Zweite Vorlesung	10—24
<p>Auflösung von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten. — Genauere Formulierung der Aufgabe. — Äquivalenz der Gleichungssysteme. — Die Determinanten zweiter Ordnung. — Darstellung der Lösung eines Gleichungssystems durch Determinantenquotienten. — Die Koeffizientensysteme oder Matrizen. — Der Rang der Systeme. — Auflösung zweier homogenen Gleichungen mit drei Unbekannten.</p>	
Dritte Vorlesung	25—38
<p>Geometrische Anwendungen der Determinanten zweiter Ordnung. — Die Schnittfigur zweier geraden Linien. — Äquivalenten Gleichungssystemen entspricht dieselbe Schnittfigur. — Die Schnittfigur zweier geraden Linien ist ein Punkt oder eine Gerade, je nachdem ihr Koeffizientensystem vom Range zwei oder eins ist. — Die Schnittfigur zweier durch den Anfangspunkt gelegten Ebenen ist eine Gerade, eine Ebene, oder der ganze Raum, je nachdem ihr Koeffizientensystem vom Range zwei, eins oder Null ist. — Inhaltsbestimmung eines Dreiecks und eines beliebigen n-Ecks. — Das Multiplikationstheorem für Determinanten zweiter Ordnung.</p>	
Vierte Vorlesung	39—63
<p>Die Komposition der Systeme. — Grundregeln für das Rechnen mit Systemen. — Das Einheitsystem. — Reziproke und transponierte Systeme. — Elementare Systeme. — Die Fundamenteigenschaften der Determinante. — Dekomposition der Systeme. — Die Determinante als Invariante für die Reihenfolge der Komposition. — Geometrische Anwendungen: Eindeutige Abbildung zweier Ebenen aufeinander. Koordinatentransformation. — Die Determinante als Korrelationsfaktor der Abbildung. — Orthogonale Systeme.</p>	
Fünfte Vorlesung	64—84
<p>Arithmetische Anwendungen der Determinanten zweiter Ordnung. — Die ganzzahligen Systeme. — Gittersysteme in der Ebene. — Eindeutige Abbildung der Gitterpunkte zweier Ebenen aufeinander. — Reduktion ganzzahliger Systeme durch vordere Komposition mit</p>	

Elementarsystemen. — Die reduzierten Systeme. — Die Äquivalenz der ganzzahligen Systeme. — Die Grundeigenschaften äquivalenter Größen. — Die Klassenzahl der ganzzahligen Systeme. — Die verschiedenen Arten der Äquivalenz ganzzahliger Systeme. — Hintere Komposition mit unimodularen Systemen. — Vordere und hintere Komposition. — Bilineare Formen und ihre Transformation. — Die reduzierten Systeme.	
Sechste Vorlesung	85—114
Die Äquivalenz beliebiger Systeme. — Systeme von nicht verschwindender und von verschwindender Determinante. — Reduzierte Systeme. — Die bilinearen Formen von vier Variablen mit ganzzahligen und mit beliebigen Koeffizienten. — Äquivalente Formen. — Die kongruenten Transformationen. — Äquivalenz der quadratischen Formen. — Äquivalenzbedingungen für die kongruenten Transformationen. — Die <i>Hamiltonschen</i> Quaternionen. — Die charakteristischen Eigenschaften der Determinante.	
Siebente Vorlesung	105—114
Determinanten und Systeme von neun Elementen. — Auflösung von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten. — Darstellung ihrer Lösung durch Determinantenquotienten. — Die Grundeigenschaften der Determinanten dritter Ordnung.	
Achte Vorlesung	115—138
Herleitung der Eigenschaften der Determinanten dritter Ordnung aus dem Charakter der Lösung dreier linearer Gleichungen. — Eindeutigkeit der Lösung. — Untersuchung der Nenner in jener Lösung. — Die Beziehung der Zähler in der Lösung zu ihrem gemeinsamen Nenner $\Theta(a, b, c)$. — Die Fundamenteigenschaften der Funktion $\Theta(a, b, c)$. — Beweis des Multiplikationstheoremes für die Funktion $\Theta(a, b, c)$. — Anderer Beweis desselben Theoremes. — Die Funktion $\Theta(a, b, c)$ ist mit der Determinante $ a, b, c $ identisch.	
Neunte Vorlesung	137—162
Theorie der Systeme von neun Elementen. — Die Einheitssysteme und die Diagonalsysteme. — Die reziproken und die adjungierten Systeme; ihre Haupteigenschaften. — Die Dekomposition der Systeme. — Die elementaren Systeme erster Art und ihre Eigenschaften. — Dekomposition eines Systemes in Elementarsysteme erster Art. — Die Elementarsysteme zweiter Art. — Zerlegung eines Systemes in Elementarsysteme zweiter Art. — Anwendungen: Die Determinante als Invariante für die Reihenfolge der Komposition. — Die charakteristischen Eigenschaften der Determinante.	
Zehnte Vorlesung	163—179
Die Reduktion ganzzahliger Systeme. — Die verschiedenen Arten der Äquivalenz. — Bestimmung der Klassenzahl für vordere oder hintere Komposition mit unimodularen Systemen. — Die Auflösung von drei homogenen linearen Gleichungen mit vier Unbekannten und konstanten Koeffizienten. — Der Rang der Systeme. — Anwendung auf drei nicht homogene lineare Gleichungen und auf die Schnittfigur von Ebenen im Raume.	

Elfte Vorlesung	180—195
Anwendung der Determinanten dritter Ordnung auf die analytische Geometrie der Ebene. — Die homogenen Punktkoordinaten. — Die Gleichung der geraden Linie in homogenen Koordinaten. — Bestimmung des Dreiecksinhaltes aus den homogenen Koordinaten der Dreiecksseiten. — Die Gleichung des Kegelschnittes, welcher durch fünf gegebene Punkte geht. — Die homogenen Linienkoordinaten. — Die Gleichung des Punktes in homogenen Linienkoordinaten. — Die Relation zwischen den drei homogenen Koordinaten einer geraden Linie. — Die Gleichung des Kreises in homogenen Linienkoordinaten.	
Zwölfte Vorlesung	196—214
Die Determinanten vierter und fünfter Ordnung. — Ihre Haupteigenschaften. — Anwendungen der Determinanten vierter Ordnung in der Geometrie der Ebene. — Das Produkt zweier Dreiecksinhalte. — Beide Dreiecke sind demselben Kreise eingeschrieben. — Kongruente Abbildung zweier Körper aufeinander. — Die kongruenten Abbildungen erster und zweiter Art. — Orthogonale Systeme. — Ihre Haupteigenschaften. — Dekomposition der orthogonalen Systeme.	
Dreizehnte Vorlesung	215—230
Berechnung des Tetraedervolumen aus den Koordinaten seiner Ecken. — Anwendungen. — Die Gleichung der Ebene im Raume. — Die Hessesche Normalform für die Gleichung der Ebene. — Das Tetraeder. — Berechnung des Tetraedervolumen aus Länge und Richtung von drei zusammenstossenden Kanten. — Der Sinus einer körperlichen Ecke. — Grundeigenschaften des Staudtschen Sinus. — Bestimmung des Produktes zweier Tetraedervolumina aus Länge und Richtung der Kanten je einer Ecke. — Berechnung des Tetraedervolumen aus der Grösse und Stellung von drei zusammenstossenden Flächen. — Das Produkt zweier Tetraedervolumina aus der Grösse von je drei zusammenstossenden Flächen und den Winkeln derselben. — Berechnung des Tetraedervolumen aus seinen sechs Kanten. — Folgerungen.	
Vierzehnte Vorlesung	231—247
Definition der homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten. — Die Bedingungsgleichung für die vereinigte Lage eines Punktes und einer Ebene. — Die lineare Gleichung zwischen den homogenen Koordinaten eines Punktes. — Die quadratische Gleichung zwischen den homogenen Koordinaten einer Ebene. — Die Gleichung der Kugel in Ebenenkoordinaten. — Das Tetraedervolumen in homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten.	
Fünfzehnte Vorlesung	248—262
Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereiches in ihre irreduktiblen Faktoren. — Die natürlichen Rationalitätsbereiche $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(n)})$. — Die ganzen rationalen Funktionen. — Aufsuchung aller Teiler einer ganzen Grösse des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(n)})$. — Die Primteiler des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots)$. — Jede ganze Grösse des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots)$ kann auf eine einzige Weise in Primfaktoren zerlegt werden. Teilerfremde Funktionen des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots)$.	
Sechzehnte Vorlesung	263—290
Herleitung der Eigenschaften der Determinanten n^{ter} Ordnung aus dem Charakter der Lösung von n linearen Gleichungen mit n Un-	

bekannten. — Eindeutigkeit der Lösung. — Untersuchung der Nenner in jener Lösung. — Die Beziehung der Zähler in der Lösung zu ihrem gemeinsamen Nenner $\Theta(u_{gh})$. — Die Fundamenteigenschaften der Funktion $\Theta(u_{gh})$. — Beweis des Multiplikationstheoremes für die Funktion $\Theta(u_{gh})$. — Anderer Beweis desselben Theoremes.	
Siebzehnte Vorlesung	291—306
Darstellung der Determinante mit Hilfe ihrer drei charakteristischen Eigenschaften. — Beweis, daß n lineare Gleichungen mit n Unbekannten stets eine Lösung besitzen. — Die verschiedenen Darstellungen der Vorzeichen $\varepsilon_{h_1 h_2 \dots h_n}$. — Die <i>Cauchysche</i> Determinante.	
Achtzehnte Vorlesung	307—322
Die charakteristischen Eigenschaften der Determinanten in vereinfachter Darstellung. — Die Funktionen $\Theta(u_{gh})$ der mn Elemente einer Matrix. — Das Multiplikationstheorem für zwei Matrizen. — Anwendungen. — Die abgeleiteten Systeme. — Das Fundamentaltheorem für die Komposition der abgeleiteten Systeme.	
Neunzehnte Vorlesung	323—347
Der <i>Laplacesche</i> Determinantensatz. — Die adjungierten Determinanten — Die adjungierten und die reziproken Systeme. — Die <i>Jacobische</i> Determinantenrelation. — Anwendungen: Auflösung von m homogenen linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten für n Unbekannte. — Der Rang der Systeme. — Besitzt das Koeffizientensystem den Rang r , so sind $m-r$ von den m Gleichungen überflüssig. — Unabhängige Lösungen. — Darstellung aller Lösungen durch ein vollständiges System unabhängiger Lösungen. — Die nicht homogenen linearen Gleichungen. — Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Gleichungen Lösungen haben.	
Zwanzigste Vorlesung	348—365
Das Rechnen mit Systemen oder Matrizen. — Diagonalsysteme. — Die elementaren Rechenoperationen für Matrizen. — Die Addition und die Subtraktion. — Die Multiplikation. — Grundgesetze für die Multiplikation der Systeme. — Die Division. — Die mit einer Matrix zusammenhängenden Systeme. — Das konjugierte und das reziproke System. — Die Systeme, deren Elemente rationale Funktionen einer Variablen sind.	
Einundzwanzigste Vorlesung	366—390
Die Teilbarkeit und die Äquivalenz der Systeme. — Klassen äquivalenter Systeme. — Die Invarianten für die äquivalenten Systeme. — Erste Definition der Äquivalenz. — Der Rang der Systeme. — Der Rang ist die einzige Invariante für die äquivalenten Systeme. — Die ganzen und die gebrochenen Systeme der Bereiche (1) und (r). — Der Diagonalteiler eines Systemes. — Zweite Definition der Äquivalenz. — Die Determinantenteiler und die Elementarteiler eines Systemes. — Die reduzierten Systeme. — Zwei Systeme sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Determinantenteiler oder ihre Elementarteiler gleich sind. — Die Elementarteiler als Fundamentalinvarianten.	

Im gleichen Verlag erschienen ferner:

Kroneckers, Leopold, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der
Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von Kurt Hensel.
In 4 Bänden. Band I, mit dem Bildnisse Kroneckers. [IX u. 484 S.]
gr. 4. 1895. geh. n. *M* 28.—.

Band II. [VIII u. 541 S.] gr. 4. 1897. geh. n. *M* 36.—.

Band III. Halbband I. [VIII u. 473 S.] gr. 4. 1899.
geh. n. *M* 36.—.

Diese Gesamtausgabe wird die 146 von Kronecker selbst veröffentlichten, sowie einige nachgelassene Arbeiten enthalten und voraussichtlich in vier Bänden erscheinen. Nach dem jetzt ausgearbeiteten Plane sollen im ersten und zweiten Bande Kroneckers Arbeiten über die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen im weitesten Sinne vereinigt werden; der dritte Band soll Kroneckers Arbeiten über die Theorie der algebraischen Gleichungen und über reine Zahlentheorie enthalten; den Inhalt des vierten Bandes bilden die Abhandlungen über Integralrechnung, sur Theorie der elliptischen Funktionen und über Potentialtheorie, ferner die Arbeiten über Gegenstände der mathematischen Physik und einige kleinere Arbeiten vermischten Inhalts. Innerhalb dieser großen Abteilungen wird die Anordnung der Abhandlungen im wesentlichen eine chronologische sein; ein vollständiges Verzeichnis derselben, welches nach der Zeit ihrer Veröffentlichung geordnet ist, soll die Übersicht erleichtern.

Band III, 2 und IV befinden sich in Vorbereitung.

Vorlesungen über Mathematik. Herausgegeben
unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der
Wissenschaften eingesetzten Kommission. Vorlesungen über die
Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, heraus-
gegeben von E. Netto. [X u. 346 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 12.—.

In diesen Vorlesungen vereinigen sich Originalität und Tiefe der Anschauungen mit reicher Fülle an Stoff; die lebendige Darstellungsweise sowie gelegentliche Bemerkungen liefern einen wertvollen Einblick in die Forschungsweise Kroneckers. Bei den grundlegenden Begriffen, bei der Benutzung des Limes, bei der Definition der Integrale durch Summen tritt sein arithmetisches Genie ebenso deutlich heraus, wie in der Folge sein analytisches Geschick in der Handhabung von Formeln.

Es ist von hohem Interesse, zu sehen, wie Kronecker Mittelpunkte für seine Untersuchungen gewinnt: es tritt der Reihe nach der zweite Mittelwertsatz, das Cauchysche Integral, der diskontinuierliche Faktor, der Differentialausdruck des mehrfachen Integrals nach einem Parameter heraus.

Von dem Mittelwertsatz her fließt das Dirichletsche, das Fouriersche und das Poissonsche Integral, sowie die Fouriersche Reihe.

Auf das Nachdrücklichste wird die Bedeutung des Cauchyschen Integrals und besonders der Umstand betont, daß es seine Wirksamkeit dem Übergange von einer zu zwei Variablen verdankt; daß man nicht, einem äußerlichen Prinzip zuliebe, die Behandlung einfacher und doppelter Integrale trennen dürfe. Von dem Cauchyschen Satze aus werden die Entwicklungen in Potenzreihen, funktionentheoretische Sätze, die Summation der Gaußschen Reihen, die Theorie der Gamma-Funktionen und des Integral-Logarithmus, Grundformen für die elliptischen Funktionen hergeleitet.

Der diskontinuierliche Faktor wird zum Zwecke der Reduktion mehrfacher auf einfache Integrale, insbesondere für Potentialberechnungen benutzt. Der Hauptsache nach stützt sich aber die Potentialtheorie, soweit sie hier vorgetragen wird, auf die Differentiation mehrfacher Integrale. Die Frage nach den charakteristischen Eigenschaften der Potentialfunktionen wird auf demselben Boden behandelt.

Auch als Kommentar für Kroneckers häufig nur ganz kurze, in den Berliner Akademie-berichten und dem Crelleschen Journal veröffentlichten Mitteilungen dienen die Vorlesungen in reichem Maße. Sie liefern eingehend die Ableitungen der dort gegebenen Resultate.

Als Grundlage für die Herausgabe dienten Nachschriften aus den Jahren 1883/84, 1885, 1886, 1891, sowie sämtliche vorhandenen Kroneckerschen handschriftlichen Vorlesungsnotizen.

Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben
von Kurt Hensel. In 2 Bänden. Mit Textfiguren. I. Band. [XVI u.
509 S.] gr. 8. 1901. geh. n. *M* 18.—.

Die Herausgabe dieser Vorlesungen wurde durch den Umstand etwas verzögert, daß eine in ihnen enthaltene neue und grundlegende Untersuchung über die Zerlegung der Divisorsysteme in Faktoren von Kronecker in der unmittelbar vor seinem Tode gehaltenen Vorlesung zwar begonnen, aber nicht bis zum Ende durchgeführt worden war. Es erschien nun wünschenswert, dieses Problem, das letzte, mit welchem Kronecker sich beschäftigt hat, vollständig zu lösen und die hier sich ergebenden Resultate den Kroneckerschen Vorlesungen einzuverleihen. Zu diesem Zwecke wurde von dem Herausgeber eine Reihe eigener Untersuchungen durchgeführt, welche jetzt beendet sind, so daß die Herausgabe jener Vorlesungen nunmehr in völlig abgeschlossener Form erfolgen kann.

Vorlesungen über die Theorie der algebraischen
Gleichungen, herausgegeben von Kurt Hensel. In 2 Teilen. gr. 8.
geh. [In Vorbereitung.]

L. Kroneckers Bildnis in Heliogravüre. 4. n. *M* 2.—.



BESTELL-ZETTEL.

Bei Buchhandlung

in bestellt der Unterzeichnete hiermit aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig [zur Ansicht]:

L. Kroneckers Werke. In 4 Bänden. I. Band. (IX u. 484 S.) 1895. geh. n. M 28.—.

II. Band. (VIII u. 541 S.) 1897. geh. n. M 36.—.

III, 1. Band. (VIII u. 473 S.) 1899. geh. n. M 36.—.

III, 2. Band. } Nach Erscheinen.
IV. Band. }

L. Kroneckers Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale. (X u. 346 S.) 1894. geh. n. M 12.—.

Vorlesungen über Zahlentheorie. In 2 Bänden. I. Band. (XVI u. 509 S.) 1901. geh. n. M 16.—.

II. Band. Nach Erscheinen.

Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. In 2 Bänden.

I. Band. (XII u. 390 S.) 1903. geh. n. M 20.—, in Leinw. geb. n. M 21.—.

II. Band. Nach Erscheinen.

Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen.

In 2 Teilen. Nach Erscheinen.

L. Kroneckers Bildnis in Heliogravüre. 4. n. M 2.—.

Ort, Wohnung

Unterschrift:

 Das Nichtgewünschte bitte gefl. durchzustreichen.

rarisch wertvolle Festgaben
 schmackvoller Ausstattung aus dem Verlage von
 J. Neumann, Neudamm in Leipzig



Aus Rosen: Die Natur in der Kunst. Domenico Ghirlandaio: Anbetung der Hirten.

Natur in der Kunst.
 Prof. Dr. F. Rosen.

Abbildungen. Vornehm geb. 12 Mk.

Der erste, mit zureichenden Mitteln
 Versuch, das Verhältnis der Künstler
 einige Hauptepochen der Malerei in
 gehen auf die einzig maßgebenden
 Kunstwerke, erschöpfend darzustellen.
 nicht bloß für den kunsthistorischen
 denn er fordert den gebildeten Leser
 ge durch die Geschichte der Malerei
 er ihm manche überraschende, neue
 und manchen tieferen Einblick zu

„Die Kunst der Kunst“ (Breslauer Zeitung.)

Unter Verhältnis zu den
 bildenden Künsten.

V. Prof. Dr. H. Schmarlow. Geh. Mk. 2.—,
 geb. Mk. 2.60.

„Die 6 Vorträge bilden den wertvollsten Beitrag
 zur Literatur über die Künstlererziehungsfrage. Schmar-
 low entwickelt seine Anschauung über das Verhältnis
 der Künste zueinander, um zu zeigen, wie jede
 einzelne einer besonderen Seite der menschlichen
 Organisation entspreche, wie eben darum aber auch
 alle einzelnen Künste eng miteinander verknüpft sind,
 da sie alle von dem einen menschlichen Organismus
 ausstrahlen. So tritt denn Schmarlow auch für die
 Erziehung des ganzen Menschen zur künstlerischen
 Betätigung ein.“ (Prof. Dr. Kautsch i. d. Deutschl. Litt.)



Aus Giesenhagen: Auf Java und Sumatra. (Mingit (Molche) im Padjangian Oberlande)

Das Mittelmeergebiet. Von Prof. Dr. A. Philippsohn.

Selbst geographische und kulturelle Eigenart. gr. 8. Geb. ca. 6 Mk.

Das Mittelmeergebiet, in dem sich die Relze einer unvergleichlichen Natur mit den höchsten historischen Interessen vereinigen, der Schauplatz, auf dem unsere abendländische Kultur erwuchs, der Studienbereich ungezählter Forscher, das Ziel der Sehnsucht für die Gelehrten aller nördlichen Völker — es ist eine Region von ausgeprägter geographischer Eigenart. Diese Eigenart nach der Methode der heutigen Geographie darzustellen, die verschiedenen Faktoren, die zum Charakterbild dieser bevorzugten Erdteile zusammenwirken, die Einflüsse, die sie auf den Menschen und seine materielle und geistige Entwicklung ausgeübt haben, zu schildern: das unternimmt dieses Buch. Es entrollt in durchaus wissenschaftlicher, aber doch allgemein verständlicher Weise ein Gesamtbild des Mittelmeergebietes, wie es bisher in dieser Art nicht vorhanden war; es berührt dabei auch die einzelnen Länder und hervorragenden Städte in ihrer Stellung innerhalb des Gebietes, ohne sich in Spezialbeschreibungen zu verlieren.

Auf Java und Sumatra. Von Dr. K. Giesenhagen. Streifzüge und Forschungsreisen im Lande der Malaien.

Mit 16 farbigen Vollbildern, zahlreichen Abbildungen und 1 Karte. Geb. 9 Mk., vornehm geb. 10 Mk.

„... Es steckt in dem Werk ein lebenswärtiger Zauber, dem man sich nicht entziehen kann. Der anmutige Plauderton, der sich durch das Werk zieht, bildet neben vorzüglichsten Beobachtungen von Land und Leuten den subjektiven Kern des Persönlichen. Ein warmes, echt deutsches Herz spricht aus seiner Schilderung zu uns. In farbenprächtigen Bildern führt uns der Verfasser die Natur vor Augen.“

(Zeiländer, d. Geistesdicht I. Erdkunde.)

Aus Makedonien und vom Heiligen Berge.

Reisebilder von Geh.-Rat Professor DDr. H. Selzer.

Mit zahlr. Abbildungen. gr. 8. Geb. ca. 6 Mk.

Der Verfasser, der bekannte Erforscher und Kenner des Orients, hat im vorigen Sommer Achthos und Makedonien besucht, das gegenüber von wildem Nationalitätenkämpfe durchlebt. In Vordergrund des allgemeinen Interesses steht, in Monach genoss er noch die Gelfreundlichkeit zur Unterstützung des nun so grausig dahingewandten russischen Konsuls Roikowsky. In Odessa, am Mittelpunkt des bulgarischen Westmakedoniens und Koryssa, der Hauptstadt des albanesischen Volkstums, hielt er sich längere Zeit auf und konnte die Verhältnisse genau studieren, auch schon den Anfang des Kampfes selbst mit erleben. In Kastrica hat er vielfach Gelegenheit, mit höheren türkischen Militärs in Beziehung zu treten. Daneben sind der Verfasser interessante Mitteilungen über die kirchlichen Verhältnisse des Orients, insbesondere schildert er die Klosterrepublik des Heiligen Berges. Zahlreiche Abbildungen nach zum Teil besonders gefertigten Aufnahmen sind dem Texte beigegeben.

Geistliches und Weltliches a.d. türkisch-griechischen

Orient. Selbsterlebtes u. Selbstgelehn- nes v. Geh.-R. Prof. DDr. H. Selzer.

Mit Portrait und 12 Zeichnungen. Gebunden, geheftet 5 Mk., gebunden 6 Mk.

„Prof. Selzer kennt den Orient, seine Sprache und Geschichte. Was er bietet, ist völlig persönlich Erforschtes. Man lernt aus diesen Skizzen viel. Religionsgeschichte, Philologie und Politik gewinnen durch Selzers Iota und Iota geschichtliche Plaudereien. Ausstattung gut.“ (Die Mitte, 1902, Nr. 5)



Aus Funke: Aus Deutsch-Brasilien. Venda und Frachtwagen.

Ine Australien- und Süd-seefahrt v. Dr. A. Daiber.

vielfachen Abbildungen. Vornehm geb. 7 Mk.
Ein lebenswichtiges, mit warmem Heimat-
gefühlsreiches Buch, das aber auch anderen
Lesern gerecht wird, den Engländern wie
Geborenen." (Illustrirte Zeitung.)
In diesem Sinne ist das Werk geschrieben,
zur Anregung und Anleitung für den, welcher
weite Welt hinauszuziehen gedenkt, als auch
welcher, an die heimathliche Scholle ge-
hen, den Reiz fremder Länder, fremder Sitten
eigenartiger Natur auf sich einwirken lassen

Geschichten aus Australien von Dr. A. Daiber.

schönvoll gebunden 3 Mk. 60 Pfg.
Die hier vorliegenden Geschichten aus
Australien umfassen eine Reihe merkwürdiger Epi-
den, die in freier Erzählung dem gebildeten
Leser im allgemeinen, wie der reiferen Jugend
besonderen dargeboten werden. Sie sind Pro-
ducte aus dem Studium der Entwicklungsgeschichte
unserer terra australis." (Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht.)

Aus Deutsch-Brasilien. Von Dr. Alfred Funke.

vielfachen Abbildungen im Text und einer
von Rio Grande do Sul. Gebunden 7 Mk.
Der Verfasser ist ein scharfer Beobachter und
porträtistischer Feuilletonist. So weiß er, gestützt
auf mehrjährige Bekanntschaft mit Land und
Leuten, ein lebendiges Bild von unseren Landsleuten
in Rio Grande zu geben. Es ist ein lehrreiches und
interessantes Buch über ein Gebiet, das in den deutschen
Kolonisationsbestrebungen eine ganz besondere und
wichtige Rolle spielt." (Berl. Tagebl.)

Vom Kaukasus z. Mittel- meer. V. Dr. P. Rohrbach.

Eine Hodizelts- und Studienrelie
durch Armenien. Mit 42 Abbild. im Text. Geh. 5 Mk., geb. 6 Mk.

„Von den Schneebergen des Kaukasus bis zu
den Ufern des blauen Mittelmeeres geleitet uns
Paul Rohrbach in dem oben genannten, mit einer
Reihe charakteristischer Bilder geschmückten Buche.
Neben dem persönlichen Reiz der Darstellung fesselt
uns vor allem die Liebhaftigkeit der Naturbild-
erungen, die Schärfe der Beobachtung über Land und
Leute und die Fülle neuer wirtschaftlicher und
politischer Aufschlüsse. Über die armenische Frage
wird man ohne Kenntnis der Beobachtungen, die
P. Rohrbach angestellt hat, nicht mehr urtheilen
dürfen. Auch in historischer und archäologischer
Beziehung bietet das Buch, das wir unseren Lesern
warm empfehlen, viel interessantes und Neues.“
(Dresdner Anzeiger.)

Arbeit u. Rhythmus. Von Prof. Dr. Karl Bücher.

3., stark verm. Aufl. Geh. 7 Mk., geb. 8 Mk.
„Die übrige Gemeinde allgemein Gebildeter,
welche nicht bloß diese oder jene Einzelheit der in
der Bücherischen Arbeit enthaltenen wissenschaft-
lichen Errungenschaften interessiert, sondern die sich
für die Gesamtheit des selbständigen und
weitgreifenden Überblicks über den viel-
verschlungenen Zusammenhang von Arbeit
und Rhythmus aufrichtig freuen darf, wird
meines Erachtens dem bewährten Forscher auch dafür
besonders dankbar sein, daß er ihr einen wertvollen
Beitrag zu einer Lehre geliefert hat, welche die
edelsten Genüsse in unserm armen Menschenleben
vermittelt, nämlich zur Lehre von der denkenden
Beobachtung, nicht bloß welterschütternder
Ereignisse, sondern auch alltäglicher, auf
Schritt und Tritt uns begegnender Ge-
schehnisse.“ (G. v. Mayr in der Beilage zur Allg. Ztg.)

Doktor Martin Luthers. Von D. Georg Buchwald.

Des Reformators Leben und Wirken
dem deutschen Volke erzählt.

Mit 118 Abbild. u. 1 Lutherbildnis. Reich geb. 6 Mk.

„Edelste Popularität auf Grund vollkommener Beherrschung des Gegenstandes und eines uner- schöpflchen Vorrates von interessanten, fesselnden, belebenden Einzelheiten zeichnen das Buch aus. Wie schön, wie reichhaltig aus Luthers Briefen und Schriften belebt und geziert ist der Abdruck „Im Hause Luthers“! Wie tritt da der wunderbare Mensch mit dem Kindesherzen und dem blühenden Geist und Verstand, mit dem bezaubernden Lachen und Scherzen und dem imponierenden Löwenmut uns vor das Auge!



So etwas möchten alle Evangelikalen, eigentlich alle Deutschen lesen, um stolz und warm zu werden über dieses Urbild deutscher Treue und deutscher Kraft, diesem großen Bürgen der allzeit guten Gedanken Gottes mit seinen lieben Deutschen.“

(Liter. Rundschau für d. evangel. Deutschland.)

Himmelsbild und Welt- Anschauung im Wandel der Zeiten. Von Prof. Troels-Lund.

Autorisierte Übersetzung v. L. Bloch.

2. Aufl. in leinw. gebunden. geb. 5 Mk.

„Es ist Schwung und Wärme in der Darstellung, und man ist erstaunt über die glückliche Kühnheit so vieler Wendungen, um so mehr, als das so eigenartig Gelegte doch den Eindruck des mühelos Gefundenen und ganz natürlich Ausgedrückten macht. Man sieht, daß der gelehrte Verfasser stark und warm empfindet und anschauend denkt.“

(O. Wolfenfels i. d. Wochenchrift für klassische Philologie.)

Dantes göttliche Komödie von Paul Podhamsky

In deutschen Stenzen frei bearbeitet. Mit Schmuck von H. Vogeler-Worpswede, dem Bild nach Giotto von E. Burnand und 16 Tafeln. Geheftet 6 Mk., vornehm gebunden 7 Mk.

„... In herrlichen Versen und in der gebildeten Sprache faßt der Inhalt der göttlichen Komödie in breitem Strome an uns vorüber mit begegnen wir der gleichen tiefen Auffassung des Originals. ... Der Bearbeiter ein kurzes Leben Dantes, eine Erklärung der göttlichen Komödie, ein Anhang mit Übersetzungen, Rückblicken und Skizzen zu den drei Teilen gegeben. ... Das schön gedruckte Buch ist mit schmuckvollen Randelsteinen und Schlusszeichnungen von Vogeler-Worpswede geschmückt, und eine kleine Zierde bildet das nach Giotto's Frecke zu dem Empfinden neugezeichnete Bildnis des jungen Dante von E. Burnand. ... Der prächtige Podhamsky's wüchsen wir die verdiente Verbreitung und die ersehnte Wirkung, die eine recht umfangreiche Dantegemeinde in Deutschland.“

Dante Alighieris Göttliche Komödie v. Philalethes

Metrisch übertragen und mit kritischen Erläuterungen versehen. In 3 Bänden. Reichlich gebunden. geb. 12 Mk. Auf Velinpapier.

Diese Ausgabe, die ein Stern Humboldt als einen Glanzpunkt in der Geschichte des geistigen Lebens der Deutschen bezeichnen bedarf keiner Empfehlung. Sie ist für jeden, der in die großartige Gedankenwelt Dantes dringen will, unentbehrlich.

Gesundheit und Krankheit in der Anschauung der Zeiten. Von Troels-Lund.

einem Bildnis des Verfassers. Autorisierte Übersetzung von L. Bloch.

Geheftet 4 Mk., in Originalband gebunden 5 Mk.

„Aus diesem langen und für die Geschichte der Heilkunde so bedeutungsvollen Zeitraum die wichtigsten Epochen herauszugreifen und solcher Wärme und von so erhabenen Gehalts vorgetragen, daß man die aktuellsten Resultate zu lesen meint und selbst der Fachmann sich wundert fragt, ob das, was er da liest, nicht dieselben Gesichtspunkte und Reflexionen enthalten, die ihn einst akademische Vorlesungen gemacht haben. Das Buch gibt uns gewissermaßen Momentbilder aus der viertausendjährigen Entwicklung, welche die medizinische Wissenschaft durchgemacht hat, um auf die heutige Höhe zu gelangen.“

(Der Oberarzt)

Der Städtebau nach künstlerischen Grundsätzen.

von Reg.-Rat Camillo Sitte. Ein Vortrags- u. Lösung moderner Fragen d. Architektur u. monumentalen Plastik.

12 Heliogravüren und 109 Illustrationen und Details. 3. Aufl. Geh. 5 Mk., 60 Pfg., in Leimo. 1 Mk. (Verlag v. Carl Graeser & Co., Wien.)

„... Auch in die Praxis sind seine Anregungen vielfach umgeleitet worden: nach dem Urteil Fachmännern haben sie dem Städtebau sogar ganz neue Richtung gegeben. Aber auch für mehr historische Belehrung suchenden seien sich das Buch in vieler Beziehung fruchtbar, da der Verfasser seinen fachwissenschaftlichen mit Humor zu würzen und schwierige Probleme eine klare, natürliche Darstellungsweise zu erschließt.“ (Webermannsche Monatshefte.)

Gottfried Keller. Von Prof. Dr. Albert Köster

von Vorlesungen. Mit einer Reproduktion der Zeichnung von Stauffer-Bern in Heliogravüre. Geh. 2 Mk., 40 Pfg., gebunden 3 Mk.

„... Und er wollte den Dichter nicht sowohl schillern und kritisieren, sondern schlicht erzählen, Keller geworden ist und warum er so und anders hat werden müssen. Das hat er auf dem Raum meisterhaft getan. Auch äußerlich das Buch zu G. Keller, durch seinen soliden Bindband, seinen schönen Druck und seine Billigkeit, die in Anbetracht der beigegebenen Radierung von Stauffer (in Heliogravüre) auffällt.“ (D. v. Greysz I. d. Deutsch. Litztg. 1900.)

Charakterköpfe aus der antiken Literatur.

Von Prof. Dr. Schwarz in Göttingen.

mit Vorträge: 1. Hesiod und Pindar, 2. Thukydides und Euripides, 3. Sokrates und Plato, 4. Polybios und Cicero, 5. Eicero. Geh. 2 Mk., geb. 2 Mk., 60 Pfg.

„Das Büchlein will nach der Vorrede nicht nur Fachgenossen bestimmen sein. Gewiß ist vor allem zu wünschen, daß der weitere Kreis, an den es sich wendet, die reiche Belehrung suche, die es bieten kann; aber ich wüßte nicht, wer ein solches Buch zu genießen befähigter wäre als der Laienleser. ... Die Götter haben dem Verfasser gegeben, ein *opusculum* alle zu produzieren, wie dem Sophocles; das schmeckt vielen nicht, weil sie an die gleichmäßige Sägigkeit des gemauerten Fönigs gewöhnt sind. Aber so lehren ihn die Bienen, die nicht an den hellenischen Wäzkräutern gendert sind. Und vielen, denen der klassizistische Zuckerband zuwider ist, wird eben dadurch das echte Hellenentum wieder genießbar werden.“ (Witich v. Wilamowitz-Möllendorf.)

Die Renaissance in Florenz u. Rom. Von E. Brandi,

Professor an der Universität Göttingen. Zweite Auflage. Geh. 5 Mk., gebunden 6 Mk.

„Wir haben ein ganz vortreffliches Buch vor uns, das, mit weiser Ökonomie den reichen Stoff beherrschend, weiteren Kreisen der Gebildeten, die das Bedürfnis empfinden, die unsterbliche Kunst der italienischen Renaissance im Zusammenhang mit der Zeitgeschichte, von der sie abhängig ist, zu begreifen, nur lebhaft empfohlen werden kann.“ (Köln. Zeitung, 1900, Nr. 484.)

„Im engsten Raum stellt sich die gewaltigste Zeit dar, mit einer Kraft und Gedrungenheit, Schönheit und Kürze des Ausdrucks, die klassisch ist.“ (Die Nation, 1900, Nr. 34.)

„Brandis Buch bietet vor allem höchst lebendige Schilderungen der führenden Persönlichkeiten; die Stelle über Michelangelo gehört zum Besten darin und zeigt am stärksten volles Mitempfinden und tiefes Eindringen.“ (Bildliche Zeitschrift, 1902.)



Buchdruck aus Brandi.

Das moderne Italien. Von Pietro Orsi.

Geschichte der letzten 150 Jahre.

Übersetzt von F. Goeh. Geheftet 5 Mk., 60 Pfg., vornehm geb. 6 Mk., 40 Pfg.

„... So ist denn die deutsche Ausgabe in jeder Beziehung dazu angetan, dem schönen Italien und seiner Geschichte in den letzten anderthalb Jahrhunderten neue Freunde zuzuführen.“ (Leipziger Zeitung, 1903, Nr. 60.)

„Auf streng wissenschaftlicher Grundlage ist hier das gesamte gedruckte vorliegende Material für die politische Geschichte Italiens in den letzten anderthalb Jahrhunderten zu einem organischen Ganzen verarbeitet. Das Schlusskapitel bietet dann in großen Zügen einen Überblick über die Haupterscheinungen auf den Gebieten von Kunst und Wissenschaft. Das ganze Buch zeichnet sich dadurch aus, daß, um eine trockene Aufzählung der Daten und Ereignisse zu vermeiden, in äußerst geschickter Weise Auszüge aus politisch wichtigen Reden, Parlamentsreden und Ähnlichem in die Darstellung verflochten sind. Ein anderer Vorzug Orsis ist der, daß er eine einseitige Parteinahme zu vermeiden und den politischen Ideen und Bestrebungen Mazzinis, Cavour's, Garibaldi's, Crispi's u. a. gleichmäßig gerecht zu werden sucht.“ (Deutsche Literaturzeitung.)



Aus Dähnhardt: Märchenbuch. Märchenerzählerin. Zeichnung von E. Kuitthan.

Deutsches Märchenbuch. Von Dr. O. Dähnhardt.

Mit vielen Zeichnungen u. farb. Originallithographien von E. Kuitthan. 2 Bändchen. Geb. je 2 Mk. 20 Pfg.

„Ein neues Märchenbuch im Geist und Gewande der lieben alten, uns aus eigener Kindheit vertrauten Märchenammlungen. Mit philologischem Wissen und glücklicher Hand hat Dr. Dähnhardt aus der reichen, nur dem Forscher bekannten Literatur hier Perlen zusammengetragen, die in ansprechendem Band unsere märchentfrohen Kinder erfreuen werden. Auch die Zeichnungen sind gut und zweckentsprechend.“ (Die Zeit, 1902, Nr. 13.)

Die Arche Noah. Von Fritz und Emily Kögel.

Reime für Kinder mit Bildern

von H. Eldrodt, O. Fikentscher, A. Hauelsen, F. Hein, K. Hofer, H. v. Volkmann, B. Welte. 32 Seiten mit 24 vielfarbigen Bildern in origin. Einb. 2 Mk. 80 Pfg.

„In der Reform des Bilderbuchs gebührt der Arche Noah ein Ehrenplatz. ... Die Bilder dürften in ihren reinen, hellen, eindrucksvollen Farben und in der Klarheit der Zeichnung, auch in der Einfachheit des Entwurfs vielleicht noch größere Aussicht auf das Verständnis der Kinder haben als manche der ... Bilder.“ (Die Frau 1901.)



Aus Dähnhardt: Märchenbuch. Zeichnung von E. Kuitthan.

Heimatsklänge aus den sächsischen Gauen.

Von Dr. Oskar Dähnhardt. Buchschmuck von Robert Engel.

I. Aus Marich und Heide. Moderne Gedichte und Erzählungen.

II. Aus Rebenflur und Waldesgrün. Deutsche Gedichte und Erzählungen.

III. Aus Hochland und Schneegebirg. Deutsche Gedichte und Erzählungen.

In künstlerischem Um Schlag geheftet je 2 B. bunden je 2 Mk. 60 Pfg.

„... Ein ausgezeichnete Kenner der deutschen Dialektdichtung, ein kühner Tiefenforser im deutschen Volksgemüte, ein warmherziger Pädagog, der seinen Jungen die öde Schulklausur behaglichen Stille traulicher Zwiegespräche echter Märchenstimmung umzuwandeln vermag, macht hier den überaus gut gelungenen Pädagogen Schülern und Lehrern eine Auswahl des Besten vorzulegen, was die heimliche Dialektdichtung Vers und Prosa darbietet.“ (B. Sauer im Buchh.)

Anderiens Märchen. Von Verfasser selbst befohlen

deutscher Text. 3 Ausgaben.

I. Sämtliche Märchen. 13. Auflage. 125 Illust. Preis reich gebunden 4 Mk. 50 Pfg.

II. Ausgewählte Märchen für die Jugend. Mit vielen Illust. 18. Aufl. Preis reich kart. 3 Mk.

III. Die schönsten Märchen für die Jugend. Mit vielen Illustrationen. Kleine Ausgabe. 1. Auflage. Preis kart. 1 Mk. 50 Pfg.

Die Ausgaben zeichnen sich durch ihre reichliche Ausstattung und billigen Preis aus.



Bus Dähnhardt: Helmschlänge. Zeichnung von R. Engels.

Deutsche Götter- u. Helden- Sagen. Von Dr. H. Lange.

den besten Quellen für Haus und Schule dargestellt. 2., verb. Aufl. Mit 12 Künstler-Steinzeichnungen (Originallithographien) von Rob. Engels. 3 Mk. — Buch in 3 Teilen zu je 2.40 Mk. geb.

Die altbewährten Sagen, die in grauer Zeit der Geist des deutschen Volkes sich von den Göttern und Helden geschaffen hat und die treueste Ausdruck seines Wesens noch heute in dem deutschen Herz anmuten müssen, wollen in diesem deutschen Götter- und Heldenlagen die Freunde unter der deutschen Jugend gewinnen, die ihnen schon Tausende gewonnen haben. In der Gestalt, ausgestattet mit 12 prächtigen mehrfarbig lithographierten Tafeln des rühmlichst bekannten Künstlers Robert Engels, tritt das Buch von dem vor seine Leser. Geheimnisvoll, wie das Echo der deutschen Urwälder, klingen die Mären von den alten deutschen Göttern, von Ziu und Wodan, von Donar und Baldur, von Freya, Holda und Nerthus. Ein mächtig und ergreifend klingt die Sage von den großen Taten und ergreifenden Schicksalen unserer Vorfahren. Es ist eine Fülle von reich belebten Bildern, von wechselnden Handlungen, von Freud und Leid. Gestalten, die in ihrer strahlenden Heldengröße er in ihrer furchtbaren Wildheit weit über menschliches Maß hinausragen, dort Erscheinungen von der tiefsten Lieblichkeit und Anmut, finsterner Trost neben reiner Empfindung, unerschütterliche Treue neben dem Verrat! Stoffe und Darstellung sind gleich geeignet, die Jugend zu gewinnen und zu begeistern.

Sigismund Rüstig, der Bremer Steuermann. &

In neuer Robison n. Kapt. Marryat.

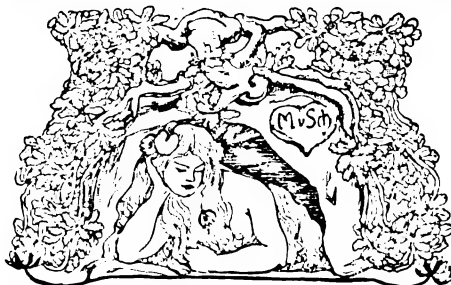
Mit zahlreichen Bildern. Gebunden 2 Mk. 40 Pfg.

Dieses 1. Zt. von Heinrich Laube überlegte Robisonade ist bereits in mehr als 100 000 Exemplaren verbreitet und ein Lieblingsbuch der Knaben und Mädchen von 10—13 Jahren.

Deutsche Heldenlagen. Von Karl Heinr. Keck.

Dem deutschen Volke und seiner Jugend wieder erzählt. Zweite, vollst. umgearb. Auflage, belorgt von Dr. Bruno Bülse. 1. Band: Sudrun u. Nibelungen. Mit Künstler-Steinzeichnungen (Originallithographien) von Rob. Engels. Geb. 3 Mk.

In seiner Heldenlage hat das deutsche Volk des Mittelalters sein Denken und Fühlen, sein Leben und sein Handeln am klarsten ausgeprägt, in ihr offenbart sich der Geist deutscher Vorzeit noch heute am edelsten. Darum darf die deutsche Jugend nie vergessen, wie Siegfried mit dem Drachen tritt, wie die Königinnen miteinander haderten, wie der flüchtige Hagen am Lindbrunnen den arglosen Helden erschlug und wie die furchtbare Kriemhild den Mord des Gatten an den Nibelungen rächte. Stets soll die Erinnerung an Sudrun's ausharrende Treue, an die listreiche Verfehlungen des schmiedekundigen Wieland, an die kühnen Taten Dietrichs von Bern und seiner Gefellen: des greifen Hildebrand, des starken Wiltich und des grimmen Heine bewahren! Dazu will dies Buch zu seinem Teile mit helfen. — Auch die prächtige Ausstattung wird hoffentlich dazu beitragen, dem Buche viele Freunde zu gewinnen; die Lithographien, mit denen Robert Engels es schmückt hat, verdienen es, und je länger er auf sie schaut, desto schwerer wird es dem aufmerksamen Betrachter werden, sich von ihrer eindrucksvollen Größe loszureißen.



Bus Dähnhardt: Märchenbuch. Zeichnung von E. Kuitan.

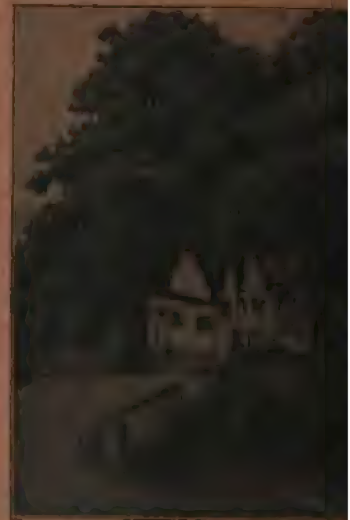
Künstlerischer Wandschmuck

„Von den Bilderunternehmungen der letzten Jahre, die der neuen „künstlerischen Bewegung“ angehören, begrüßen wir eins mit ganz ungetrübter Freude: den „künstlerischen Wandschmuck“ von Schuler und Haus“. . . . Wir haben hier wirklich einmal ein aus warmer Liebe zur guten, redtem Verständnis in ehrlichem Bemühen geschaffenes Unternehmen vor uns — fördern wir und uns zu Fuß, nach Kräften!“ (Kunstwart)

Bisher erschienenen u. a. folgende Blätter:

Die mit * versehenen Bilder sind 60×50, die mit + 75×55, die anderen 100×70

* K. Bauer, Goethe	Mk. 3.—	M. Roman, Römische Campagna	3.—
* K. Bauer, Schiller	3.—	W. Strich-Chapell, Lieb Heimatland	3.—
* K. Bauer, Luther	3.—	W. Trübner, Alt-Heidelberg	3.—
J. Bergmann, Seeroten	6.—	H. v. Volkmann, Die Sonn' erwacht	6.—
K. Biele, Hinnengrab	6.—	H. v. Volkmann, Wogendes Kornfeld	6.—
K. Biele, Stahlwerk bei Krupp	6.—		
W. Czanz, Schwarzwaldtanne	6.—		
U. Dettmann, Vulkan-Werft	6.—		
U. Du Bois-Reymond, Die Akropolis	6.—		
H. Eichrodt, Droben steht die Kapelle	5.—		
R. Engels, Gudrun am Meere	6.—		
J. Filkenicher, Malven	5.—		
+ O. Filkenicher, Krähen im Schnee	4.—		
+ O. Filkenicher, Elchthörnchen	5.—		
O. Filkenicher, Fuchs im Kled	3.—		
R. Friese, Springender Löwe	6.—		
W. Georß, Müdgender Bauer	6.—		
F. Hein, Am Webstuhl	6.—		
F. Hoch, Fischerboote	6.—		
+ F. Hoch, Morgen im Hochgebirge	4.—		
F. Hoch, Kiefern	6.—		
F. Kallmorgen, Südameriko-Dampfer	6.—		
F. Kallmorgen, Lokomotiven-Werkstätte	6.—		
* B. Kampf, Kaiser Wilhelm II.	3.—		
G. Kampmann, Mondaufgang	6.—		
G. Kampmann, Bergland im Schnee	5.—		
G. Kampmann, Abendrot	5.—		
E. Kallhan, Stille Nacht, heilige Nacht	5.—		
S. Ileg, Fingerhut im Walde	6.—		
+ E. Liebermann, Wenn Gott will rechte Gaitz erweisen	5.—		



W. Strich-Chapell, Blühende Kirsche
41×30 cm Mk. 2.50, gerahmt Mk. 4.50

Rahmen	Schulrahmen (Erlenholz, ohne Profil) . . .	* Mk. 3.—, + Mk. 3.20
	Hausrahmen (Erlenholz, mit Profil) . . .	* „ 5.40, + „ 6.—
auch als Wechsel-	dasi., mit Glas	* „ 9.—, + „ 10.—
rahmen vorrätig	Salonrahmen (Mahagonipolitur, mit Glas) * „	10.—, + „ 11.—

Kleine Wandbilder für das deutsche Haus

Bildgröße 41×30 cm, mit Papierrand 57×44 cm. — Preis eines jeden Blattes

Einfache geschmackvolle Hausrahmen aus gebeiztem Erlenholz ohne Glas 2 Mk., mit 25 Plg. Vornehme Salonrahmen mit aufgelegter Mahagonipolitur und Goldlinien mit 3

Geldienk-Mappe, in künstl. Ausführung, je 10 Blätter nach Wahl (Nr. 201—216) enthaltend, 28 Mk., die Mappe allein ohne Bilder 8 Mk.

je 5 Blättern: 201—205, 206—210, 212—216, in vornehmer Kartonmappe

201. Luth., Altes Städtchen.	206. v. Volkmann, Abendwolken.	212. Hein, Das Tal
202. Biele, Christmarkt.	207. Lieber, Helderot.	213. Ortleb, Herbstzeit.
203. Havellen, Ruhe.	208. Biele, Einamer Hof.	214. Peizer, Am Stadthor.
204. Heß, Dachauerin.	209. Kall, Hühner.	215. Strich-Chapell, Blühende Kirsche
205. von Volkmann, Fröhling auf der Weide.	210. Filkenicher, Malmorgen.	216. von Volkmann, Herbst
	211. Du Bois-Reymond, Ägina.	

Auf Wunsch ausführliche illustrierte Kataloge unentgeltlich und

Unsere Muttersprache, ihr Werden und ihr Wesen.

Ausgabe. in leinw. geb. 2 Mk. 60 Pig.

Ästhetik der deutschen Sprache. Gebunden 2 Mk. 80 Pig.

Deutsche Sprach- und Stillehre. Gebunden 2 Mark.

Musterstücke deutscher Prosa. Gebunden 1 Mk. 40 Pig.

Professor Dr. Oskar Welle.

Die „Muttersprache“, der vom Allgemeinen Sprachverein die höchste bisher zuerkannte Meinung verliehen wurde, ist besonders geeignet, die herrliche Auffassung unserer Muttersprache zu bekämpfen und die Kreise der Schüler über ihr Wesen zu unterrichten.

Es ist mit Freuden zu begrüßen, daß unsere Sprache auch einmal von ästhetischen Gesichtspunkten aus betrachtet wird. Das Buch ist denn auch so recht den Wünschen Rudolf Wands entgegen, der in seinem „Deutschen Unterricht“ wiederholt eifrig für eine derartige Sprachbildung eintritt. Möge darum auch das Welles, das vorzüglich geeignet ist, den Sinn für Sprachform auszubilden, die gleiche Verbreitung finden, wie seine „Muttersprache“! (Lit.-Revue.)

Das Buch (Sprach- und Stillehre) ist seinem Gepräge nach dazu angetan, in die Fußtapfen des Bruders zu treten. Die kurzgefaßte bestimmte Art der Belehrung, die geistvoll und mit dem Rüstzeug der gelehrten geschichtlichen Forschung zu prunken, und die doch die wohlthätige Sicherheit gibt, daß man dem Führer allwege folgen kann, das ist es, was Welles Bücher auszeichnet und was ihnen so viele Freunde macht.“ (Leipz. Zeitung.)

Mit diesem Buche hat Welle dem deutschen Unterricht ein neues wertvolles Unterrichtsmittel geschenkt. ... Sein Buch enthält eine Reihe von Musterstücken, an deren Schluß kurz auf die Hingewiesen wird, durch die sich die Schreibweise der Verfasser auszeichnet und von der anderer Mittelteil unterscheidet. ... (Preuß. Kreuz-Zeitung.)

Vom papiernen Stil. Von Prof. Dr. Otto Schröder.

Neue, durchgesehene Auflage. Gehftet 2 Mk., schmuckvoll gebunden 2 Mk. 80 Pig.

„Selbst braucht das Buch nicht mehr zu werden, es gelesen; gelesen nicht von jedermann, wohl von allen, die berufen sind, ihre Worte zu wählen. Es ist keine Sammlung von Vorschriften und Geboten; es wendet sich nicht so sehr an den Verstand, als an die feineren Regungen der Seele, und kann deshalb nie ganz veralten.“

Deutsche Dichter des neunzehnten Jahrhunderts.

Ästhetische Erläuterungen für Schule u. Haus. Herausg. v. Prof. Dr. Lyon.

Die Erläuterungen haben den Zweck, zu einem liebevollen Verständnis der Dichtung des neunzehnten Jahrhunderts hinzuführen. Das künstlerische steht im Mittelpunkt der Erklärung. Sie will helfen, das Kunstwerk als Ganzes zu erfassen, indem sie Aufbau und Kunstmittel zu lebendigem Bewußtsein bringt und Grundbegriffe des künstlerischen Schaffens am konkreten Beispiel entwickelt. Das Werk wieder als Ganzes wird als Zeugnis der sich entwickelnden Persönlichkeit aufgefaßt und in den zeit- und literaturgeschichtlichen Zusammenhang eingeordnet. Die Einzelerklärung wird nicht vernachlässigt, dabei stets ihre Bedeutung für das Ganze berücksichtigt. Sachliche und sprachliche Schwierigkeiten werden kurz erklärt, das Stoffgeschichtliche und rein Biographische wird auf das Notwendige beschränkt. — Der Umfang eines Bändchens beträgt 2—3 Bogen, der Preis 50 Pf.

Es erschienen bisher folgende Bändchen:

1: Fritz Reuter, Ut mine Stromild, von Prof. Dr. P. Vogel. 2: Otto Ludwig, Makkabäer, von Dr. R. Petzsch. 3: Hermann Sudermann, Frau Sorge, von Prof. Dr. G. Boetticher. 4: Theodor Storm, Immensee und Ein grünes Blatt, von Dr. O. Ladendorff. 5: Wilhelm Heinrich von Kleist, Novellen, von Dr. Th. Matthias. 6: Gustav Freytag, der Dichter des Jörn Uhl, von Dr. K. Kinzel. 7: Heinrich v. Kleist, Prinz von Homburg, von Dr. R. Petzsch. 8: Gottfried Keller, Martin Salander, von Dr. R. Fährli. 9: Fr. M. Weber, Dreizehnhinden, von Dr. Dr. E. Wallerzeller. 10: Richard Wagner, Die Meisterlänger, von Dr. R. Petzsch.

Unsere Pflanzen. Von Dr. Friedrich Söhns.

Ihre Namensklärung und ihre Stellung in der Mythologie und im Volksaberglauben. 2. Auflage. Schmuckvoll gebunden 2 Mk. 40 Pig.

„Das Büchlein ist mit warmer Liebe zur Natur und zu unserer Muttersprache geschrieben. Eine große Anzahl der oft uralten, anreichen Pflanzen-Volksnamen, über deren Ursprung man oft vergeblich grübelt, wird hier erklärt, auch der Volksheilkunde, der Pflanzen-Symbolik, der Dichtung und Mythologie wird an passender Stelle gedacht.“ (Preuß. Lehr.-Ztg. 1901.)

Naturgeschichtliche Volksmärchen aus nah u. fern.

Gesammelt von Oskar Dahnhardt. Schmuckvoll gebunden 2 Mk.

Das Büchlein vereinigt Märchen, die Naturerscheinungen zu deuten suchen, die sinnige Anschauung, dichterisches Empfinden und herzlichen Humor vereinigen, und die zeigen, wie eng die Natur mit dem Gemütsleben des Volkes verwachsen ist.

Naturstudien im Hause.

Plaudereien in der Dämmerstunde.

2. Aufl. In gezeichnet. Orig.-Leinwand. 3 Mk. 20 Pfg.

Naturstudien im Garten.

Plaudereien am Sonntag Nachmittag.

In gezeichnet. Orig.-Leinwandband 3 Mk. 60 Pfg.

Naturstudien in Wald und Feld.

Spaziergangsplaudeereien.

In gezeichnet. Orig.-Leinwandband 3 Mk. 60 Pfg.

Drei Bücher für die Jugend. Von Dr. K. Kraepelin. Mit Zeichnungen von O. Schwindraheim.

„Das herrliche Werk eignet sich nicht nur vorzüglich als Geschenk für begabte größere Knaben, sondern auch als Hilfsmittel für den Lehrer zur Vorbereitung auf den naturkundlichen Unterricht.“ (Bayr. Lehrertg., 13. Nov. 1901.)



Bis Kraepelin: Naturstudien in Wald und Feld.

„Das neue Buch ist ein Muster für jeden biologischen Unterricht in der Schule. Die Art und Weise, wie die seit Darwin so außerordentlich fortgeschrittene Lebenskunde der Pflanzen und Tiere hier im Plaudergewande vorgeführt wird, und zwar dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft entsprechend, ist geradezu als unübertrefflich zu bezeichnen. Ein ähnliches Geschenk für wissbegierige Knaben ist kaum zu finden.“ (Z. f. schweiz. Schulen 1901.)

„Für die Schülerbibliotheken unserer Bürger-Schulen gibt es kein Buch, welches so geeignet wäre, den Schüler zu tieferer Auffassung des Naturganzen hinzuleiten, wie dieses. Unseren Schulfreunden aber rufen wir zu: Wollt Ihr eurer heranwachsenden Jugend rechte Freude bereiten, so gebt ihnen „Kraepelins Naturstudien.““ (Deutsche Schulztg., 8. Jahrg., Nr. 17.)

Streckzüge durch Wald und Flur.

Von B. Landsberg.

Eine Anleitung zur Beobachtung der Natur in Monatsbildern. Für Haus und Schule bearbeitet. Dritte Auflage. Mit 31 Abbildungen nach Originalzeichnungen von Frau H. Landsberg. In Original-Einband 3 Mark.

„Nach dem Grundsatz: „leben soll man lernen draußen in Wald und Flur“, hat der Verfasser der Jugend ein Buch geboten, das als ein zweites geeignet erscheint, die Natur und das rechte Verständnis für das Naturleben zu wecken, das anleitet, mit eigenen Augen zu sehen und mit eigenem Verstande zu arbeiten. ... Das Buch ist ein Buch von reichem sachlichen Inhalt, das auch ein pädagogisches Werkchen, das die Anordnung und Durcharbeitung des Stoffes jedem jungen Lehrer und jeder Lehrerin ein solches Material an die Hand gibt. Die Abbildungen sind musterhaft, und die ganze Ausstattung ist dem Preise entsprechend. Dem Buche ist die warmste Empfehlung zu wünschen.“ (Zettlitz, 1. Nov. 1901.)

Blütengeheimnisse.

Von Dr. Georg Worgitz.

Eine Blütenbiologie in Einzelbildern.

Mit 25 Abbildungen im Text. Buchpreis 3. V. Ellarz. Gebunden 3 Mark.

„Ein vortreffliches und reizend illustriertes kleines Buch, das allen Freunden der Naturwelt willkommen sein wird. Der Verfasser in anregender populärer Form tiefen Einblick in die vielfältigen Beziehungen, die das geistige Triebwerk des organischen Lebens mit der Welt aller der Außenwelt verknüpfen.“ (Sonderdruck.)

Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen.

Im Sonnensystem. Von G. H. Darwin.

Autorisierte deutsche Ausgabe nach der englischen Auflage von A. Pockels. Mit einem Einführungswort von Prof. Dr. G. v. Neuberg und 43 Illustr. im Text. Gebunden 6 Mk.

„Wer annehmen wollte, in dem obigen Buch lediglich eine Darstellung der verschiedenen Erscheinungen der Ebbe und Flut und populäre Erklärungen derselben zu finden, würde sich irren. Allerdings ist das Buch allgemein verständlich, allein es geht weit über den Rahmen der üblichen Darstellung der Gezeiten hinaus. Es ist ein Buch einzig in seiner Art, das aus den Geophysiker mandersel Neues bringt. Der Verfasser, ein hochberühmter englischer Mathematiker, hat durch eigene Forschungen auf dem Gebiet der Gezeiten theorie wichtige Entdeckungen gemacht, die sich auf die Rolle beziehen, welche die Anziehungskraft des Mondes in der Urtzeit der Erde gespielt und zukünftig noch spielen wird. Jeder, der sich für Kosmologie interessiert, wird in dem obigen Werke hohen Genuß finden.“ (Sonderdruck.)

IS Natur u. Geisteswelt.

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Bändchen von 130—160 Seiten zu 1 Mk., in geschmackvollem Einband zu 25 Pfg. Jedes Bändchen ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich. Interessanter und allgemeinverständlicher Behandlung werden in abgeschlossenen Bändchen auf wissenschaftlicher Grundlage ruhende Darstellungen wichtiger Gebiete in planvoller Belchränkung aus allen Gebieten des Wissens geboten, die von allgemeinem Interesse sind und dauernden Nutzen gewähren.

Als wertvolles, nützliches Geschenk empfehlen sich besonders: **Die deutsche Sprache**, nach Wahl, gebunden, in geschmackvollem, dauerhaftem Geschenkdeckchen, das sich zum Aufstellen wie Aufhängen eignet, zum Preise von 6 Mark 50 Pfg.

Geographische Bibliothek.

Deutsches Wirtschaftsleben. **Göther**, Die Welt der Entdeckungen. **Schöner**, Die Polarforschung. **Janion**, Meeres- und Meeresleben. **Kirchhoff**, Mensch und Meer. **Schöner**, Der Bau des Weltalls. **Schöner**, Die deutschen Volksstämme u. Landschaften.

Technische Bibliothek.

Die Kunst der Zukunft. **Schöner**, Ingenieurtechnik der Neuzeit. **Schöner**, Die Kunst der Metallverarbeitung. **Wieding**, Das Eisenhüttenwesen.

Kulturhistorische Bibliothek.

Die deutsche Geschichte. **Borinski**, Die deutsche Baukunst. **Otto**, Das deutsche Handwerk. **Schwemer**, Restauration und Erneuerung. **Soden**, Palästina. **Welle**, Schrift und Buchwesen. **Welle**, Die deutschen Volks- und Landschaften.

Deutsche Bibliothek.

Die deutsche Geschichte. **Gruber**, Die deutsche Wirtschaft. **Heil**, Die deutsche Stadt im Mittelalter. **Kaibler**, Die deutsche Baukunst. **Loening**, Die deutsche Reichsverfassung. **Matthaei**, Die deutsche Baukunst. **Otto**, Die deutsche Hand- und Webkunst. **Otto**, Die deutsche Hand- und Webkunst. **Welle**, Die deutschen Volksstämme und Landschaften.

Auf Wunsch ausführliche illustrierte Prospekte umsonst und postfrei.

Naturwissenschaftliche Bibliothek.

Auerbach, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. **Blodmann**, Luft, Wasser, Licht und Wärme. **Eckstein**, Kampf zwischen Mensch und Tier. **Stellenhagen**, Unsere wichtigsten Kulturpflanzen. **Graeg**, Das Licht und die Farben. **Hauske**, Bau und Leben des Tieres. **Hesse**, Abstammungslehre und Darwinismus.

Medizinische Bibliothek.

Biernadi, Moderne Heilwissenschaft. **Buchner**, Gesundheitslehre. **Frenkel**, Ernährung und Volksnahrungsmittel. **Sachs**, Der menschliche Körper. **Schumburg**, Tuberkulose. **Zander**, Nervenleiden. **Zander**, Selbstbesübungen.

Volkswirtschaftliche Bibliothek.

Gruber, Deutsches Wirtschaftsleben. **Hauske**, Bevölkerung. **Loening**, Reichs- und Volksverfassung. **Loeh**, Verkehrsentwicklung in Deutschland. **Meyer**, Soziale Bewegungen und Theorien. **Otto**, Das deutsche Handwerk. **Unold**, Aufgaben und Ziele des Menschenlebens.

Pädagogisch-philosophische Bibliothek.

Kreibitz, Die fünf Sinne des Menschen. **Kalpe**, Die Philosophie der Gegenwart in Deutschland. **Rehmke**, Die Seele des Menschen. **Unold**, Aufgaben und Ziele des Menschenlebens. **Weinert**, Gleichnisse Jesu. **Zander**, Selbstbesübungen. **Ziegler**, Allgemeine Pädagogik.

Illustrierte Pflanzenornamente. 12 farbige Tafeln,

enthaltend 53 Ornamente, bearbeitet im Auftrage des Großherzogl. Badischen Oberkultursrats von Prof. Otto Haglunger und Albrecht Ganshofer. 2 Hefungen zum Preise von je 7 Mark.

Das in Anbetracht der zahlreichen zur Herstellung verwendeten Farbenplatten sehr billige Werk ist für den Gebrauch an höheren Mädchenschulen und Frauenarbeitschulen geeignete Vorbilder für den Zeichenunterricht zur Unterstützung des Farbenbegriffes notwendigen Übungen; außerdem bringt es wertvolle, zuverlässige Anleitung zum Stillieren der Pflanzen für weibliche Handarbeiten. Aber auch hinaus können diese Blätter als künstlerisch wertvolle Vorbilder für Handarbeiten und Bemalungen von Art Glasen und werden nützlich auf Musterzeichner wirken. Die schöne Publikation hat die Form, mit der Formen- und Farbenähnlichkeit der heimischen Feld- und Gartenpflanzen bekannt zu machen und ihre praktische Verwertung zu lehren. Der natürliche Charakter der Pflanzen ist nach Möglichkeit gewahrt, abstrakte Formen sind völlig vermieden. Zum Vergleich sind einzelne Tafeln in Federmanier beigegeben; kräftige Umrisse lassen alle Formen ein. So ist alles getan, um die praktische Verwendbarkeit dieser in groß Folio erscheinenden Tafeln zu erleichtern und die weitere Verbreitung zu ermöglichen." (Bazar 1902.)

- Hilbert, Dr. David**, o. Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [VI u. 175 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 6.20, geb. n. \mathcal{M} 5.60.
- Klein, F.**, und **A. Sommerfeld**, über die Theorie des Kreisels. III. Heft: Die störenden Einflüsse. Astronomische u. geophysikalische Anwendungen. [IV u. 247 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 9.—
- Kraser, Dr. Adolf**, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. in Leinw. geb. n. \mathcal{M} 24.—
- Kronecker, L.**, Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen. II. Teil. Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. Band: Erste bis einundzwanzigste Vorlesung. Bearbeitet und fortgeführt von Dr. Kurr Hassen. Mit 11 Figuren im Text. [XII u. 390 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 20.—
- Ostenfeld, A.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Kopenhagen, Technische Statik. Vorlesungen über die Theorien der Tragkonstruktionen. Deutsche Ausgabe besorgt von D. Seeman. Mit 33 lithogr. Tafeln. [VIII u. 427 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 12.—
- Salmon, George**, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweiter Teil. Sechste Auflage. [XXIV u. 416 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 8.—, geb. u. \mathcal{M} 9.—
- Schenk, Dr. ing. Julius**, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 69 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 1.60.
- Schulze, Bruno**, Generalmajor und Chef der Topographischen Abteilung der Landesaufnahme, das militärische Aufnehmen, unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der Königl. Preuss. Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschlands benachbarter Staaten. Nach den auf der Königl. Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearb. Mit 129 Fig. im Text. [XIII u. 365 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 8.—
- Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft**. Herausgegeben vom Vorstand der Gesellschaft. Zweiter Jahrgang. [IV u. 68 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 2.—
- Weber, H.**, Professor in Straßburg und **Wellstein, J.**, Professor in Gießen, Encyclopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. \mathcal{M} 8.— [Bd. II u. III. 1904. Unter der Presse.]
- Wienecke, Ernst**, Lehrer in Berlin, der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Mit reichem Aufgabematerial nebst Resultaten zum Gebrauch an allen Lehranstalten. Mit 69 Figuren im Text. [IV u. 97 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 2.20.
- Zeuthen, G. H.**, Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von RAPHAEL MAYER. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von MORITZ CANTOR. XVII. Heft. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 16.—

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Haber et al.

- I. Arithmetik u. Algebra, red. v. Frz. Meyer.
Hft. 1. [113 S.] 1898. M. 0.40; 2. [112 S.]
1899. M. 5.40; 3. [128 S.] 1899. M. 5.80;
4. [169 S.] 1899. M. 4.80; 5. [208 S.] 1900.
M. 8.40; 6. [272 S.] 1901. M. 7.20;
7. [182 S.] 1902. M. 5.80.
- II. Analysis, 2 Teile, red. v. B. Burkhardt.
I. Teil. Hft. 1. [160 S.] 1899. M. 1.80;
2, 3. [180 S.] 1900. M. 7.60; 4. [169 S.]
M. 4.80. II. Teil. Hft. 1. [175 S.] 1901.
M. 3.20.
- III. Geometrie, 3 Teile, red. v. Frz. Meyer.
I. Teil. Hft. 1. [160 S.] 1903. M. 4.80.
II. Teil. Hft. 1. [183 S.] 1903. M. 6.40.
2, 3. [237 S.] 1903. M. 6.00.
- IV. Mechanik, 2 Teile, red. von E. Klein.
I. Teil. Hft. 1. [171 S.] 1901. M. 5.40;
2. [155 S.] 1902. M. 4.80. 3. [166 S.]
1903. M. 4.00. II. Teil. Hft. 1. [147 S.]
1901. M. 3.80; 2. [231 S.] 1902. M. 3.80.
- V. Physik, 2 Teile, red. v. A. Sommerfeld.
I. Teil. Hft. 1. [160 S.] 1902. M. 4.80.
- Unter der Presse:
- VI. 1. Geodäsie und Geophysik, red. v.
K. Wiewert.
- In Vorbereitung:
- VI. 2. Astronomie, red. v. K. Schwarzschild.
- VII. Historische, philosophische u. didak-
tische Fragen behandeln, sowie Wun-
derregister.

Unter der Presse:

VI. 1. Geologie und Geophysik, red. v.
K. Wlochart.

in Vorbereitung:

VI 2 Astronomie, red. v. K. Schwarzschild.

VII Historische, philosophische u. didaktische Fragen behandelnd, sowie Verzeichnissregister.

Alexandroff, Iwan, Professor der Mathematik am Kaiserlich russischen Gymnasium zu Tambow, Aufgaben aus der niederen Geometrie. Nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Übungsbuche zusammengestellt. Mit einem Vorwort von Dr. M. Schmidt, Professor an der Oberrealschule zu Oldenburg und 100 Figuren im Text. [VI u. 133 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ca. M. 3.—

Bauer, Dr. Gustav, Geheimrat, u. Professor an der Universität München, Vorlesungen über Algebra. Im Auftrage des mathematischen Vereins München herausgegeben von Dr. KARL DOEHLEMANN, o. o. Professor an der Universität München. Mit dem Porträt Gustav Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. [VI u. 376 S.] gr. 8
1903 geh. n. \mathcal{M} 12.—, geb. n. \mathcal{M} 18.—

Blochmann, Dr. Rudolf in Kiel, die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Nach einem auf der 34. Jahresversammlung des Deutschen Nautischen Vereins in Berlin gehaltenen Vortrage dargestellt. [24 S.] gr. 8. 1903 geb. n. M. — 80.

Braunmühl, Professor Dr. A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II. Teil: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 32 Figuren im Text. [XI u. 264 S.] gr. 8. 1903. geh. M. 10.—, geb. M. 11.—

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität zu
Leipzig, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens.
[IV u. 160 S.] gr. 8. 1903. geh. M. 3.40, geb. M. 4. —

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektor-Analyse. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geb. *M.* 2.40.

Cramer, Boirat Prof. E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV n. 694 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. 24. —

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. HERMANN FLEISCHER in Göttingen. Mit einem Einführungswort von FELIX KLEIN und 187 Figuren im Text. gr. 8. 1903. geh. M 8.—, in Leinwand geb. M 9.—

Gauß, Carl Friedrich, Werke. Neunter Band. Herausgegeben von
der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. [VI u.
625 S.] 4. 1903. kart. n. M. 26 —

Darl. zu 5%

Ford, Reitz, Gen.-Agr., Neu-Isenburg in Frankfurt.

**EINLADUNG ZUM
III. INTERNATIONALEN
MATHEMATIKER-KONGRESS
VOM 8.-13. AUGUST 1904 IN HEIDELBERG.**

Der Ausschuß für die Vorbereitung
des III. internationalen Mathematiker-Kongresses:

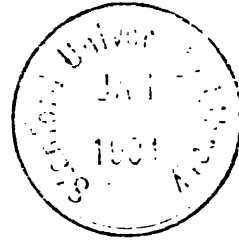
A. Reith-Tübingen, M. Cantor-Hildesberg, W. Dietsch-Strasbourg, W. v. Dyck-München, A. Guttmann-Jena, G. Haupt-Berlin, D. Hilbert-Göttingen, F. Klein-Göttingen, A. Kassar-Berlin, L. Königsberger-Hildesberg, A. Kratzer-Karlsruhe, J. Lüthi-Freiburg, R. Mohrke-Stuttgart, F. Meyer-Königsberg, C. Neugebauer-M. Schabert-Hamburg, F. Scher-Karlsruhe, H. A. Schubert-Berlin, P. Stübel-Kiel, I. P. Trettlein-Karlsruhe, H. Weber-Strasbourg.

Wegen Programm-Zuordnung bittet man sich zu wenden an
Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe i. B., Westendstraße 57.

Zu Versuchs- u. Lehrzwecken ist eine kleine Accumulatoren-Batterie mit 19 Elementen, 12 Ampère bei 2stündiger Entladung, sowie eine dazu passende Dynamomachine und Schaltbrett mit allen erforderlichen Schaltapparaten und Meßinstrumenten unter äußerst günstigen Bedingungen zu verkaufen. Die Anlage ist erst vor kurzer Zeit aufgestellt und noch in Betrieb zu sehen.

(Holl. Anerbieten unter **S. N. 2** an die Expedition der *Zeitschrift*, Leipzig, Poststr. 3. erbeten.

Herrn Kollegen von B. G. Teubner in Leipzig, welche wir den Bescheid
Liest H-2809 eingeleitet.



ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1899–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN,
C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE UND **C. RUNGE**
IN STUTTGART. IN HANNOVER.

49. BAND. 4. HEFT.

MIT 69 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 30. Dezember 1903.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mittellungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

	Seite
<i>Titel und Inhalt</i>	I—IV
<i>Beitrag zur Geometrie der Bewegung ebener Getriebe</i> . Von Otto Mohr in Dresden. Mit 66 Figuren im Text	393
<i>Der Einfluß der Stirnwände eines Kessels auf die Festigkeit der Mantelbleche</i> . Von H. Sellentin in Kiel. Mit 2 Figuren im Text	450
<i>Der dreifach statisch unbestimmte Bogenträger unter der Einwirkung beliebig gerichteter Kräfte</i> . Von Adolf Ludin in Karlsruhe. Mit einer Figur im Text	460
<i>Kleinere Mitteilungen</i>	464
<i>Bücherschau</i>	468
Kugler, Multiplikator. Von R. Mehmke	468
Bonnerman, Vraagstukken over theoretische Mechanica. Von R. Mehmke	468
Cunningham, A binary Canon, showing residues of powers of 2 for divisors under 1000, and indices to residues. Von R. Mehmke	468
Duporeq, Compte Rendu du 2. congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Von Wölffing	469
von Oettingen, J. G. Poggendorff's Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Von Wölffing	469
Freycinet, Sur les principes de la Mécanique rationelle. Von Paul Staeckel	470
Appell et Chappuis, Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de première, conformément aux programmes du 31 mai 1902. Von Paul Staeckel	470
Picard, Quelques réflexions sur la mécanique suivies d'une première leçon de dynamique. Von Paul Staeckel	472
<i>Neue Bücher</i>	473
<i>Eingelaufene Schriften</i>	475

⌘ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

V. Bjerknes, A. Börsch, G. Bohlmann, K. Doehlemaun, G. Hamel, K. Heun, W. Hiert, M. Lenz, R. Mehmke, O. Mohr, E. Müller, † J. Petzval, R. Rothe, C. Runge, J. Schnöckel, A. Semmerfeld, P. Stückel, G. Valentin, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, E. Wölffing.

Beitrag zur Geometrie der Bewegung ebener Getriebe.

Von OTTO MOHR in Dresden.

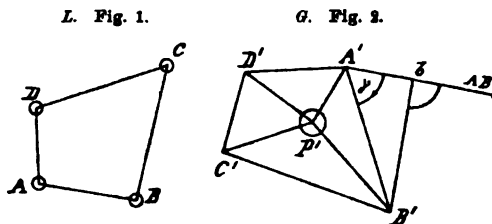
An den technischen Hochschulen fehlt es in den Vorlesungen über Geometrie und Elementarmechanik in der Regel an Zeit, um die geometrischen Eigenschaften der Bewegung starrer Körper und zwangsläufiger Körperverbindungen so eingehend zu behandeln, wie die Wichtigkeit des Gegenstandes und die sehr zahlreichen Anwendungen in allen Teilen der technischen Mechanik es wünschenswert erscheinen lassen. Durch Selbststudium nachzuhelfen, wird dem Anfänger nicht leicht, weil die betreffenden Lehrbücher und Abhandlungen seinen Bedürfnissen nur wenig angepaßt sind. In der nachfolgenden Mitteilung habe ich daher versucht, den wichtigsten Teil dieses Gebietes, die Bewegung ebener Getriebe, mit den einfachsten Hilfsmitteln und in einer für das Selbststudium geeigneten Form darzustellen.

Meine Absicht, die Ergebnisse auch auf die *Kinetik* der Getriebe anzuwenden, mußte ich fallen lassen, um den Umfang der Arbeit nicht übermäßig auszudehnen. Ich behalte mir vor, diesen Gegenstand in einem besonderen Aufsätze zu behandeln.

1. *Der Geschwindigkeitsplan einer ebenen Punktgruppe.* — Wir betrachten während eines unendlich kleinen Zeitabschnittes eine Gruppe von Punkten $A, B, C, D \dots$,

die in einer Ebene sich bewegen, und deren augenblickliche Lage durch den *Lageplan* Fig. 1 in dem Maßstabe 1 cm gleich μ cm angegeben wird. Die Geschwindigkeiten der Punkte

während jenes Zeitabschnittes sollen in einer besonderen Zeichnung, dem *Geschwindigkeitsplan* Fig. 2, durch die Strecken $P'A', P'B', P'C' \dots$ nach Größe, Richtung und Sinn und zwar in dem Maßstabe 1 cm gleich $\mu' \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ dargestellt werden. In den Abbildungen tragen die



Lagepläne, die Geschwindigkeitspläne und die Beschleunigungspläne die abgekürzten Bezeichnungen L , G und B . Der gemeinschaftliche Anfangspunkt P' aller Geschwindigkeitsstrecken heißt der *Pol* des Geschwindigkeitsplans. Die Geschwindigkeit $P'B'$ des Punktes B kann zusammengesetzt werden aus der Geschwindigkeit $P'A'$ des Punktes A und der von der Strecke $A'B'$ dargestellten *relativen* Geschwindigkeit des Punktes B gegen den Punkt A . Wir zerlegen ferner diese relative Geschwindigkeit in die beiden zur Strecke AB parallel und normal gerichteten Komponenten $A'b$, bB' und erhalten hierdurch folgendes Bild von der Bewegung der zwei Punkte A , B : Beide Punkte bewegen sich mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $P'A'$, während B gleichzeitig noch zwei andere Bewegungen mit den Geschwindigkeiten $A'b$, bB' ausführt. Infolge der Geschwindigkeit $A'b$ ändert sich die *Länge* der Strecke AB und zwar in positivem oder in negativem Sinne, je nachdem die beiden Strecken AB , $A'b$ dem *Sinne* nach übereinstimmen oder einander entgegengesetzt sind. Die Strecke $A'b$ bestimmt sonach die *relative Dehnungsgeschwindigkeit* des Punktes B gegen den Punkt A . Das Verhältnis der Geschwindigkeit $A'b$ zur Länge AB , also die Größe

$$\delta = \frac{A'b}{AB} \frac{\mu'}{\mu} \text{ sec}^{-1}$$

heißt die *Dehnungsgeschwindigkeit der Strecke AB* . Sie gibt an, um welchen Bruchteil diese Strecke in einer Sekunde ihre Länge verändert. Es empfiehlt sich, das Verhältnis μ' zu μ gleich einer runden Zahl zu wählen. Im folgenden soll, wenn nichts anderes angegeben wird, *stets* μ' gleich μ angenommen werden, sodaß die Geschwindigkeit δ durch die Formel

$$(1) \quad \delta = \frac{A'b}{AB} \text{ sec}^{-1}$$

bestimmt wird. Infolge der *dritten* von bB' dargestellten Geschwindigkeit des Punktes B ändert sich die *Richtung* der Strecke AB ; wir nennen diese Komponente daher die *relative Drehgeschwindigkeit* des Punktes B gegen den Punkt A und das Verhältnis

$$(2) \quad \omega = \frac{bB'}{AB} \text{ sec}^{-1}$$

die *Drehgeschwindigkeit der Strecke AB* . Um auch den *Sinn* der beiden Geschwindigkeiten δ , ω auf algebraischem Wege angeben zu können, wird es nötig, den von den beiden Strecken AB , $A'B'$ gebildeten Winkel γ in einer bestimmten Weise zu messen und zu bezeichnen: Der Winkel γ , den ein Strahl im Sinne der Uhrzeigerdrehung, dem *positiven* Drehungssinne, zu durchlaufen hat, um von der Richtung AB

nach der Richtung $A'B'$ zu gelangen, soll der *Geschwindigkeitswinkel* der Strecke AB genannt und mit $(AB, A'B')$ bezeichnet werden. Bei dieser Bezeichnung kommt nicht allein die Aufeinanderfolge der Buchstaben, durch die der *Streckensinn* angegeben wird, sondern auch die Reihenfolge der Strecken in Betracht; z. B. ist

$$(A'B', AB) = 360^\circ - (AB, A'B')$$

$$(BA, B'A') = (AB, A'B').$$

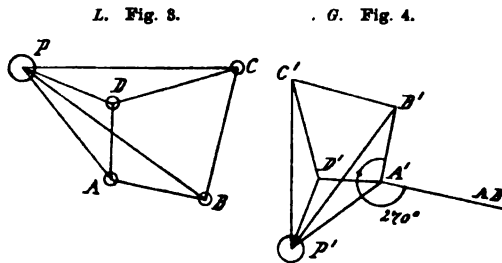
Mit Benutzung dieser Regel, die bei allen Winkelbezeichnungen angewandt werden soll, ergeben sich die Geschwindigkeiten δ , ω nicht nur der Größe, sondern auch dem Sinne nach durch die Formeln:

$$(3) \quad \delta = \frac{A'B'}{AB} \cos (AB, A'B') = \frac{A'B'}{AB} \cos \gamma$$

$$(4) \quad \omega = \frac{A'B'}{AB} \sin (AB, A'B') = \frac{A'B'}{AB} \sin \gamma.$$

Denn man ersieht ohne weiteres, daß AB sich *verlängert*, wenn $\cos \gamma$ positiv ist, und daß AB im *positiven* Sinne der Uhrzeigerbewegung sich dreht, wenn $\sin \gamma$ das positive Vorzeichen trägt.

2. Der *Geschwindigkeitsplan einer starren Punktgruppe*, Fig. 3 und 4. Wenn die bewegten Punkte $A, B, C, D \dots$ starr miteinander verbunden sind, so bleiben die Winkel zwischen den Strecken $AB, BC, CA \dots$ unverändert. Daher sind die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten aller Strecken nach Größe und Sinn einander gleich. Die Dehnungsgeschwindigkeit einer jeden Strecke ist



ihrer Starrheit wegen gleich Null. Folglich sind die Geschwindigkeitswinkel aller Strecken gleich groß und zwar entweder alle gleich 90° oder gleich 270° . Im ersten Falle hat die gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit den *positiven* Sinn und die Größe

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin 90^\circ = + \frac{A'B'}{AB} = + \frac{B'C'}{BC} = + \frac{A'C'}{AC} = \dots$$

während sie im zweiten Falle den *negativen* Wert

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin 270^\circ = - \frac{A'B'}{AB} = - \frac{B'C'}{BC} = - \frac{A'C'}{AC} = \dots$$

hat. Da diese Gleichungen für je zwei einander entsprechende Dreiecke $ABC, A'B'C'$ gelten, so sind die beiden Punktgruppen

$ABCD \dots, A'B'C'D' \dots$ geometrisch ähnlich und von gleichem Sinne, was durch das Zeichen:

$$(5) \quad A'B'C'D' \dots \approx ABCD \dots$$

ausgedrückt werden soll. Dasselbe bringt also nicht nur die Ähnlichkeit der beiden Gruppen, sondern auch die Gleichheit der Geschwindigkeitswinkel zur Darstellung. In dem besonderen Falle, wenn die Drehgeschwindigkeit ω gleich Null ist, fallen alle Punkte $A'B'C'D' \dots$ zusammen. Der Geschwindigkeitsplan besteht dann aus einer einzigen Strecke $P'A'$ und bestimmt eine *Parallelverschiebung* der Punktgruppe.

Der mit der Gruppe starr verbundene und durch die Bedingung:

$$PABC \dots \approx P'A'B'C' \dots$$

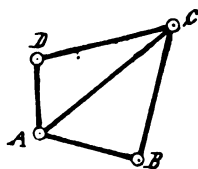
bestimmte Punkt P heißt der *Geschwindigkeitspol* des *Lageplans*. Von allen Punkten der mit der Gruppe starr verbundenen Ebene ABC ist P der einzige, dessen Geschwindigkeit im Zeitpunkt der Betrachtung gleich Null ist. Die Bewegung der starren Punktgruppe besteht aus einer unendlich kleinen Drehung um den Pol P mit der Drehgeschwindigkeit ω . Die Geschwindigkeit v eines Punktes A der Gruppe wird bestimmt durch die beiden Bedingungen:

$$(6) \quad \begin{cases} v = \omega PA \\ (PA, v) = 90^\circ \text{ oder } -270^\circ, \end{cases}$$

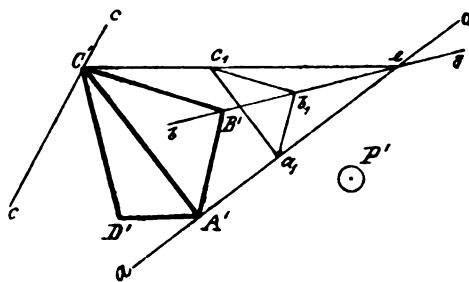
je nachdem ω positiv oder negativ ist.

Der Geschwindigkeitsplan einer starren Punktgruppe wird bestimmt durch die Geschwindigkeiten $P'A', P'B'$ zweier Punkte A, B der

L. Fig. 5.



G. Fig. 6.



Gruppe. Diese beiden Geschwindigkeiten sind von einander abhängig durch die Bedingung, daß $A'B'$ normal zu AB gerichtet sein muß. Der Plan ist ferner bestimmt, wenn außer dem Pol P' drei Gerade aa, bb, cc , Fig. 5 und 6, gegeben sind, auf welche beziehungsweise die

Punkte A', B', C' liegen müssen. Läßt man die zwei Ecken a_1, b_1 des ähnlich-veränderlichen Dreiecks

$$a_1 b_1 c_1 \simeq ABC,$$

dessen Seiten $a_1 b_1, b_1 c_1, c_1 a_1$ zu den Geraden AB, BC, CA normal gerichtet sind, auf den Geraden aa, bb sich bewegen, so beschreibt die dritte Ecke c_1 die durch den Schnittpunkt e von aa und bb gehende Gerade $c_1 e$. Man bestimmt also C' durch den Schnitt der Geraden ec_1, cc_1 , ferner einen zweiten Punkt A' , indem man $C'A'$ normal zu CA zieht, und den übrigen Teil des Geschwindigkeitsplans durch die Bedingung

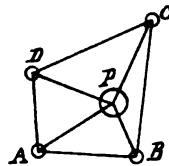
$$A'B'C'D' \dots \simeq ABCD \dots$$

In dem besonderen Falle, wenn die beiden Geraden $cc, c_1 e$ zusammenfallen, wird der Plan unbestimmt.

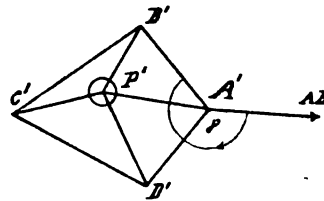
3. Der Geschwindigkeitsplan einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe, Fig. 7 und 8. Da die Winkel zwischen den Strecken $AB, BC, CA \dots$ bei der *ähnlichen* Veränderung der Gruppe unverändert bleiben, so sind die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten aller Strecken gleich groß:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{A'B'}{AB} \sin \gamma_1 \\ &= \frac{B'C'}{BC} \sin \gamma_2 \\ &= \frac{C'A'}{CA} \sin \gamma_3 = \dots \end{aligned}$$

L. Fig. 7.



G. Fig. 8.



Auch die Dehnungsgeschwindigkeiten aller Strecken sind infolge der ähnlichen Veränderung von gleicher Größe:

$$\delta = \frac{A'B'}{AB} \cos \gamma_1 = \frac{B'C'}{BC} \cos \gamma_2 = \frac{C'A'}{CA} \cos \gamma_3 = \dots$$

Die Geschwindigkeitswinkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ sind daher von gleicher Größe γ und durch die Bedingung

$$(7) \quad \frac{\omega}{\sin \gamma} = \frac{\delta}{\cos \gamma} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \dots$$

bestimmt. Folglich ist wie bei einer starren Punktgruppe

$$(8) \quad A'B'C'D' \dots \simeq ABCD \dots$$

Der gemeinschaftliche Geschwindigkeitswinkel γ kann jede Größe annehmen; er liegt

im ersten	Quadranten,	wenn ω positiv	und δ positiv	ist
„ zweiten	„	„ ω positiv	„ δ negativ	„
„ dritten	„	„ ω negativ	„ δ negativ	„
„ vierten	„	„ ω negativ	„ δ positiv	

ist. Zählt man alle Punkte der Ebene ABC zur ähnlich-veränderlichen Gruppe, so enthält dieselbe nur einen einzigen Punkt P , dessen augenblickliche Geschwindigkeit gleich Null ist. Dieser *Geschwindigkeitspol des Lageplans* ist wiederum bestimmt durch die Bedingung

$$(9) \quad PABC \dots \simeq P'A'B'C' \dots$$

Jede unendlich kleine Bewegung einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe besteht demnach aus dieser Veränderung in Verbindung mit einer gleichzeitigen unendlich kleinen Drehung um einen ruhenden Punkt P . Der gemeinschaftliche Geschwindigkeitswinkel

$$\gamma = (PA, P'A') = (PB, P'B') = (PC, P'C') \dots$$

wird gleich Null oder 360° , wenn ω gleich Null ist, er wird gleich 90° oder 270° in dem besonderen Falle, wenn δ gleich Null ist.

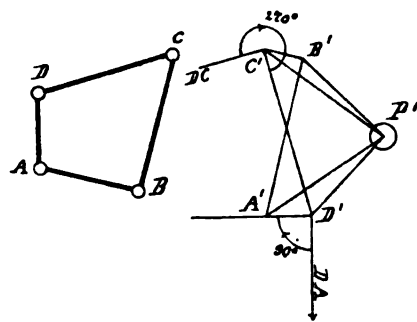
Der Geschwindigkeitsplan einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe $ABC \dots$ ist bestimmt durch die *von einander unabhängigen* Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$ zweier Punkte A , B der Gruppe. Bleiben diese beiden Geschwindigkeiten unverändert, so ändern sich auch die Geschwindigkeiten der anderen Punkte nicht. Wenn also zwei Punkte einer ähnlich-veränderlichen Gruppe mit unveränderlichen Geschwindigkeiten in geraden Linien sich bewegen, so beschreibt auch jeder andere Punkt der Gruppe mit unveränderlicher Geschwindigkeit eine Gerade.

4. *Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons*, Fig. 9 und 10. AB , BC , $CD \dots$ bezeichnen m starre Körper, die parallel zur Bildebene sich bewegen, in den Punkten A , B , $C \dots$ durch Gelenke mit-

einander verbunden sind und eine geschlossene Kette bilden. Durch die Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$, $P'C' \dots$ der Gelenke sind die Bewegungen der Körper vollständig bestimmt. Sie können also ersetzt werden durch starre Stäbe AB , BC , $CD \dots$, und ein solches Körperpolygon soll daher ein *Stabpolygon* genannt werden. Die geometrische Beziehung des Geschwindigkeitsplans zum Lageplan besteht einfach

L. Fig. 9.

G. Fig. 10.



darin, daß jede Seite des geschlossenen m -Ecks $A'B'C'D' \dots$ zu der entsprechenden Seite des m -Ecks $ABCD \dots$ normal gerichtet sein muß. Denn der Geschwindigkeitswinkel eines jeden starren Stabes ist entweder gleich 90° oder gleich 270° . Für die folgenden Anwendungen dieser Beziehung kommt nur der einfachste Fall inbetracht, in dem alle

Ecken des Polygons $A'B'C'D' \dots$ bis auf eine, z. B. B' , gegeben sind. Man zieht $A'B'$ normal zu AB , $C'B'$ normal zu CB und bestimmt hierdurch die Geschwindigkeit $P'B'$ des Gelenkes B sowie die Drehgeschwindigkeiten

$$\frac{A'B'}{AB} \sin(AB, A'B') \text{ und } \frac{B'C'}{BC} \sin(BC, B'C')$$

der beiden Stäbe AB, BC .

5. Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen, Fig. 11 und 12. Es seien AD und BCE zwei Glieder eines Stabpolygons, die in den Gelenken A, E mit den benachbarten Gliedern und durch den Schieber BC miteinander verbunden sind. Der den Schieber führende Stabteil BCD bildet einen Kreisbogen vom Mittelpunkt M . Wir

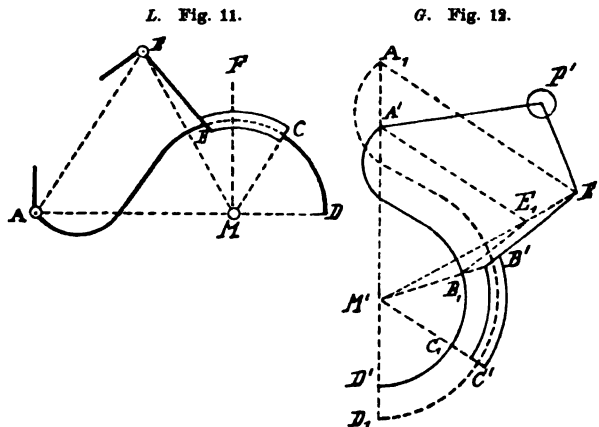
nehmen an, daß die voneinander unabhängigen Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'E'$ der Gelenke A, E gegeben seien. Die relative Bewegung der beiden Glieder gegeneinander besteht in einer Drehung um den Punkt M ; denn diese Bewegung

bleibt möglich, wenn ein Gelenk im Punkte M durch einen Stab MD starr mit dem Gliede AD und durch einen zweiten Stab MC starr mit dem Gliede BCE verbunden wird. Da also sowohl die Punkte A und M als auch die Punkte E und M starr miteinander verbunden sind, so bestimmt man die Geschwindigkeit $P'M'$ des Gelenkes M , indem man $A'M'$ normal zu AM und $E'M'$ normal zu EM zieht. Hierauf sind die Punktgruppen

$$A'M'D' \simeq AMD \text{ und } M'B'C'E' \simeq MBCE$$

zu bilden.

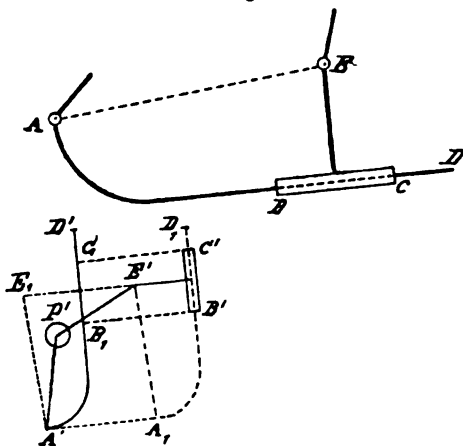
Zweites Verfahren. Man kann die Bewegung des Gliedes BCE zusammensetzen aus einer Bewegung in starrer Verbindung mit dem Gliede AD und einer gleichzeitigen Drehung um den Punkt M . Die erste Bewegung wird durch den Plan $P'A'D'B_1C_1E_1$, die zweite durch die im Punkte M' sich schneidenden Geschwindigkeitsstrecken B_1B' ,



C_1C' , E_1E' dargestellt. Ebenso läßt sich auch die Bewegung des Gliedes AD zusammensetzen aus einer durch den Geschwindigkeitsplan $P'B'C'E'A_1D_1$ dargestellten Bewegung in starrer Verbindung mit dem Gliede BCE und einer gleichzeitigen Drehung um den Punkt M , bei der die Punkte A , D die Geschwindigkeiten A_1A' , D_1D' annehmen. Man bestimmt also die Punkte A_1 , E_1 , indem man $E'A_1$ und $A'E_1$ normal zu AE , ferner $M'A'A_1$ normal zu MA und $M'E_1E'$ normal zu ME zieht. Alsdann können die Punktgruppen

$$A'D'B_1C_1E_1 \approx A_1D_1B'C'E' \approx ADBCE$$

L. Fig. 13.



G. Fig. 14.

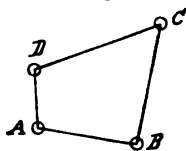
und hierdurch der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$ gebildet werden.

Diese Bildungsweise ist auch in dem Falle anwendbar, wenn der den Schieber führende Stab BCD gerade ist, Fig. 13 und 14, wenn also der Punkt M unendlich fern liegt. Um den Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$ zu bilden, zieht man $A'E_1$ und $E'A_1$ normal zu AE , ferner $A'A_1$ und $E'E_1$ parallel zu BD und bildet

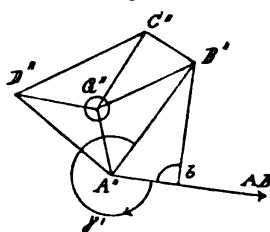
$$A'D'B_1C_1E_1 \approx A_1D_1B'C'E' \approx ADBCE.$$

6. Der Beschleunigungsplan einer Punktgruppe, Fig. 15 und 16. In ähnlicher Weise wie der Geschwindigkeitsplan entsteht der Beschleunigungsplan der ebenen Bewegung einer Punktgruppe, indem man die gleichzeitigen Beschleunigungen der Punkte A , B , C ... durch Strecken $Q''A''$, $Q''B''$, $Q''C''$... darstellt, die von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkt Q'' , dem Pol des Beschleunigungsplans, ausgehen. Der Maßstab dieser Darstellung, 1 cm gleich μ'' cm sec⁻², ist zweckmäßig so zu wählen, daß er zum Maßstab des Lageplans, 1 cm gleich μ cm, in einem einfachen Verhältnis steht. Für die

L. Fig. 15.



B. Fig. 16.



plan der ebenen Bewegung einer Punktgruppe, indem man die gleichzeitigen Beschleunigungen der Punkte A , B , C ... durch Strecken $Q''A''$, $Q''B''$, $Q''C''$... darstellt, die von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkt Q'' , dem Pol des Beschleunigungsplans, ausgehen.

Der Maßstab dieser Darstellung, 1 cm gleich μ'' cm sec⁻², ist zweckmäßig so zu wählen, daß er zum Maßstab des Lageplans, 1 cm gleich μ cm, in einem einfachen Verhältnis steht. Für die

folgenden Anwendungen wählen wir, wenn nichts anderes bemerkt wird, stets

$$\mu'' = \mu' = \mu.$$

Auch die Zerlegung der Beschleunigungen kann in derselben Weise ausgeführt und bezeichnet werden wie die der Geschwindigkeiten im Abschnitt 1. Wir zerlegen also z. B. die Beschleunigung $Q''B''$ des Punktes B in die Beschleunigung $Q''A''$ des Punktes A und die relative Beschleunigung $A''B''$ des Punktes B gegen den Punkt A . Der Winkel

$$\gamma' = (AB, A''B'')$$

wird der *Beschleunigungswinkel* der Strecke AB genannt. Wir zerlegen ferner die Beschleunigung $A''B''$ in die zu AB parallel und normal gerichteten Komponenten $A''b$, bB'' und bezeichnen erstere als die *relative Dehnungsbeschleunigung*, letztere als die *relative Drehbeschleunigung* des Punktes B gegen den Punkt A . Die Verhältnisse dieser Beschleunigungsstrecken zur Länge AB bilden die *Dehnungsbeschleunigung* δ' und die *Drehbeschleunigung* ω' der Strecke AB :

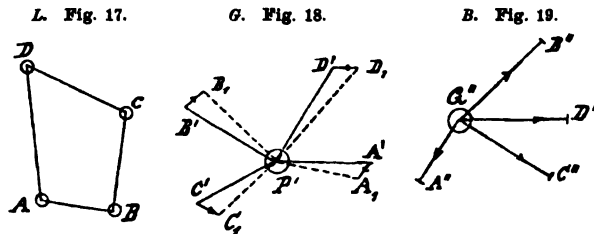
$$(10) \quad \begin{cases} \delta' = \frac{A''b}{AB} = \frac{A''B''}{AB} \cos (AB, A''B'') = \frac{A''B''}{AB} \cos \gamma' \\ \omega' = \frac{bB''}{AB} = \frac{A''B''}{AB} \sin (AB, A''B'') = \frac{A''B''}{AB} \sin \gamma'. \end{cases}$$

Sinn und Vorzeichen dieser beiden Größen, deren gemeinschaftliche Maßeinheit die sec^{-2} ist, werden durch $\cos \gamma'$ und $\sin \gamma'$ bestimmt.

Läßt man gleichzeitig mit der Bewegung der Punktgruppe $ABC\dots$, Fig. 17—19, den zugehörigen Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'\dots$ bei festliegendem Pol P' sich ändern, so bildet der Beschleunigungsplan $Q''A''B''C''\dots$ der Gruppe $ABC\dots$ zugleich den Geschwindigkeitsplan der Punktgruppe $A'B'C'\dots$

Denn werden die Geschwindigkeiten der Punkte $A, B, C\dots$ zur Zeit t durch die Strecken $P'A', P'B', P'C'\dots$ und zur Zeit $t+dt$ durch

die Strecken $P'A_1, P'B_1, P'C_1\dots$ dargestellt, so ergeben sich sowohl die Geschwindigkeiten der Punkte $A', B', C'\dots$ als auch die Beschleunigungen der Punkte $A, B, C\dots$, indem man die unendlich kleinen Strecken $A'A_1, B'B_1, C'C_1\dots$ durch die unendlich kleine Zeit dt



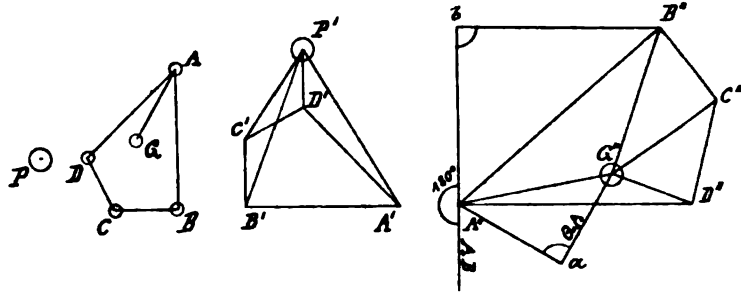
dividiert. Die Strecken sind im ersten Falle mit dem Längenmaßstabe, in dem zweiten mit dem Geschwindigkeitsmaßstabe zu messen.

7. *Der Beschleunigungsplan einer starren Punktgruppe*, Fig. 20–22. Wenn die beiden Punkte A, B , Fig. 20, starr miteinander verbunden sind, so ist zu jeder Zeit die Strecke $A'B'$, Fig. 21, normal zur

L. Fig. 20.

G. Fig. 21.

R. Fig. 22.



Strecke AB gerichtet. Die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten dieser beiden Strecken sind daher nach Größe und Sinn einander gleich:

$$(11) \quad \frac{A''b}{A'B'} = \frac{A''B''}{A'B'} \sin(A'B', A''B'') = \frac{A'B'}{AB} \sin(AB, A'B').$$

Da demnach die gleichgroßen Winkel $(AB, A'B')$, $(A'B', A''b)$ beide entweder gleich 90° oder gleich 270° sind, so ist der doppelt so große Winkel

$$(AB, A''b) = (AB, A'B') + (A'B', A''b)$$

entweder gleich 180° oder gleich 540° , d. h. der Sinn der Strecke $A''b$ ist in jedem Fall dem Sinn der Strecke AB entgegengesetzt. In Verbindung mit Gleichung 11 folgt hieraus:

$$(12) \quad A''b = A''B'' \cos(AB, A''B'') = -\frac{(A'B')^2}{AB}$$

oder

$$(13) \quad \delta' = -\omega^2,$$

d. h. die Dehnungsbeschleunigung einer starren Strecke ist in jedem Zeitpunkt gleich dem negativen Quadrat ihrer Drehgeschwindigkeit. Alle Strecken einer starren Punktgruppe haben dieselbe Drehgeschwindigkeit ω , also nach Gleichung (13) auch dieselbe Dehnungsbeschleunigung δ' . Da in jedem Zeitabschnitt alle Drehgeschwindigkeiten um gleiche Größen sich ändern, so haben alle Strecken auch gleiche Drehbeschleunigungen ω' und nach den Gleichungen (10) gleiche Beschleunigungswinkel γ' . Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(14) \quad \frac{\delta'}{\cos \gamma'} = \frac{\omega'}{\sin \gamma'} = \frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA} = \dots$$

d. h. die beiden Punktgruppen $A''B''C''D'' \dots$, $ABCD \dots$ sind geometrisch ähnlich und von gleichem Sinn:

$$(15) \quad A''B''C''D'' \dots \simeq ABCD \dots$$

Der mit der Gruppe $ABC \dots$ starr verbundene und durch die Bedingung

$$(16) \quad QABC \dots \simeq Q''A''B''C'' \dots$$

bestimmte Punkt Q heißt der *Beschleunigungspol des Lageplans*. Von allen Punkten der bewegten Ebene $ABC \dots$ ist Q der einzige, dessen augenblickliche Beschleunigung Null ist, der also in zwei aufeinander folgenden unendlich kleinen Zeitabschnitten mit unveränderter Geschwindigkeit in gerader Linie sich bewegt.

Der durch die Gleichung

$$(17) \quad \frac{\sin \gamma'}{\cos \gamma'} = \frac{\omega'}{\delta'} = -\frac{\omega'}{\omega^2}$$

bestimmte Beschleunigungswinkel

$$\gamma' = (QA, Q''A'') = (QB, Q''B'') = \dots$$

liegt, weil δ' stets negativ ist, im zweiten oder im dritten Quadranten, je nachdem ω' positiv oder negativ ist.

Die Beschleunigungsstrecke $Q''A''$ ist proportional der Strecke QA und setzt sich zusammen aus der relativen Dehnungsbeschleunigung des Punktes A gegen den Punkt Q

$$(18) \quad Q''a = \delta' QA = -\omega^2 QA$$

und der relativen Drehbeschleunigung

$$(19) \quad aA'' = \omega' QA.$$

Der Beschleunigungsplan einer starren Punktgruppe wird zufolge (15) bestimmt durch die Beschleunigungen $Q''A''$, $Q''B''$ zweier Punkte der Gruppe. Diese beiden Strecken sind voneinander abhängig durch Gleichung (12), nach der die Projektion $A''b$ der Strecke $A''B''$ auf die Gerade AB den Sinn BA und die Größe $\frac{(A'B')^2}{AB}$ haben muß. Der Plan ist ferner bestimmt, wenn außer dem Pol Q'' drei Gerade aa , bb , cc , Fig. 25, gegeben sind, auf welchen beziehungsweise die Punkte A'' , B'' , C'' liegen müssen. Man bildet zwei Vierecke $a_1b_1c_1e_1$ und $a_2b_2c_2e_2$, die folgende Bedingungen erfüllen: Die Punkte a_1 , a_2 liegen auf aa , b_1 , b_2 auf bb ; die Strecken a_1e_1 , a_2e_2 haben die Richtung und den Sinn BA , Fig. 23—25, und die gemeinschaftliche Größe

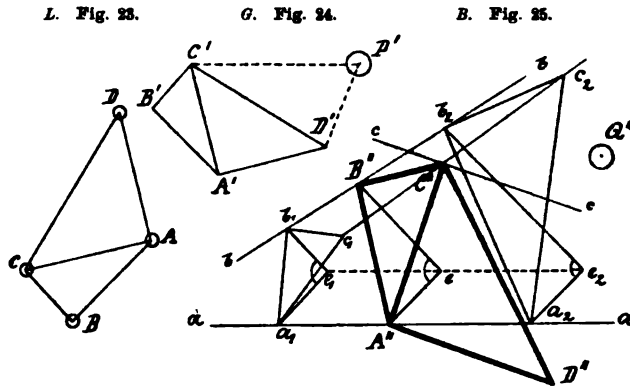
$$a_1e_1 = a_2e_2 = \frac{(A'B')^2}{AB}.$$

Die Strecken $e_1 b_1$, $e_2 b_2$ sind normal zu AB gerichtet, und endlich ist

$$a_1 b_1 c_1 \approx a_2 b_2 c_2 \approx ABC.$$

Erteilt man nun den Punkten a_1, b_1, c_1, e_1 gleichzeitig die Geschwindigkeiten $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, e_1 e_2$, so bleiben bei der Bewegung unverändert:

die Richtungen der Strecken $a_1 e_1, e_1 b_1$, die Größe der Strecke $a_1 e_1$ und die Winkel des Dreiecks $a_1 b_1 c_1$. Der Punkt C'' des Beschleunigungsplans ist also der Schnittpunkt der beiden Geraden cc und $c_1 c_2$. Man be-



stimmt ferner einen der Punkte A'', B'' aus der Bedingung

$$\frac{a_1 A''}{a_1 a_2} = \frac{b_1 B''}{b_1 b_2} = \frac{c_1 C''}{c_1 c_2}$$

und den übrigen Teil des Plans nach der Bedingung:

$$A'' B'' C'' D'' \dots \approx ABCD \dots$$

8. Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Gelenkverbindungen, Fig. 26—28. Einem Stabpolygon $ABCD$ von m Seiten entspricht im Beschleunigungsplan ein Polygon $A'' b B'' c C'' d D'' a A''$ von $2m$ Seiten. In dem vorliegenden Beispiel ist, wie in allen folgenden Fällen, der Maßstab

des Lageplans: $1 \text{ cm} = 100 \text{ cm}$,

des Geschwindigkeitsplans: $1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sec}^{-1}$,

des Beschleunigungsplans: $1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sec}^{-2}$.

Nachdem der Geschwindigkeitsplan gebildet worden ist, sind von jenen $2m$ Seiten nach Größe, Richtung und Sinn m bekannt:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} A'' b = \frac{(A' B')^2}{AB} = \frac{250^2}{200} = 313 \text{ cm sec}^{-2}; (AB, A'' b) = 180^\circ \\ B'' c = \frac{(B' C')^2}{BC} = \frac{120^2}{60} = 240 \text{ cm sec}^{-2}; (BC, B'' c) = 180^\circ \\ C'' d = \frac{(C' D')^2}{CD} = \frac{130^2}{290} = 58 \text{ cm sec}^{-2}; (CD, C'' d) = 180^\circ \\ D'' a = \frac{(D' A')^2}{DA} = \frac{80^2}{90} = 71 \text{ cm sec}^{-2}; (DA, D'' a) = 180^\circ \end{array} \right.$$

Von den übrigen m Seiten sind die *Richtungen* bekannt:

$$(21) \quad bB'' \perp AB, cC'' \perp BC, dD'' \perp CD, aA'' \perp DA.$$

Um den Beschleunigungsplan des Stabpolygons bilden zu können, müssen demnach gegeben sein: der Geschwindigkeitsplan, Fig. 27, die Beschleunigung $Q''A''$

eines Gelenkes A und die Drehbeschleunigungen von $(m-2)$ Stäben z. B.:

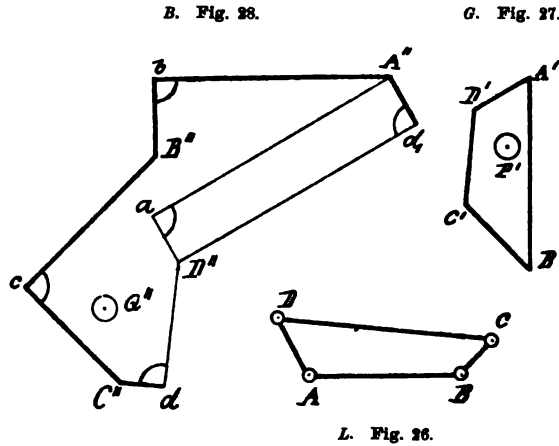
$$bB'' = +102 \text{ cm sec}^{-2};$$

$$\text{also } (AB, bB'') = 90^\circ$$

$$cC'' = +180 \text{ cm sec}^{-2};$$

$$\text{also } (BC, cC'') = 90^\circ.$$

Durch die vorstehenden Angaben sind die Punkte Q'', A'', b, B'', c, C'' bestimmt. Es ist dann aufzutragen:



$$(AD, A''d_1) = 180^\circ, \quad A''d_1 = D''a = 71 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(CD, C''d) = 180^\circ, \quad C''d = 58 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$d_1D'' \perp AD, \quad dD'' \perp CD.$$

Die gegebenen und die durch Rechnung bestimmten Strecken sind in Fig. 28 wie in den folgenden Abbildungen durch kräftigere Linien gekennzeichnet.

9. *Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen.* — Die Figuren 29 und 30 bilden eine Wiederholung der Figuren 11 und 12. AD und BCE sind also, wie im Abschnitt 5, zwei Glieder eines Stabpolygons, die in den Gelenken A, E mit den benachbarten Gliedern und durch den Schieber BC miteinander verbunden sind. Gegeben sind: der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$, Fig. 30, und die voneinander unabhängigen Beschleunigungen $Q''A'', Q''E''$ der Gelenke A, E , Fig. 31. Es ist die Aufgabe, den Beschleunigungsplan der beiden Glieder AD, BCE zu bilden.

Erstes Verfahren. Im Abschnitt 5 wurde gezeigt, daß die Schieberverbindung ersetzt werden kann durch das Gelenk M , mit dem die Glieder AD, BCE durch Stäbe MD, MC starr zu verbinden sind.

Man bestimmt also nach Abschnitt 8 die Beschleunigung $Q''M''$ des Gelenkes M , indem man aufträgt:

$$(AM, A''m) = 180^\circ; A''m = \frac{(A'M')^2}{AM} = \frac{228^2}{260} = 200 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(EM, E''m_1) = 180^\circ, E''m_1 = \frac{(E'M')^2}{EM} = \frac{300^2}{249} = 361 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$mM'' \perp A''m, \quad m_1M'' \perp E''m_1.$$

Der Beschleunigungsplan der beiden Glieder wird alsdann durch die Punktgruppen:

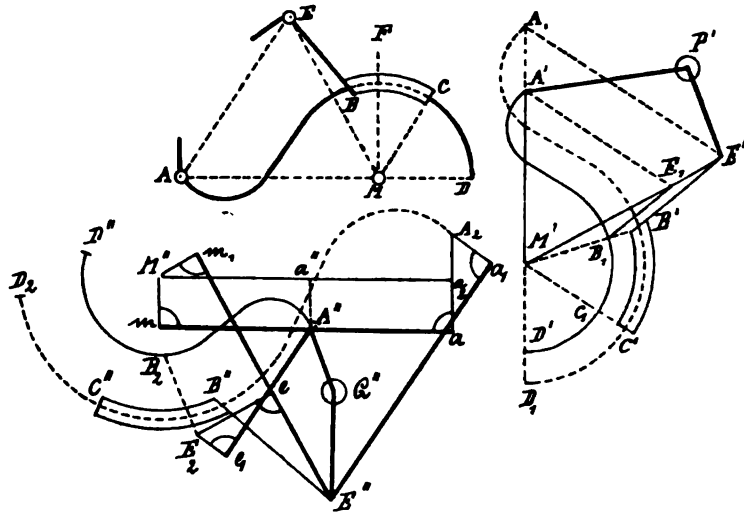
$$A''D''M'' \simeq ADM, \quad B''C'E''M'' \simeq BCEM$$

gebildet.

Zweites Verfahren. Man kann, ähnlich wie es im Abschnitt 5 mit den Geschwindigkeiten geschehen ist, die Beschleunigung $Q''A''$ eines

L. Fig. 29.

G. Fig. 30.



B. Fig. 31.

jeden Punktes A des einen Gliedes AD zusammensetzen aus der Beschleunigung $Q''A_2$, die dieser Punkt in starrer Verbindung mit dem anderen Gliede BCE annehmen würde, und einer zweiten Beschleunigung A_2A'' . Man kann ferner, wie es am Ende des Abschnittes 6 gezeigt ist, den Beschleunigungsplan $Q''A''A_2B'' \dots$, Fig. 31, ansehen als den Geschwindigkeitsplan der in Fig. 30 dargestellten Punktgruppe $A'A_1B'$. Hiernach ist $Q''A''$ die Geschwindigkeit des Punktes A' , $Q''A_2$ die Geschwindigkeit des Punktes A_1 und

$$\omega = \frac{A_2A''}{A_1A'} \sin(A_1A', A_2A'') = \frac{a_2a''}{A_1A'}.$$

die Drehgeschwindigkeit der Strecke A_1A' . Diese Größe steht in einer bemerkenswerten Beziehung zu den Drehgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 der beiden Glieder AD und BCE . Es ist nämlich im Sinne der Achse MA :

$$M''a'' = -MA \omega_1^2, \quad M''a_2 = -MA \omega_2^2$$

also

$$a_2a'' = MA(\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

Ferner ist im Sinne einer Achse FM , die mit MA den Winkel (FM, MA) gleich 90° einschließt:

$$M'A' = -MA \omega_1, \quad M'A_1 = -MA \omega_2,$$

folglich

$$A_1A' = MA(\omega_2 - \omega_1).$$

Die Drehgeschwindigkeit ω der Strecke A_1A' hat also den *algebraischen* Wert

$$(22) \quad \omega = \frac{MA(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{MA(\omega_2 - \omega_1)} = \omega_1 + \omega_2.$$

Da dieser Wert unabhängig ist von der Wahl des Punktes A , so haben *alle Strecken* $A_1A', B_1B', C_1C', D_1D', E_1E'$ eine *gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit* ω , die *gleich ist der algebraischen Summe der Drehgeschwindigkeiten* ω_1, ω_2 der beiden durch den Schieber verbundenen Glieder AD und BCE . Vermittels dieser Beziehung lassen sich die Punkte A_2, E_2 bestimmen, auch wenn die Punkte M, M', M'' nicht auf das Zeichnungsblatt fallen. Für das vorliegende Beispiel ist

$$\omega_1 = \frac{M'A'}{MA} \sin(MA, M'A') = + \frac{223}{260}$$

$$\omega_2 = \frac{M'A_1}{MA} \sin(MA, M'A_1) = + \frac{313}{260}$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = + \frac{541}{260}$$

Da dieser Wert positiv ist, so sind die Winkel

$$(A'A_1, A''a) = (E'E_1, E''e) = 90^\circ.$$

Ferner ist aufzutragen:

$$A''a = a''a_2 = A'A_1 \omega = 85 \frac{541}{260} = 177 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$E''e = E'E_1 \omega = 80 \frac{541}{260} = 166 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(EA, E''a_1) = (AE, A''e_1) = 180^\circ$$

$$E''a_1 = \frac{(E'A_1)^2}{EA} = \frac{313^2}{260} = 377 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$A''e_1 = \frac{(A'E_1)^2}{AE} = \frac{230^2}{260} = 203 \text{ cm sec}^{-2}$$

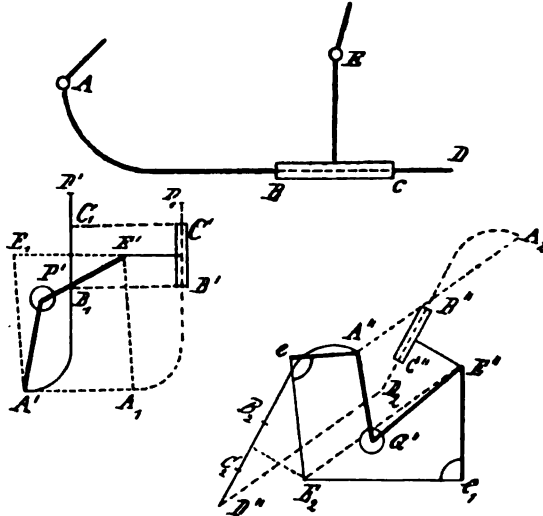
$$aA_2 \perp A''a, \quad eE_2 \perp E''e, \quad a_1A_2 \perp E''a_1, \quad e_1E_2 \perp A''e_1.$$

Nachdem hierdurch die Punkte A_2, E_2 bestimmt worden sind, kann der Beschleunigungsplan $Q''A''B''C''D''E''$ gebildet werden nach der Bedingung

$$A''D''B_2C_2E_2 \approx A_2D_2B''C''E'' \approx ADBCE.$$

Wenn der den Schieber führende Stabteil BCD , Fig. 32–34, gerade ist, so vereinfacht sich das Verfahren, weil die Drehgeschwindig-

L. Fig. 32.



G. Fig. 33.

B. Fig. 34.

keiten ω_1, ω_2 der beiden Glieder AD, BCE gleich groß sind, und also die gemeinsame Drehgeschwindigkeit der Strecken $A_1A', B_1B', C_1C', D_1D', E_1E'$ (23) $\omega = 2\omega_1 = 2\omega_2$

wird. Da ferner auch die Drehbeschleunigungen und die Beschleunigungswinkel für beide Glieder gleich groß sind, so sind die Punktgruppen $A''D''B_2C_2E_2, A_2D_2B''C''E''$ kongruent und können durch Parallelverschiebung zur

Deckung gebracht werden. Die Strecken $A''A_2, D''D_2, B_2B'', C_2C'', E_2E''$ sind daher gleich groß und gleich gerichtet, und von den beiden Punkten A_2, E_2 braucht nur einer, z. B. E_2 , bestimmt zu werden. Im vorliegenden Beispiel ist

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{A'E_1}{AE} \sin(AE, A'E_1) = -\frac{180}{360} = -\frac{1}{2} \text{ sec}^{-1},$$

also

$$\omega = 2\omega_1 = -1 \text{ sec}^{-1}.$$

Folglich ist aufzutragen:

$$(E'E_1, E''e_1) = 270^\circ$$

$$E''e_1 = E'E_1 \omega = E'E_1 = 150 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(AE, A''e) = 180^\circ$$

$$A''e = \frac{(A'E_1)^2}{AE} = \frac{180^2}{360} = 90 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$e_1E_2 \perp E''e_1, \quad eE_2 \perp A''e.$$

Man bestimmt dann A_2 , indem man der Strecke $A''A_2$ Größe, Richtung und Sinn der Strecke E_2E'' gibt, und bildet endlich die Punktgruppen:

$$A''D''B_2C_2E_2 \approx A_2D_2B''C''E'' \approx ADBCE.$$

10. Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne ebener Getriebe.

Eine in der Ebene sich bewegende Stabverbindung, die so gestützt und so geführt wird, daß in jeder Lage ihr Geschwindigkeitsplan bestimmt ist, wird ein *ebenes Getriebe* genannt. In der Regel besteht die Stützung und die Führung des Getriebes darin, daß ein Glied festgestellt ist, während ein zweites Glied um einen Punkt des festgestellten Gliedes mit gegebener Drehgeschwindigkeit geführt wird. Diese Anordnung ist jedoch nicht wesentlich; es können anstatt dessen auch zwei Glieder auf vorgeschriebenen Bahnen mit gegebenen Geschwindigkeiten geführt werden.

Die Geschwindigkeiten in zwei unendlich nahe auf einander folgenden Zeitpunkten sind durch die Drehgeschwindigkeiten der geführten Glieder bestimmt. Um den *Beschleunigungsplan* des Getriebes für einen Zeitpunkt darstellen zu können, müssen also außer den Geschwindigkeiten aller Glieder noch die Drehbeschleunigungen der geführten Glieder gegeben sein.

Bei der Bildung der Geschwindigkeitspläne und der Beschleunigungspläne ebener Getriebe kommen in erster Linie die in den vorstehenden Abschnitten beschriebenen Gesetze zur Anwendung; außerdem noch einige Regeln über die Zusammensetzung mehrerer Bewegungen, für deren Darstellung wir folgende Bezeichnungen anwenden:

Die Glieder des Getriebes werden mit den Nummern 0, 1, 2, 3, ..., verschiedene Bewegungen des Getriebes mit I, II, III ... bezeichnet. ω_{mn} und ω'_{mn} bezeichnen die Drehgeschwindigkeit und die Drehbeschleunigung des Gliedes m in der Bewegung n . l_1, l_2, l_3, \dots sind die Längen der Seiten eines Stabpolygons, dem die Glieder 1, 2, 3, ... angehören. Zur Darstellung einer *geometrischen* Summe benutzen wir das Summierungszeichen \oplus .

Wir erinnern daran, daß der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$, Fig. 26 und 27, eines Stabpolygons $ABCD$, dem die Glieder 1, 2, 3, 4 angehören, nur die *eine* Bedingung zu erfüllen hat:

$$(24) \quad l_1\omega_1 \oplus l_2\omega_2 \oplus l_3\omega_3 \oplus l_4\omega_4 = 0,$$

d. h. die Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ von den Längen $l_1\omega_1, l_2\omega_2, \dots$ und den gegebenen Richtungen

$$A'B' \perp AB, \quad B'C' \perp BC \text{ usf.}$$

bilden ein *geschlossenes* Polygon und haben daher eine geometrische Summe gleich Null. Ebenso hat der Beschleunigungsplan des Stab-

polygons $Q''A''bB''cC''dD''aA''$, Fig. 28, nur *eine* Bedingung zu erfüllen:

$$(25) \quad l_1\omega_1^2 + l_2\omega_2^2 + l_3\omega_3^2 + l_4\omega_4^2 + l_1\omega_1' + l_2\omega_2' + l_3\omega_3' + l_4\omega_4' = 0,$$

d. h. die Seiten $A''b$, $B''c$, $C''d$, $D''a$, von den Größen $l_1\omega_1^2$, $l_2\omega_2^2$, $l_3\omega_3^2$, $l_4\omega_4^2$, deren Richtung und Sinn durch BA , CB , DC , AD gegeben sind, müssen in Verbindung mit den Seiten bB'' , cC'' , dD'' , aA'' von den Richtungen

$$bB'' \perp AB, \quad cC'' \perp BC \dots$$

und den Längen

$$bB'' = l_1\omega_1', \quad cC'' = l_2\omega_2' \dots$$

ein *geschlossenes* Polygon bilden. Diese Bedingungen gelten in gleicher Form auch für Stabpolygone mit Schieberverbindungen, wenn man nach den Abschnitten 5 und 9 die Schieber durch Gelenke ersetzt.

1. Bezeichnet $P'A'B'C' \dots$ den Geschwindigkeitsplan einer Bewegung I der Stabverbindung $ABC \dots$ und P_1 irgend einen Punkt der Ebene, so ist $P_1A'B'C' \dots$ der Geschwindigkeitsplan einer *möglichen* Bewegung II, d. h. einer Bewegung, die von der Stabverbindung gestattet wird. Denn die Bedingung (24) wird von jedem Stabpolygon für beide Bewegungen in gleicher Weise erfüllt. Die Bewegung II entsteht, indem man die Bewegung I zusammensetzt mit einer gleichzeitigen Parallelverschiebung, die allen Punkten die gemeinschaftliche Geschwindigkeit P_1P' erteilt.

2. Bezeichnet $Q''A''B''C'' \dots$ den Beschleunigungsplan einer Bewegung I der Stabverbindung $ABC \dots$ und Q_2 irgend einen Punkt der Ebene, so ist $Q_2A''B''C'' \dots$ der Beschleunigungsplan einer *möglichen* Bewegung II des Getriebes. Die Bewegung II entsteht, indem die Bewegung I zusammengesetzt wird mit einer Parallelverschiebung von beliebiger Geschwindigkeit und der Beschleunigung Q_2Q'' . Die Bewegung II ist möglich, weil die Bedingungen (25) für beide Bewegungen I und II gleich lauten.

3. (Vergl. Beispiel 5.) Bezeichnen $P_1'A_1'B_1'C_1' \dots$ und $P_2'A_2'B_2'C_2' \dots$ die Geschwindigkeitspläne zweier Bewegungen I, II der Stabverbindung $ABC \dots$, also

$$\omega_{01}, \quad \omega_{11}, \quad \omega_{21}, \quad \omega_{31} \dots$$

und

$$\omega_{02}, \quad \omega_{12}, \quad \omega_{22}, \quad \omega_{32} \dots$$

die Drehgeschwindigkeiten der Glieder 0, 1, 2, 3 ... in diesen beiden Bewegungen, ferner ξ_1 , ξ_2 zwei beliebige positive oder negative Zahlen,

so wird der Geschwindigkeitsplan $P'_3A'_3B'_3C'_3 \dots$ einer möglichen Bewegung III gebildet, indem man

$$\begin{aligned} P'_3A'_3 &= \xi_1 P'_1A'_1 + \xi_2 P'_2A'_2 \\ P'_3B'_3 &= \xi_1 P'_1B'_1 + \xi_2 P'_2B'_2 \text{ usf.} \end{aligned}$$

aufträgt. Die Drehgeschwindigkeiten der Glieder 0, 1, 2 ... erhalten in der Bewegung III die Größen

$$\begin{aligned} \omega_{03} &= \xi_1 \omega_{01} + \xi_2 \omega_{02} \\ \omega_{13} &= \xi_1 \omega_{11} + \xi_2 \omega_{12} \\ \omega_{23} &= \xi_1 \omega_{21} + \xi_2 \omega_{22} \text{ usf.} \end{aligned}$$

Ist ξ negativ, so ist der Sinn der Drehgeschwindigkeit $\xi\omega$ dem Sinn von ω entgegengesetzt. Der Beweis der vorstehenden Behauptungen ergibt sich, indem man für jedes Stabpolygon die Bedingung (24) für alle drei Bewegungen bildet und beachtet, daß die Bedingung der Bewegung III unmittelbar aus den Bedingungen I und II zu folgern ist. Sind die Drehgeschwindigkeiten ω_{03} , ω_{13} *zweier Glieder* 0, 1 in der Bewegung III gegeben, so sind die beiden Zahlen ξ_1 , ξ_2 durch obige Gleichungen bestimmt:

$$(26) \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{\omega_{03} \omega_{12} - \omega_{13} \omega_{02}}{\omega_{01} \omega_{12} - \omega_{11} \omega_{02}} \\ \xi_2 = \frac{\omega_{03} \omega_{11} - \omega_{13} \omega_{01}}{\omega_{02} \omega_{11} - \omega_{12} \omega_{01}} \end{cases}$$

Bei Anwendung dieser Zusammensetzung kann man in der Regel als Bewegung II eine Drehung aller Glieder in starrer Verbindung mit einander und zwar mit der Drehgeschwindigkeit

$$+1 = \omega_{02} = \omega_{12} = \omega_{22} = \dots$$

wählen; dann wird

$$(27) \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{\omega_{03} - \omega_{13}}{\omega_{01} - \omega_{11}} \\ \xi_2 = \frac{\omega_{03} \omega_{11} - \omega_{13} \omega_{01}}{\omega_{11} - \omega_{01}} \end{cases}$$

4. (vergl. Beispiel 6.) Für eine Stabverbindung sei gegeben die Bewegung I durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$\omega_{01}, \omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31} \dots$$

und ihre Drehbeschleunigungen:

$$\omega'_{01}, \omega'_{11}, \omega'_{21}, \omega'_{31} \dots,$$

Ferner die Bewegung II durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$0 = \omega_{02} = \omega_{12} = \omega_{22} = \omega_{32} = \dots$$

und ihre Drehbeschleunigungen:

$$\omega'_{02} = \alpha \omega_{01}, \quad \omega'_{12} = \alpha \omega_{11}, \quad \omega'_{22} = \alpha \omega_{21} \quad \text{usf.}$$

α bezeichnet eine beliebige positive oder negative Drehgeschwindigkeit. Eine solche Bewegung nennt man eine *Anfangsbewegung*, weil sie an den Ruhezustand sich anschließt. Sie ist möglich, weil der Beschleunigungsplan der Bewegung II dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I geometrisch ähnlich ist, und weil infolgedessen die Bedingung (25) für jedes Stabpolygon erfüllt ist.

Gegeben sei endlich die Bewegung III, ebenfalls eine Anfangsbewegung, durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$0 = \omega_{03} = \omega_{13} = \omega_{23} = \omega_{33} = \dots$$

und durch die Drehbeschleunigungen

$$\alpha' = \omega'_{03} = \omega'_{13} = \omega'_{23} = \omega'_{33} = \dots$$

Der Beschleunigungsplan dieser Bewegung III ist dem *Lageplan* geometrisch ähnlich; es ist also für jedes Stabpolygon die Bedingung (25) erfüllt.

Es soll eine Bewegung IV gebildet werden, die in ihren Drehgeschwindigkeiten mit der Bewegung I übereinstimmt:

$$\omega_{04} = \omega_{01}, \quad \omega_{14} = \omega_{11}, \quad \omega_{24} = \omega_{21} \quad \text{usf.}$$

während für zwei beliebige Glieder 0 und 1 die Drehbeschleunigungen ω'_{04} , ω'_{14} vorgeschrieben sind. Die Bewegung IV entsteht durch Zusammensetzung der Bewegungen I, II, III. Hierdurch wird:

$$\begin{aligned} \omega'_{04} &= \omega'_{01} + \alpha \omega_{01} + \alpha' \\ \omega'_{14} &= \omega'_{11} + \alpha \omega_{11} + \alpha' \\ \omega'_{24} &= \omega'_{21} + \alpha \omega_{21} + \alpha' \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

Die Drehgeschwindigkeit α und die Drehbeschleunigung α' werden durch die ersten beiden Gleichungen bestimmt:

$$(28) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\omega'_{04} - \omega'_{01} + \omega'_{11} - \omega'_{14}}{\omega_{01} - \omega_{11}} \\ \alpha' = \omega'_{04} - \omega'_{01} - \alpha \omega_{01} \end{cases}$$

5. (Vergl. Beispiel 8.) Wenn einem Stabe eines Getriebes, z. B. dem Stabe 3, die *Eigenschaft der Dehnbarkeit* beigelegt wird, so erhält die Stabverbindung einen höheren Grad der Beweglichkeit, sodaß eine ihrer Bewegungen erst bestimmt wird, wenn die Drehgeschwindigkeiten und Drehbeschleunigungen von *drei* Gliedern, z. B. der Glieder 0, 1, 2,

gegeben sind. Es seien die Geschwindigkeiten der Bewegungen I und II bestimmt durch die gegebenen Größen

$$\omega_{01} = 0, \quad \omega_{11} = 0, \quad \omega_{21} = +1 \text{ sec}^{-1}$$

und

$$\omega_{02} = 0, \quad \omega_{12} = +1 \text{ sec}^{-1}, \quad \omega_{22} = 0.$$

Aus den Geschwindigkeitsplänen dieser beiden Bewegungen können die Dehnungsgeschwindigkeiten δ_{21} , δ_{22} des dehnbaren Stabes 3 entnommen werden.

Es sei nun die Aufgabe, die Geschwindigkeiten einer Bewegung III zu bestimmen, für die vorgeschrieben ist: die Drehgeschwindigkeit des Gliedes 0

$$\omega_{03} = 0,$$

ferner die Drehgeschwindigkeit ω_{13} des Gliedes 1 und endlich die Starrheit des Stabes 3

$$\delta_{33} = 0.$$

Diese Bewegung III kann also von dem *Getriebe* ausgeführt werden. Sie wird gebildet durch Zusammensetzung der ξ_1 -fachen Geschwindigkeiten der Bewegung I mit den ξ_2 -fachen Geschwindigkeiten der Bewegung II, wenn die beiden Zahlen ξ_1 , ξ_2 folgende zwei Bedingungen erfüllen: Die Drehgeschwindigkeit des Gliedes 1 muß die vorgeschriebene Größe ω_{13} erhalten:

$$\omega_{13} = \xi_1 \omega_{11} + \xi_2 \omega_{12} = \xi_2 \text{ sec}^{-1}$$

oder

$$(29) \quad \xi_2 = \frac{\omega_{13}}{1 \text{ sec}^{-1}}.$$

Ferner muß die Dehnungsgeschwindigkeit des Stabes 3 gleich Null werden:

$$\delta_{33} = \xi_1 \delta_{31} + \xi_2 \delta_{32} = 0,$$

woraus folgt:

$$(30) \quad \xi_1 = -\frac{\delta_{32}}{\delta_{31}} \frac{\omega_{13}}{1 \text{ sec}^{-1}}.$$

Die Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III haben demnach die Größen:

$$\omega_{03} = \xi_1 \omega_{01} + \xi_2 \omega_{02} = 0$$

$$\omega_{13} = \xi_1 \omega_{11} + \xi_2 \omega_{12} = \xi_2$$

$$\omega_{23} = \xi_1 \omega_{21} + \xi_2 \omega_{22} \text{ usw.}$$

Es sei ferner die Aufgabe, die *Beschleunigungen* der Bewegung III zu bestimmen, wenn vorgeschrieben ist: die Drehbeschleunigung ω'_{13} des Gliedes 1 und diejenige des Gliedes 0.

$$\omega'_{03} = 0.$$

Man erteilt wieder einem Stabe 3 die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmt durch einen Plan die Beschleunigungen der Bewegung IV, deren Geschwindigkeiten mit denen der Bewegung III übereinstimmen

$$\omega_{04} = \omega_{03} = 0, \quad \omega_{14} = \omega_{13}, \quad \omega_{24} = \omega_{23} \quad \text{usf.},$$

während die Drehbeschleunigungen der drei Glieder 0, 1, 2 die Größen

$$\omega'_{04} = 0, \quad \omega'_{14} = \omega'_{13}, \quad \omega'_{24} = 0$$

erhalten. Mit V bezeichnen wir ferner eine Bewegung, deren Geschwindigkeiten alle gleich Null sind:

$$0 = \omega_{05} = \omega_{15} = \omega_{25} \dots$$

und deren Drehbeschleunigungen den *bekannten* Drehgeschwindigkeiten der Bewegung I proportional sind:

$$\omega'_{05} = \alpha \omega_{01} = 0$$

$$\omega'_{15} = \alpha \omega_{11} = 0$$

$$\omega'_{25} = \alpha \omega_{21} = \alpha \sec^{-2}$$

$$\omega'_{35} = \alpha \omega_{31} \quad \text{usf.}$$

Die Beschleunigungen der vorgeschriebenen Bewegung III entstehen durch Zusammensetzung der beiden Bewegungen IV, V, wenn die unbekannte Drehgeschwindigkeit α so gewählt wird, daß die Dehnungsbeschleunigung des Stabes 3 die einem *starr*en Stabe entsprechende Größe erhält. Die Drehgeschwindigkeit dieses Stabes hat die Größe

$$\omega_{33} = \xi_1 \omega_{31} + \xi_2 \omega_{33}.$$

Seine Dehnungsbeschleunigung δ'_{34} in der Bewegung IV kann aus dem Beschleunigungsplan dieser Bewegung entnommen werden, während seine Dehnungsbeschleunigung in der Bewegung V durch die Gleichung

$$\delta'_{35} = \alpha \delta_{31}$$

aus dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I ermittelt werden kann. Die Größe α wird demnach bestimmt durch die Gleichung:

$$\delta'_{33} = -\omega_{33}^2 = \delta'_{34} + \delta'_{35} = \delta'_{34} + \alpha \delta_{31}$$

oder

$$(31) \quad \alpha = -\frac{\omega_{33}^2 + \delta'_{34}}{\delta_{31}}.$$

Nachdem α bestimmt worden ist, ergeben sich die Drehbeschleunigungen der Bewegung III durch die Gleichungen:

$$\omega'_{03} = \omega'_{04} + \alpha \omega_{01} = 0$$

$$\omega'_{13} = \omega'_{14} + \alpha \omega_{11} = \omega'_{13}$$

$$\omega'_{23} = \omega'_{24} + \alpha \omega_{21}$$

$$\omega'_{33} = \omega'_{34} + \alpha \omega_{31} \quad \text{usf.}$$

11. Beispiele und Aufgaben. — Die vorstehenden Regeln sollen an einer Reihe von Beispielen erläutert werden. Wenn nichts anderes bemerkt wird, ist der Maßstab

des Lageplans L : 1 cm = 100 cm

des Geschwindigkeitsplans G : 1 cm = 100 cm sec⁻¹

des Beschleunigungsplans B : 1 cm = 100 cm sec⁻².

In den Lageplänen sind die Gelenke durch kleine Kreise, die ruhenden Gelenke durch Doppelkreise bezeichnet. In den Geschwindigkeitsplänen und den Beschleunigungsplänen sind die Pole P' und Q'' durch Kreise, rechte Winkel durch

Viertelkreise, die gegebenen und durch Rechnung bestimmten Strecken durch kräftigere Linien bezeichnet.

Beispiel 1. Das Getriebe Fig. 35 besteht aus den vier Gliedern AB , AE , ED , DC , die in dieser Reihenfolge mit 0, 1, 2, 3 bezeichnet sind. Das Glied 0 ist festgestellt:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega'_0 = 0,$$

das Glied 1 wird geführt mit der gegebenen Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -1,08 \text{ sec}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = +0,33 \text{ sec}^{-2}.$$

Der Geschwindigkeitsplan Fig. 36. Die Punkte A' , B' fallen mit dem Pol P' zusammen, weil die Punkte A , B ruhen. Die Strecke $A'E'$ ist nach Größe, Richtung und Sinn durch die gegebene Drehgeschwindigkeit ω_1 bestimmt:

$$\frac{A'E'}{AE} \sin(AE, A'E') = -1,08 \text{ sec}^{-1};$$

demnach ist der Winkel

$$(AE, A'E') = 270^\circ$$

und

$$A'E' = 1,08 \cdot AE = 1,08 \cdot 197 = 213 \text{ cm sec}^{-1}.$$

Die Punkte C' , D' fallen zusammen, weil alle Punkte des Schiebers CD dieselbe, zum ruhenden Stab AB parallel gerichtete Geschwindigkeit $P'C'$ haben. Man bestimmt also den Punkt $C'D'$, indem man

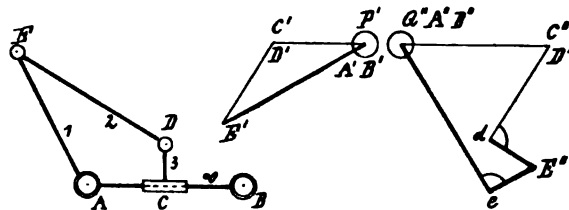
$$P'C' \parallel AB \text{ und } E'D' \perp ED$$

zieht.

L. Fig. 35.

G. Fig. 36.

B. Fig. 37.



Der Beschleunigungsplan Fig. 37. Die den ruhenden Punkten A, B entsprechenden Punkte A'', B'' fallen mit dem Pol Q'' zusammen. Ferner werden die Strecken $A''e, eE''$ durch die gegebenen Größen ω_1, ω_1' bestimmt

$$\frac{A''E''}{AE} \cos(AE, A''E'') = -\omega_1^2$$

$$\frac{A''E''}{AE} \sin(AE, A''E'') = \omega_1',$$

folglich ist

$$(AE, A''e) = 180^\circ, \quad A''e = AE \omega_1^2 = 197 \cdot 1,08^2 = 230 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(AE, eE'') = 90^\circ, \quad eE'' = AE \omega_1' = 0,33 \cdot 197 = 65 \text{ cm sec}^{-2}.$$

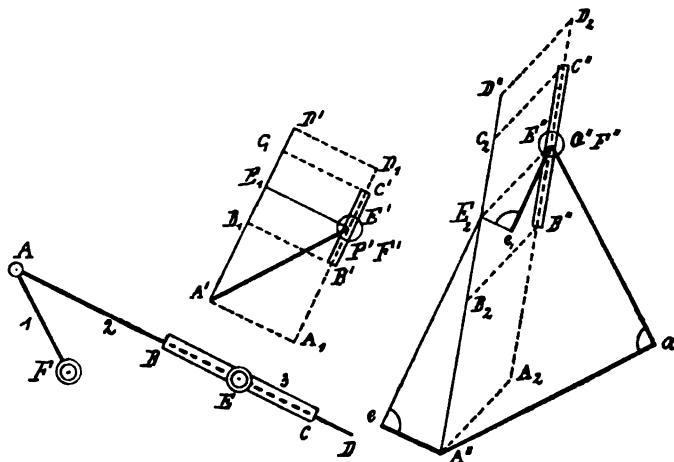
Die Punkte C'', D'' fallen zusammen, weil alle Punkte des Schiebers CD dieselbe zu AB parallel gerichtete Beschleunigung $Q''C''$ haben. Durch diese Bedingung und durch die Dehnungsbeschleunigung des Stabes ED ist der Punkt $C''D''$ bestimmt:

$$(ED, E''d) = 180^\circ, \quad E''d = \frac{(E'D')^2}{ED} = \frac{125^2}{234} = 67 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$dD'' \perp E''d, \quad Q''D'' \parallel AB.$$

G. Fig. 39.

B. Fig. 40.



L. Fig. 38.

Beispiel 2, Fig. 38—40. Das Getriebe besteht aus dem ruhenden Gliede EF , dem mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -1,40 \text{ sec}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega_1' = -2,14 \text{ sec}^{-2}$$

geführten Gliede FA , dem Stabe AD und dem um das Gelenk E sich drehenden Schieber BC .

Der Geschwindigkeitsplan Fig. 39. Da die Gelenke E, F ruhen, so fallen die Punkte E', F' mit dem Pol P' zusammen. Der Punkt A' wird bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{F'A'}{FA} \sin(FA, F'A') = \omega_1 = -1,40 \text{ sec}^{-1},$$

also ist

$$(FA, F'A') = 270^\circ, \quad F'A' = FA \omega_1 = 150 \cdot 1,40 = 210 \text{ cm sec}^{-1}.$$

Im übrigen ist die Bildung des Geschwindigkeitsplans vollständig im Abschnitt 5 beschrieben. Man bestimmt hiernach die Geschwindigkeit $P'E_1$ des vom ruhenden Gelenke E gedeckten Punktes des Stabes AD , indem man

$$A'E_1 \perp AE, \quad E'E_1 \parallel AD$$

zieht. Dann entsteht der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$, indem man die Punktgruppen

$$A'B_1C_1D'E_1 \simeq ABCDE$$

und

$$A_1B'C'D_1E' \cong A'B_1C_1D'E_1$$

bildet. Die relative Geschwindigkeit der Punkte des Stabes AD gegen den Schieber BC wird durch die Strecken

$$A_1A' = D_1D' = 120 \text{ cm sec}^{-1}$$

dargestellt.

Der Beschleunigungsplan Fig. 40. Die Punkte E'', F'' fallen mit dem Pol Q'' zusammen. Ferner wird der Punkt A'' bestimmt durch die gegebenen Größen ω_1 und ω_1' :

$$(FA, F''a) = 180^\circ$$

$$F''a = FA \omega_1^2 = 150 \cdot 1,4^2 = 294 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(FA, aA'') = 270^\circ$$

$$aA'' = FA \omega_1' = 150 \cdot 2,14 = 321 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Der Punkt E_2 wird nach Abschnitt 9 bestimmt:

$$(AE, A''e) = 180^\circ$$

$$A''e = \frac{(A'E_1)^2}{AE} = \frac{170^2}{380} = 88 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(E'E_1, E''e_1) = (AD, A'D) = 270^\circ$$

$$E''e_1 = 2E'E_1 \frac{A'E_1}{AE} = 2 \cdot 120 \frac{170}{380} = 124 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$eE_2 \perp A''e, \quad e_1E_2 \perp E''e_1.$$

Nachdem die Strecke $A''A_2$ nach Größe, Richtung und Sinn gleich E_2E'' aufgetragen ist, können die Punktgruppen

$$A''D''B_2C_2E_2 \approx A_2D_2B''C''E'' \approx ADBCE$$

und hierdurch der Beschleunigungsplan $Q''A''D''B''C''E''$ gebildet werden.

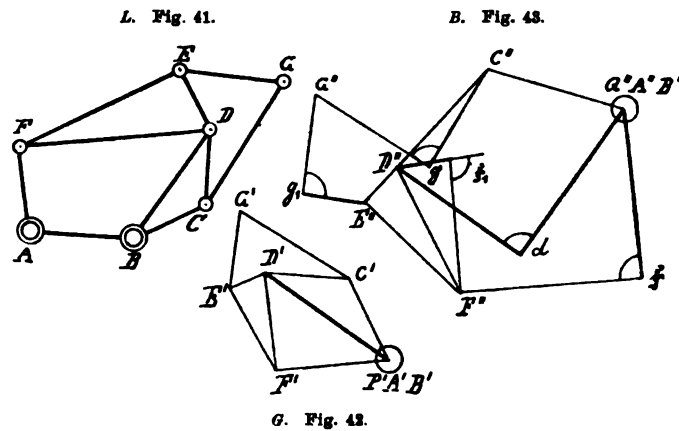
Beispiel 3. Fig. 41—43. In dem sechsgliedrigen Getriebe $ABCDEF$ G, Fig. 41, ist das Glied AB festgestellt, während das Glied BCD mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -1,17 \text{ sec}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = -1,18 \text{ sec}^{-2}$$

geführt werden soll. Da die Stabvierecke $ABDF$ und $CDEG$ in dieser Reihenfolge nur je zwei Glieder mit unbekannten Drehgeschwindigkeiten



enthalten, so kommen die Regeln der Abschnitte 4 und 8 zur Anwendung, wie folgt:

Der Geschwindigkeitsplan Fig. 42.

$$(BD, B'D') = 270^\circ$$

$$B'D' = BD \omega_1 = 173 \cdot 1,17 = 202 \text{ cm sec}^{-1}$$

$$A'F' \perp AF, \quad D'F' \perp DF$$

$$B'C'D' \approx BCD, \quad D'E'F' \approx DEF$$

$$C'G' \perp CG, \quad E'G' \perp EG.$$

Der Beschleunigungsplan Fig. 43.

$$(BD, B''d) = 180^\circ$$

$$B''d = BD \omega_1^2 = 173 \cdot 1,17^2 = 236 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(BD, dD'') = 270^\circ$$

$$dD'' = BD \omega' = 173 \cdot 1,18 = 204 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(AF, A''f) = 180^\circ$$

$$A''f = \frac{(A'F')^2}{AF} = \frac{156^2}{108} = 225 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(DF, D''f_1) = 180^\circ$$

$$D''f_1 = \frac{(D'F')^2}{DF} = \frac{132^2}{250} = 70 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$fF'' \perp A''f, \quad f_1F'' \perp D''f_1$$

$$B''C''D'' \simeq BCD, \quad D''F''E'' \simeq DFE$$

$$(CG, C''g) = 180^\circ$$

$$C''g = \frac{(C'G')^2}{CG} = \frac{172^2}{190} = 155 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(EG, E''g_1) = 180^\circ$$

$$E''g_1 = \frac{(E'G')^2}{EG} = \frac{108^2}{140} = 80 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$gG'' \perp C''g, \quad g_1G'' \perp E''g_1.$$

Beispiel 4. In dem achthgliedrigen Getriebe Fig. 44 ist das Glied AB festgestellt, während das Glied BCD mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -0,95 \text{ sec}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega_1' = -0,63 \text{ sec}^{-2}$$

geführt werden soll. Das Getriebe enthält nur ein Stabviereck $ABDF$, alle übrigen Stabpolygone enthalten, abgesehen von den starren Stabdreiecken, mehr als vier Seiten. Die Pläne für den Teil $ABCDEFGF$ des Getriebes werden wie im Beispiel 3 gebildet; die Beschreibung braucht hier nicht wiederholt zu werden.

Im *Geschwindigkeitsplan* Fig. 45 sind darauf die drei Geraden

$$C'M_1K' \perp CMK$$

$$G'L_1H' \perp GLH$$

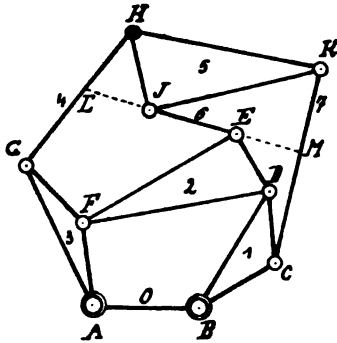
$$L_1I'E'M_1 \perp LIEM$$

zu ziehen und auf diesen nach Abschnitt 2 die dem starren Dreieck KHI entsprechenden Punkte K' , H' , I' zu bestimmen. Statt dessen kann man auch die Punktgruppe

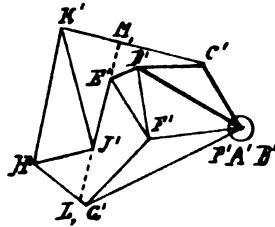
$$L_1 I' M_1 K' H' \approx LIMKH$$

bilden, da den Dreiecken LHI , HIK , IKM die ähnlichen Dreiecke $L_1 H' I'$, $H' I' K'$, $I' K' M_1$ entsprechen. Der Geschwindigkeitsplan

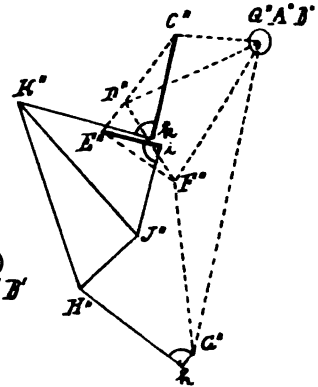
L. Fig. 44.



G. Fig. 45.



B. Fig. 46.



wird *unbestimmt*, wenn die drei Geraden $C'K'$, $G'H'$, $E'I'$ in *einem* Punkte sich schneiden.

Im *Beschleunigungsplan*, Fig. 46, sind die Winkel

$$(CK, C''k) = (GH, G''h) = (EI, E''i) = 180^\circ,$$

darauf die Strecken:

$$C''k = \frac{(C'K')^2}{CK} = \frac{195^2}{265} = 143 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$G''h = \frac{(G'H')^2}{GH} = \frac{85^2}{228} = 32 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$E''i = \frac{(E'I')^2}{EI} = \frac{100^2}{120} = 83 \text{ cm sec}^{-2}$$

und die Geraden:

$$kK'' \perp C''k, \quad hH'' \perp G''h, \quad iI'' \perp E''i$$

aufzutragen. Die Lage des Dreiecks $K''H''I''$ konnte darauf durch das im Abschnitt 7 und in den Figuren 23—25 beschriebene Verfahren bestimmt werden.

Beispiel 5. In dem Getriebe des vorigen Beispiels, Fig. 44, soll das Glied 4 (GH) festgestellt und das Glied 1 (BCD) mit der Drehgeschwindigkeit $+0,67 \text{ sec}^{-1}$ geführt werden. Es sind die Geschwindig-

keiten dieser Bewegung III zu bestimmen. Man bildet die Bewegung III nach Abschnitt 10, 3 durch Zusammensetzung der ξ_1 -fachen Geschwindigkeiten der im vorigen Beispiel bestimmten Bewegung I mit den ξ_2 -fachen Geschwindigkeiten der Bewegung II, in der das Getriebe, ohne seine Form zu ändern, mit der Drehgeschwindigkeit + 1 um irgend einen festen Punkt sich dreht. In der Bewegung I haben die Glieder 1 und 4 die Drehgeschwindigkeiten

$$\omega_{11} = -0,95$$

und

$$\omega_{41} = \frac{G'H'}{GH} \sin(GH, G'H') = -\frac{85}{228} = -0,37.$$

Damit

$$\xi_1 \omega_{11} + \xi_2 = +0,67$$

$$\xi_1 \omega_{41} + \xi_2 = 0$$

werde, ist

$$\xi_1 = \frac{+0,67}{-0,95 + 0,37} = -1,15$$

und

$$\xi_2 = -\xi_1 \omega_{41} = -1,15 \cdot 0,37 = -0,42$$

zu wählen. Die folgende Tabelle enthält die aus Fig. 45 entnommenen Drehgeschwindigkeiten ω_1 der Bewegung I und die nach der Formel

$$\omega_s = -1,15 \omega_1 - 0,42$$

berechneten Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III

Glied	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_1	0	-0,95	-0,38	-1,17	-0,37	-0,69	-0,83	-0,74
ω_s	-0,42	+0,67	+0,02	+1,35	0	+0,37	+0,53	+0,43

Will man den Geschwindigkeitsplan der Bewegung III auftragen, so genügt die Berechnung von *zwei* Drehgeschwindigkeiten, z. B.

$$\omega_{33} = +1,35, \quad \omega_{53} = +0,37.$$

Der Pol des Geschwindigkeitsplans P' fällt selbstverständlich mit den Punkten G', H' zusammen.

Beispiel 6. Das Getriebe, Fig. 44, hat bei der durch die Fig. 45 und 46 dargestellten Bewegung I folgende Drehgeschwindigkeiten ω_1 und Drehbeschleunigungen ω'_1 .

Glied	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_1	0	-0,95	-0,38	-1,17	-0,37	-0,69	-0,83	-0,74
ω'_1	0	-0,63	-0,45	-1,33	-0,75	-0,88	-0,98	-0,70
ω'_4	0	+1,27	+0,32	+1,01	-0,01	+0,50	+0,68	+0,78

Es soll die Bewegung IV des Getriebes gebildet werden, deren Geschwindigkeiten mit der Bewegung I übereinstimmen, während die Drehbeschleunigung des Gliedes 5 die Größe

$$\omega'_{54} = + 0,50 \text{ sec}^{-2}$$

erhalten soll.

Nach Abschnitt 10, 4 entsteht die zu bestimmende Bewegung IV, indem man die Bewegung I zusammensetzt mit einer Bewegung V, in der alle Geschwindigkeiten die Größe Null haben

$$0 = \omega_{05} = \omega_{15} = \omega_{25} = \dots$$

und deren Beschleunigungen durch die Gleichungen:

$$\omega'_{05} = \alpha \omega_{01}, \quad \omega'_{15} = \alpha \omega_{11}, \quad \omega'_{25} = \alpha \omega_{21} \text{ usw.}$$

bestimmt werden, wenn man die Größe α so wählt, daß die aus der Zusammensetzung der beiden Bewegungen I und V entstehende Drehbeschleunigung des Gliedes 5 die vorgeschriebene Größe erhält:

$$\omega'_{54} = + 0,50 = \omega'_{51} + \alpha \omega_{51} = - 0,88 - 0,69 \alpha.$$

Im vorliegenden Falle ist also

$$\alpha = - \frac{0,50 + 0,88}{0,69} = - 2,00 \text{ sec}^{-1}.$$

Die in der letzten Reihe der vorstehenden Tabelle angegebenen Drehbeschleunigungen der Bewegung IV wurden demnach durch die Gleichung

$$\omega'_4 = \omega'_1 - 2,00 \omega_1$$

bestimmt.

Beispiel 7. Das Getriebe, Fig. 47, enthält acht Glieder, nämlich das ruhende Glied, zu dem die Gelenke *A*, *G* und der Schieber *I* gehören, ferner die sechs aus Stäben gebildeten Glieder *ABC*, *BE*, *CD*, *DEF*, *FG*, *HI* und den Schieber *H*. Das Glied *ABC* wird mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = + 1,75 \text{ sec}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = 0$$

geführt.

Der Geschwindigkeitsplan, Fig. 48. Durch die gegebene positive Drehgeschwindigkeit des Gliedes *ABC* ist vorgeschrieben:

$$(BC, B'C') = 90_0$$

$$B'C' = BC \omega_1 = 200 \cdot 1,75 = 350 \text{ cm sec}^{-2}$$

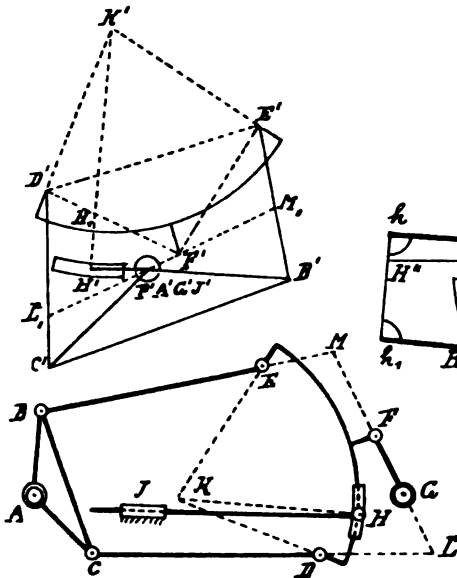
$$B'C'A' \simeq BCA.$$

Der Pol P' und die Punkte G' , I' fallen mit A' zusammen. Durch die Bedingungen:

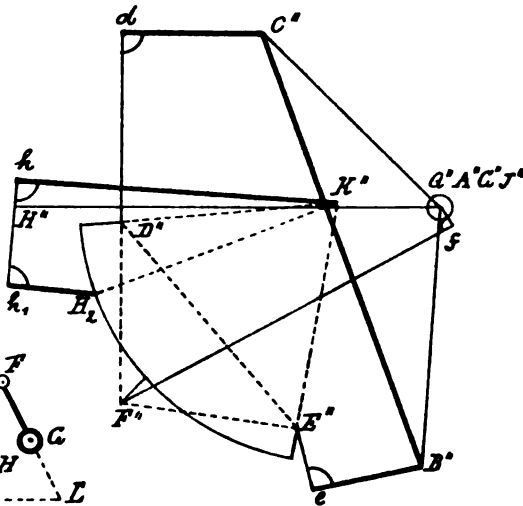
$$B'M_1E' \perp BEM, \quad C'L_1D' \perp CDL, \quad L_1G'F'M_1 \perp LGFM$$

sind ferner die drei Geraden $B'M_1E'$, $C'L_1D'$, $L_1G'F'M_1$ gegeben, auf welchen die dem starren Dreieck EDF entsprechenden Punkte E' , D' , F' liegen müssen. Man bestimmt ihre Lage entweder nach dem im Abschnitt 2, Fig. 5 und 6, beschriebenen Verfahren oder einfacher durch

G. Fig. 48.



B. Fig. 49.



L. Fig. 47.

die Bedingung, daß den Dreiecken DLF , DFE , EFM , DEK die ähnlichen Dreiecke $D'L_1F'$, $D'F'E'$, $E'F'M_1$, $D'E'K'$ entsprechen, und daß folglich:

$$L_1F'M_1E'K'D' \simeq LFMEKD$$

ist. Das Gelenk H bewegt sich infolge der Führung durch den festen Schieber I auf der festen Geraden HI :

$$P'H \parallel IH,$$

und da sein Abstand KH vom Mittelpunkt des Führungsstabes unveränderlich ist, so ist

$$K'H \perp KH.$$

Die Strecke H_1H' bezeichnet die relative Geschwindigkeit des Schiebers H gegen den Führungsstab.

Der Beschleunigungsplan, Fig. 49. Da die Drehbeschleunigung des geführten Gliedes ABC gleich Null gegeben ist, so ist

$$(BC, B''C'') = 180^\circ$$

$$B''C'' = \frac{(B'C')^2}{BC} = \frac{350^2}{200} = 613 \text{ cm sec}^{-2}$$

und

$$B''C''A'' \simeq BCA$$

aufzutragen. Mit A'' fallen die Punkte G'' , I'' und der Pol Q'' zusammen. Die Dehnungsbeschleunigungen der Stäbe BE , CD , GF bestimmen ferner die drei Geraden eE'' , dD'' , fF'' , auf denen die dem starren Dreieck EDF entsprechenden Punkte E'' , D'' , F'' liegen müssen:

$$(BE, B''e) = (CD, C''d) = (GF, G''f) = 180^\circ$$

$$B''e = \frac{(B'E')^2}{BE} = \frac{210^2}{300} = 147 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$C''d = \frac{(C'D')^2}{CD} = \frac{240^2}{300} = 192 \quad "$$

$$G''f = \frac{(G'F')^2}{GF} = \frac{50^2}{83} = 30 \quad "$$

$$eE'' \perp B''e, \quad dD'' \perp C''d, \quad fF'' \perp G''f.$$

Das im Abschnitt 7, Fig. 23—25, beschriebene Verfahren ergab die Lage des Dreiecks $E''D''F''$ und durch die Bedingung:

$$D''E''F''H_1K'' \simeq DEFHK$$

wurden darauf die den Punkten H_1 , K' entsprechenden Punkte H_2 , K'' bestimmt. Die Beschleunigung $Q''H''$ des Gelenkes H hat drei Bedingungen zu erfüllen: Sie ist infolge der Führung des Stabes IH durch den festen Schieber I parallel zu IH gerichtet:

$$Q''H'' \parallel IH;$$

wegen Starrheit der Strecke KH ist ferner:

$$(KH, K''h) = 180^\circ$$

$$K''h = \frac{(K'H')^2}{KH} = \frac{320^2}{240} = 427 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$hH'' \perp K''h.$$

Hierdurch ist der Punkt H'' bestimmt. Eine dritte Bedingung, die man als Probe benutzen kann, ergibt sich nach Abschnitt 9 aus der Drehgeschwindigkeit ω der Geschwindigkeitsstrecke H_1H' . Die Drehgeschwindigkeiten der beiden Glieder DEF und H sind:

$$\frac{K'H_1}{KH} \sin(KH, K'H_1) = + \frac{270}{240} \text{ sec}^{-1}$$

$$\frac{K'H'}{KH} \sin(KH, K'H') = + \frac{320}{240} \text{ sec}^{-1}.$$

Folglich ist

$$(H_1 H', H_2 h_1) = 90^\circ$$

$$H_2 h_1 = H_1 H' \quad \omega = 50 \frac{270 + 320}{240} = 123 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$h_1 H'' \perp H_2 h_1$$

aufzutragen. Diese Gerade $h_1 H''$ muß durch den bereits bestimmten Punkt H'' gehen.

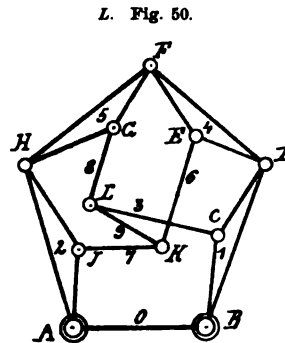
Beispiel 8. In dem zehngliedrigen Getriebe, Fig. 50, ruht das Glied 0 (AB), während das Glied 1 (BCD) mit der Drehgeschwindigkeit $+0,50 \text{ sec}^{-1}$ und der Drehbeschleunigung $+0,20 \text{ sec}^{-2}$ geführt wird. Da das Getriebe kein einziges Stabviereck enthält, so ist das im Abschnitt 10, 5 beschriebene Verfahren anzuwenden.

Die Geschwindigkeiten. Wir erteilen dem Stabe 3 (CL) die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmen die Geschwindigkeiten zweier Bewegungen I, II, die bestimmt sind durch folgende Annahmen:

$$\text{Bewegung I: } \omega_{01} = 0, \quad \omega_{11} = 0, \quad \omega_{21} = +1 \text{ sec}^{-1}$$

$$\text{Bewegung II: } \omega_{02} = 0, \quad \omega_{12} = +0,50 \text{ sec}^{-1}, \quad \omega_{22} = 0.$$

Die Bildung der hier nicht mitgeteilten Geschwindigkeitspläne, deren Ergebnisse in den ersten beiden Reihen der folgenden Tabelle zusammengestellt sind, bietet keine Schwierigkeit, da in den Stabpolygonen $ABDFH$, $ABDEKI$, $EFGLK$ in dieser Reihenfolge nur je *zwei* Glieder mit unbekannten Drehgeschwindigkeiten vorkommen.



	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	δ_3
Bewegung I	0	0	+1,00	+0,98	+1,08	-0,57	-0,43	-0,75	+0,37	+0,68	-0,61
Bewegung II	0	+0,50	0	-0,32	-0,33	+0,52	+0,66	+0,36	+0,34	-0,11	+0,33
Bewegung III	0	+0,50	+0,54	+0,21	+0,25	+0,21	+0,43	-0,04	+0,54	+0,26	0

Die von der Aufgabe geforderte Bewegung III ergibt sich durch Zusammensetzung der Geschwindigkeiten der Bewegung II mit den ξ -fachen Geschwindigkeiten der Bewegung I, wenn man die Zahl ξ so wählt, daß die Dehnungsgeschwindigkeit δ_3 des Stabes 3 in der zusammengesetzten Bewegung III gleich Null wird:

$$0 = \xi \delta_{31} + \delta_{32} = -0,61 \xi + 0,33,$$

$$\xi = + \frac{33}{61} = +0,54.$$

Der Beschleunigungsplan, Fig. 49. Da die Drehgeschwindigkeit des geführten Gliedes ABC gleich Null gegeben ist, so

$$(BC, B''C'') = 180^\circ$$

$$B''C'' = \frac{(B'C')^2}{BC} = \frac{350^2}{200} = 613 \text{ cr}$$

und

$$B''C''A'' \approx BCA$$

aufzutragen. Mit A'' fallen die Punkte G' zusammen. Die Dehnungsbeschleunigungen bestimmen ferner die drei Geraden eE'' , das starren Dreieck EDF entsprechenden Pu

$$(BE, B''e) = (CD, C''d)$$

$$B''e = \frac{(B'E')^2}{BE} = \frac{210^2}{34}$$

$$C''d = \frac{(C'D')^2}{CD} = ?$$

$$G''f = \frac{(G'F')^2}{GF}$$

$$eE'' \perp B''e, d$$

Das im Abschnitt 7, Fig. 2'

Lage des Dreiecks $E''D''F''$

$D''E''$

wurden darauf die den Pr bestimmt. Die Beschleunigungen zu erfüllen durch den festen Schi

$$\omega_{35} = \alpha \omega_{31} \text{ usf.}$$

ngabschleunigung δ_{35} des Stabe

$$\omega_{35} = \alpha \delta_{31}.$$

en, daß die Dehnungsbeschleunigung angesetzten Bewegung III dem starren Stabe

$$\omega_{35} = -\omega_{33}^2 = \delta_{34}' + \alpha \delta_{31}'.$$

wegen Starrheit de

Tabellenwerte erhält man

$$\frac{\omega_{33}^2 + \delta_{34}'}{\delta_{31}'} = + \frac{0,21^2 + 0,08}{0,61} = + 0,20.$$

Hierdurch ist die Tabellenreihe zusammengestellten Drehbeschleunigungen der Aufgabe geforderten Bewegung III ergaben sich Gleichung:

$$\omega_3 = \omega_4 + \alpha \omega_1 = \omega_4 + 0,20 \omega_1.$$

man als Pro Drehgeschwindigkeit

	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	δ_1
0	-0,05	-0,06	+0,11	+0,26	+0,08	+0,24	+0,03	+0,08
+1,00 α	+0,98 α	+1,08 α	-0,57 α	-0,43 α	-0,75 α	+0,37 α	+0,68 α	-0,61 α
+0,20	+0,15	+0,16	0,00	+0,17	-0,07	+0,31	+0,17	-0,44

Bahn eines Punktes und ihrer Evolute.
zur Zeit t in A , Fig. 51, und zur
Krümmungshalbmesser

Von Otto Mohr.

$$(H, H', H_1 h_1) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{50 \cdot 370 + 320}{240} = 123 \text{ cm sec}^{-1}$$

$$H, H' \perp H_1 h_1$$

"mit B durch den bereits bestimmten
von G Strie, Fig. 51, ruht das

(D)

-1

L. 174 30

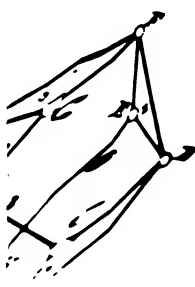
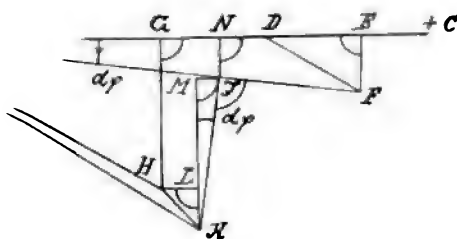


Fig. 52.



und der Bahntangente die Komponenten n' , u' und
auf der Bahnnormalen geben wir dem Sinn AB , auf der
dem durch die Bedingung

$$(AC, AB) = 90^\circ$$

estimmten Sinn AC das positive Vorzeichen. Um allgemein gültige
algebraische Beziehungen zu erhalten, betrachten wir einen Fall, in dem
alle Größen das positive Vorzeichen tragen. Die Geschwindigkeiten
und Beschleunigungen sind in einer besonderen Figur 52 dargestellt,
ihre unendlich kleinen Änderungen natürlich in unendlich starker Ver-
zerrung. In dem unendlich kleinen Zeitabschnitt von t bis $t + dt$
ändert sich

$$v(AD) \text{ in } v + dv(AF)$$

$$v'(AH) \text{ in } v' + dv'(AK)$$

$$u'(AG) \text{ in } u' + du'(AJ)$$

$$n'(GH) \text{ in } n' + dn'(JK).$$

Die in der letzten Tabellenreihe angegebenen Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III konnten demnach durch die Gleichung

$$\omega_3 = \omega_2 + \xi \omega_1 = \omega_2 + 0,54 \omega_1$$

bestimmt werden.

Die Beschleunigungen. Wir erteilen wieder dem Stabe 3 (CL) die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmen die Beschleunigungen einer Bewegung IV, deren Geschwindigkeiten mit der Bewegung III übereinstimmen:

$$\omega_{04} = \omega_{03}, \quad \omega_{14} = \omega_{13}, \quad \omega_{24} = \omega_{23} \text{ usw.},$$

während die Drehbeschleunigungen durch die Annahme

$$\omega'_{04} = 0, \quad \omega'_{14} = +0,20 \text{ sec}^{-2}, \quad \omega'_{24} = 0$$

bestimmt sind. Der betreffende Plan bietet nichts Bemerkenswertes und ist daher hier nicht mitgeteilt. Das Ergebnis desselben, nämlich die Drehbeschleunigungen aller Glieder und die Dehnungsbeschleunigung δ'_{34} des dehnbaren Gliedes 3 ist in der ersten Reihe der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Diese Bewegung IV ist zusammenzusetzen mit einer Anfangsbewegung V, deren Geschwindigkeiten also sämtlich Null, und deren Drehbeschleunigungen den Drehgeschwindigkeiten der Bewegung I proportional sind:

$$\omega'_{05} = \omega'_{15} = 0, \quad \omega'_{25} = \alpha \omega_{21}, \quad \omega'_{35} = \alpha \omega_{31} \text{ usw.}$$

In dieser Bewegung hat die Dehnungsbeschleunigung δ'_{35} des Stabes 3 die Größe

$$\delta'_{35} = \alpha \delta_{31}.$$

Die Größe α ist so zu wählen, daß die Dehnungsbeschleunigung δ'_{35} der aus IV und V zusammengesetzten Bewegung III dem *starr*en Stabe 3 entspricht:

$$\delta'_{35} = -\omega_{33}^2 = \delta'_{34} + \alpha \delta_{31}.$$

Mit Benutzung der Tabellenwerte erhält man

$$\alpha = -\frac{\omega_{33}^2 + \delta'_{34}}{\delta_{31}} = +\frac{0,21^2 + 0,08}{0,61} = +0,20.$$

Die in der letzten Tabellenreihe zusammengestellten Drehbeschleunigungen der von der Aufgabe geforderten Bewegung III ergaben sich demnach aus der Gleichung:

$$\omega'_3 = \omega'_4 + \alpha \omega_1 = \omega'_4 + 0,20 \omega_1.$$

	ω'_0	ω'_1	ω'_2	ω'_3	ω'_4	ω'_5	ω'_6	ω'_7	ω'_8	ω'_9	δ'_1
Bewegung IV	0	+0,20	0	-0,05	-0,06	+0,11	+0,26	+0,08	+0,24	+0,03	+0,08
Bewegung V	0	0	+1,00 α	+0,98 α	+1,08 α	-0,57 α	-0,43 α	-0,75 α	+0,37 α	+0,68 α	-0,61 α
Bewegung III	0	+0,20	+0,20	+0,15	+0,16	0,00	+0,17	-0,07	+0,31	+0,17	-0,04

12. Die Krümmung der Bahn eines Punktes und ihrer Evolute. Der bewegte Punkt befindet sich zur Zeit t in A , Fig. 51, und zur Zeit $t + dt$ in C . Die Bahn AC hat den Krümmungshalbmesser

$$AB = r,$$

ihre Evolute BD hat den Krümmungshalbmesser

$$BE = r_1.$$

Der Strecke r wird der Sinn AB , der Strecke r_1 der Sinn BE beigelegt. Der Punkt A hat zur Zeit t die Geschwindigkeit v , die Beschleunigung erster Ordnung v' und die Beschleunigung zweiter Ordnung v'' . Die Beschleunigungen v' , v'' haben in den Richtungen der

L. Fig. 51.

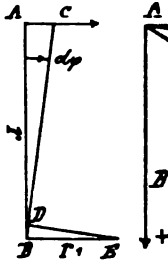
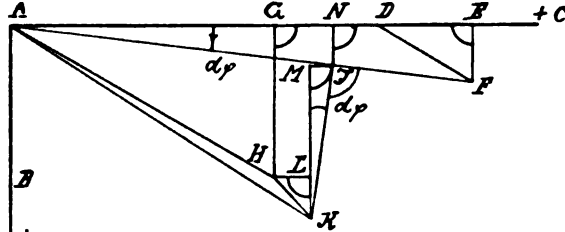


Fig. 52.



Bahnnormalen und der Bahntangente die Komponenten n' , u' und n'' , u'' . Auf der Bahnnormalen geben wir dem Sinn AB , auf der Tangente dem durch die Bedingung

$$(AC, AB) = 90^\circ$$

bestimmten Sinn AC das positive Vorzeichen. Um allgemein gültige algebraische Beziehungen zu erhalten, betrachten wir einen Fall, in dem alle Größen das positive Vorzeichen tragen. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind in einer besonderen Figur 52 dargestellt, ihre unendlich kleinen Änderungen natürlich in unendlich starker Verzerrung. In dem unendlich kleinen Zeitabschnitt von t bis $t + dt$ ändert sich

$$v(AD) \text{ in } v + dv(AF)$$

$$v'(AH) \text{ in } v' + dv'(AK)$$

$$u'(AG) \text{ in } u' + du'(AJ)$$

$$n'(GH) \text{ in } n' + dn'(JK).$$

Die Geschwindigkeitsstrecke AF ($v + dv$) bildet die geometrische Summe der zwei Geschwindigkeiten $AD(v)$ und $DF(v'dt)$ oder der drei Geschwindigkeiten $AD(v)$, $DE(u'dt)$ und $EF(n'dt)$. Da

$$AE = AD + DE$$

$$(v + dv) \cos d\varphi = v + u'dt$$

ist, so folgt

$$(32) \quad u' = \frac{dv}{dt}.$$

Die Richtung der Geschwindigkeit v dreht sich in der Zeit dt in positivem Sinne um den Winkel

$$(33) \quad d\varphi = \frac{n'dt}{v} = \frac{vdt}{r}.$$

Daher hat der Krümmungshalbmesser der Bahn die Größe

$$(34) \quad r = \frac{v^2}{n'}$$

und die Strecke AB hat stets den Sinn von n' .

Aus der Zeichnung ist zu ersehen:

$$AN = AG + HL + MJ$$

oder:

$$(u' + du') \cos d\varphi = u' + u''dt + (n' + dn') \sin d\varphi$$

oder:

$$(35) \quad u'' = \frac{du'}{dt} - n' \frac{d\varphi}{dt} = \frac{du'}{dt} - \frac{n'^2}{v},$$

ferner:

$$GH + LK = NJ + MK$$

oder:

$$n' + n''dt = (u' + du') \sin d\varphi + (n' + dn') \cos d\varphi$$

oder:

$$(36) \quad n'' = \frac{dn'}{dt} + \frac{n'u'}{v}.$$

Auch der Krümmungshalbmesser r_1 der Evolute durchläuft in der Zeit dt in positivem Sinne den Winkel $d\varphi$, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Änderung dr von r negativ ist, wenn r_1 , d. h. die Strecke BE , den positiven Sinn AC hat:

$$d\varphi = -\frac{dr}{r_1} = \frac{vdt}{r},$$

woraus folgt

$$\frac{r_1}{r} = -\frac{1}{v} \frac{dr}{dt}.$$

Aus Gleichung (34) ergibt sich durch Differenzieren:

$$\frac{dr}{dt} = 2 \frac{v}{n'} \frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{n'^2} \frac{dn'}{dt}$$

und nach Gleichung (32) und (36)

$$\frac{dr}{dt} = 3 \frac{v u'}{n'} - \frac{v^2 n''}{n'^2}.$$

Daher ist:

$$(37) \quad \frac{r_1}{r} = \frac{v n''}{n'^2} - \frac{3 u'}{n'}.$$

Der Krümmungshalbmesser BE hat den positiven Sinn AC , wenn algebraisch

$$v n'' > 3 u' n'$$

ist. Der Punkt A kann seine Bahn mit verschiedenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen durchlaufen. Bei einer zwangsläufigen Bewegung, d. h. bei gegebener Bahn haben aber in jedem Bahnpunkte die Größen

$$\frac{v^2}{n'} \text{ und } \left(\frac{v n''}{n'^2} - \frac{3 u'}{n'} \right)$$

unveränderliche Werte.

13. *Die Beschleunigungen zweiter Ordnung der ebenen Bewegung einer starren Punktgruppe.* — Wir wählen für die relative Bewegung des Punktes A gegen den starr mit ihm verbundenen Punkt B die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes, und da bei dieser Bewegung A den Kreis vom Halbmesser

$$r = AB = a$$

um den ruhenden Punkt B beschreibt, so ist:

$$(38) \quad n' = \frac{v^2}{a} = a \omega^2,$$

wenn wie früher mit

$$\omega = \frac{v}{a}$$

die Drehgeschwindigkeit der Strecke BA im Sinne der Uhrzeigerbewegung bezeichnet wird. Ferner ist nach den Gleichungen (32), (35), (36):

$$(39) \quad u' = \frac{dv}{dt} = a \frac{d\omega}{dt} = a \omega',$$

$$(40) \quad u'' = \frac{d u'}{dt} - \frac{n'^2}{v} = a \left(\frac{d^2 \omega}{dt^2} - \omega^3 \right) = a \left(\frac{d \omega'}{dt} - \omega^3 \right)$$

und

$$(41) \quad n'' = \frac{d n'}{dt} + \frac{n' u'}{v} = 2 a \omega \frac{d \omega}{dt} + a \omega \omega' = 3 a \omega \omega'.$$

Die Tangentialbeschleunigung zweiter Ordnung u'' hat den positiven Sinn AC , wenn algebraisch

$$\frac{d \omega'}{dt} > \omega^3$$

ist, und die Normalbeschleunigung n'' hat den positiven Sinn AB , wenn ω und ω' gleiche Vorzeichen haben. Gleichung (41) folgt auch aus Gleichung (37), wenn r_1 gleich Null gesetzt wird. In Übereinstimmung mit den Abschnitten 1 und 6 nennen wir das Verhältnis

$$(42) \quad \omega'' = \frac{n''}{a} = \frac{d\omega'}{dt} - \omega^3 = \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3$$

die *Drehbeschleunigung zweiter Ordnung* und das Verhältnis

$$(43) \quad \delta'' = -\frac{n''}{a} = -3\omega\omega'$$

die *Dehnungsbeschleunigung zweiter Ordnung* der starren Strecke a . Es ist hierbei zu beachten, daß die relative Dehnungsbeschleunigung $a\delta''$ des Punktes A gegen B den positiven Sinn BA hat, wenn n'' negativ ist.

Da die gleichzeitigen Werte der Drehgeschwindigkeit ω für alle Strecken $AB, BC, CA \dots$ der starren Punktgruppe $ABC \dots$ gleich groß sind, so haben auch die Größen $\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^2\omega}{dt^2}, \omega'', \delta''$ für alle Strecken gleichzeitig dieselben Werte. Werden von einem Punkte B''' aus die Strecken $B'''A''', B'''C''', B'''D''' \dots$ aufgetragen, welche die nach Gleichung (40) und (41) bestimmten relativen Beschleunigungen zweiter Ordnung der Punkte $A, C, D \dots$ gegen den Punkt B darstellen, so entsteht, wie in den Abschnitten 2 und 7, eine Punktgruppe $A'''B'''C'''D''' \dots$, die der starren Gruppe $ABCD \dots$ des Lageplanes geometrisch ähnlich ist:

$$(44) \quad A'''B'''C'''D''' \dots \simeq ABCD \dots$$

Der gemeinschaftliche Beschleunigungswinkel zweiter Ordnung:

$$\gamma'' = (AB, A'''B''') = (BC, B'''C''') = \dots$$

wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$(45) \quad \frac{\delta''}{\cos \gamma''} = \frac{\omega''}{\sin \gamma''} = \frac{A'''B'''}{AB} = \frac{B'''C'''}{BC} = \dots$$

Dieser Winkel kann alle Größen annehmen, da die Werte von δ'' und ω'' positiv und negativ sein können. Dem gegenüber erinnern wir daran, daß der *Geschwindigkeitswinkel* γ einer starren Strecke gleich 90° oder gleich 270° ist, und daß der Winkel γ' der Beschleunigungen erster Ordnung an die Bedingung

$$90^\circ < \gamma' < 270^\circ$$

gebunden ist.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß der Plan der Beschleunigungen zweiter Ordnung $R'''A'''B'''C''' \dots$ für eine starre Punkt-

gruppe $ABC \dots$ gebildet werden kann, wenn außer den Größen ω , $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ noch die Beschleunigung zweiter Ordnung $R'''B'''$ irgend eines Punktes B der Gruppe bekannt ist. Denn die Beschleunigung zweiter Ordnung $R'''C'''$ irgend eines anderen Punktes C bildet die geometrische Summe aus $R'''B'''$ und der relativen Beschleunigung $B'''C'''$ des Punktes C gegen B . R''' ist also der Pol des Beschleunigungsplanes. Der im Lageplan durch die Bedingung

$$RABC \dots \simeq R'''A'''B'''C''' \dots$$

bestimmte Pol R ist der einzige Punkt der bewegten Ebene ABC , dessen Beschleunigung zweiter Ordnung zur Zeit t gleich Null ist. Für jeden Punkt A ergibt sich die Beschleunigung zweiter Ordnung AA_2 aus den algebraischen Gleichungen:

$$(46) \quad \begin{cases} AA_2 \sin(RA, AA_2) = \omega'' RA \\ AA_2 \cos(RA, AA_2) = \delta'' RA. \end{cases}$$

14. *Der Plan der Beschleunigungen zweiter Ordnung eines ebenen Getriebes.* — Es erscheint zweckmäßig, an dieser Stelle die nahe Verwandtschaft hervorzuheben, die inbetrreff ihrer Entstehung zwischen dem Geschwindigkeitsplan und den Beschleunigungsplänen eines Getriebes zu bemerken ist.

Der *Geschwindigkeitsplan* kann gebildet werden, wenn außer dem festgestellten Gliede die Drehgeschwindigkeit eines Gliedes bekannt ist. Dem Bildungsgesetz liegt die Bedingung zu Grunde, daß die Dehnungsgeschwindigkeit eines starren Stabes gleich Null ist.

Der Plan der Beschleunigungen *erster* Ordnung kann gebildet werden, wenn außer dem Geschwindigkeitsplan noch die Drehbeschleunigung erster Ordnung für ein Glied gegeben ist. Dem Bildungsgesetz liegt eine ähnliche Bedingung zu Grunde: Die Dehnungsbeschleunigung eines jeden Stabes im Getriebe ist gleich dem negativen Quadrat seiner Drehgeschwindigkeit; sie ist also bestimmt durch den Geschwindigkeitsplan.

Um endlich die Beschleunigungen *zweiter* Ordnung bilden zu können, muß außer den Geschwindigkeiten und den Beschleunigungen *erster* Ordnung noch die Drehbeschleunigung zweiter Ordnung für ein Glied bekannt sein. Denn für jeden Stab des Getriebes ist die Dehnungsbeschleunigung zweiter Ordnung bekannt: sie ist gleich dem negativen dreifachen Produkt aus der Drehgeschwindigkeit des Stabes und seiner Drehbeschleunigung erster Ordnung.

Es wird demnach genügen, die Bildung eines solchen Planes an einem Beispiel zu erklären.

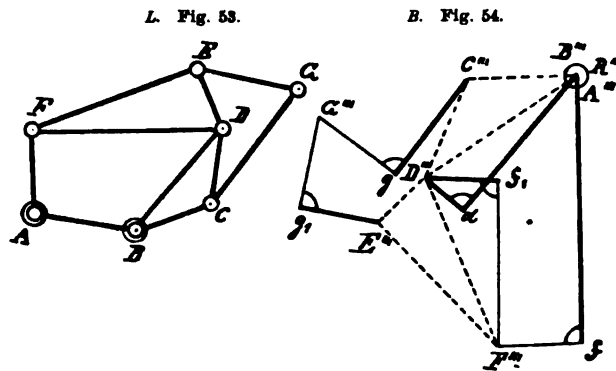
Beispiel 9. Für das geführte Glied BCD des in den Fig. 41 u. 53 dargestellten Getriebes möge gegeben sein:

$$\omega = -1,17 \text{ sec}^{-1}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega' = -1,18 \text{ sec}^{-2}$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -2,64 \text{ sec}^{-3}.$$

In den Figuren 42 und 43 sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erster Ordnung in den normalen Maßstäben dargestellt.



Das nachstehende Verzeichnis enthält die aus jenen Figuren entnommenen Werte der Stablängen a , der Geschwindigkeiten $a\omega$, der Beschleunigungen $a\omega'$ und die hieraus berechneten Werte von $a\delta'' = -3a\omega\omega'$

Stab	a cm	$a\omega$ cm sec ⁻¹	$a\omega'$ cm sec ⁻²	$a\delta''$ cm sec ⁻³
BD	173	-202	-204	-715
AF	108	-156	-246	-1066
FD	250	-132	-175	-277
CG	190	-172	-180	-489
EG	140	-106	-132	-300

Der in $\frac{1}{3}$ der normalen Größe, also in dem Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 300 \text{ cm sec}^{-3}$$

dargestellte Beschleunigungsplan zweiter Ordnung, Fig. 54, ergibt sich aus den folgenden Bedingungen:

$$B'''d = -715 \text{ cm sec}^{-3},$$

daher

$$(BD, B'''d) = 180^\circ.$$

$$dD''' = a\left(\frac{d\omega'}{dt} - \omega^3\right) = 173(-2,64 + 1,17^3) = -180 \text{ cm sec}^{-3},$$

daher

$$(BD, dD''') = 270^\circ.$$

$$A'''f = -1066 \text{ cm sec}^{-2},$$

daher

$$(AF, A'''f) = 180^\circ.$$

$$D'''f_1 = -277 \text{ cm sec}^{-2},$$

daher

$$(DF, D'''f_1) = 180^\circ.$$

$$fF''' \perp A'''f, \quad f_1F''' \perp D'''f_1.$$

$$B'''C'''D''' \simeq BCD, \quad D'''E'''F''' \simeq DEF$$

$$C'''g = -489 \text{ cm sec}^{-2},$$

daher

$$(CG, C'''g) = 180^\circ.$$

$$E'''g_1 = -300 \text{ cm sec}^{-2},$$

daher

$$(EG, E'''g_1) = 180^\circ.$$

$$gG''' \perp C'''g, \quad g_1G''' \perp E'''g_1.$$

15. Die Krümmung der Bahn und der Bahnevolvente eines mit einem Getriebegliede starr verbundenen Punktes. — Nachdem für irgend eine Bewegung des Getriebes, d. h. bei willkürlicher Wahl der Drehgeschwindigkeit und der Drehbeschleunigungen des geführten Gliedes, die Pläne der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen erster und zweiter Ordnung gebildet worden sind, können die Krümmungshalbmesser der Bahn und ihrer Evolute für jeden mit einem Getriebegliede starr verbundenen Punkt nach den Gleichungen (34) und (37) ermittelt werden, indem man die algebraischen Werte der vier Größen v , n' , u' , n'' aus den Plänen entnimmt. Ein Beispiel möge zur Erläuterung dienen.

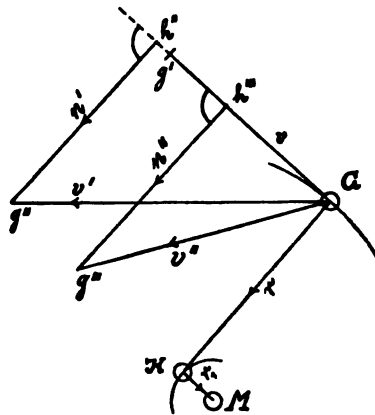
Beispiel 10. Das Gelenk G des Getriebes Fig. 41 und 53 hat die Geschwindigkeit

$$v = P'G' \parallel Gg', \quad \text{Fig. 42 und 55}$$

die Beschleunigung erster Ordnung

$$v' = Q''G'' \parallel Gg'', \quad \text{Fig. 43 und 55}$$

Fig. 55.



und die Beschleunigung zweiter Ordnung

$$v'' = R''' G''' \parallel Gg''', \text{ Fig. 54 und 55.}$$

$$v \text{ ist in dem Maßstabe } 1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sec}^{-1}$$

$$v' \text{ " " " " } 1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$v'' \text{ " " " " } 1 \text{ cm} = 300 \text{ cm sec}^{-3}$$

dargestellt. Mit Berücksichtigung dieser Maßstäbe, entnimmt man aus Fig. 55:

$$Gg' = v = -280 \text{ cm sec}^{-1}$$

$$Gh'' = u' = -310 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$h''g'' = n' = +270 \text{ cm sec}^{-3}$$

$$h'''g''' = n'' = +850 \text{ cm sec}^{-3}.$$

v und u' sind negativ, weil die Winkel

$$(v, n') = (u', n') = 270^\circ$$

sind, n'' ist positiv, weil der Sinn von n'' mit dem von n' übereinstimmt. Nach den Gl. (34) und (37) ist also

$$GK = r = \frac{280^2}{270} = 290 \text{ cm}$$

und

$$KM = r_1 = 290 \left(-\frac{280 \cdot 850}{270^2} + 3 \frac{310}{270} \right) = +52 \text{ cm.}$$

Da r_1 positiv ist, so ist der Winkel

$$(KM, GK) = (r_1, r) = 90^\circ.$$

16. *Die geometrische Bewegung einer Ebene.* — Die Krümmungen der Bahnen und der Bahnevoluten aller Punkte einer bewegten Ebene werden für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt durch die Lage der drei Pole P, Q, R und durch die drei Größen $\omega, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d^2\omega}{dt^2}$. Für eine *zwangsläufige* Bewegung, die z. B. von einem Getriebegliede und von der starr mit ihm verbundenen Ebene ausgeführt wird, sind die Bahnen der Punkte bestimmt und unabhängig von den genannten drei Größen. Zu jeder Gruppe von willkürlich gewählten Werten $\omega, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d^2\omega}{dt^2}$ gehört eine bestimmte Gruppe von drei Polen P, Q, R . Die hier inbetracht kommenden Beziehungen nehmen ihre einfachste Form an, wenn man ω gleich der positiven Zahleneinheit und $\frac{d\omega}{dt}$ sowie $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ gleich Null wählt. Wir nennen diese Bewegung die *geometrische* Bewegung, weil die Zeit aus ihrer Betrachtung beseitigt wird. Nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern auch alle Beschleu-

nigungen werden lediglich durch die Längeneinheit gemessen und können im Maßstab des Lageplans dargestellt werden. Für die geometrische Bewegung ist also

$$(47) \quad \begin{cases} \omega = +1 \\ \gamma = 90^\circ \\ \delta' = -\omega^2 = -1 \\ \omega' = \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ \gamma' = 180^\circ \\ \delta'' = -3\omega\omega' = 0 \\ \omega'' = \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 = -1 \\ \gamma'' = 270^\circ \end{cases}$$

Wenn die drei Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung bekannt sind, so bestimmt man für jeden Punkt A der Ebene die Geschwindigkeit v , die Beschleunigung erster Ordnung v' und die Beschleunigung zweiter Ordnung v'' durch folgende Bedingungen, Fig. 56:

$$(48) \quad \begin{cases} \gamma = (P_0A, v) = 90^\circ, & v = P_0A \\ \gamma' = (Q_0A, v') = 180^\circ, & v' = Q_0A \\ \gamma'' = (R_0A, v'') = 270^\circ, & v'' = R_0A \end{cases}$$

Durch den Geschwindigkeitsplan und die beiden Beschleunigungspläne eines Getriebes sind für den Zeitpunkt der Betrachtung und für jedes Glied gegeben: die Lage der Pole P, Q, R und die algebraischen Werte der Größen $\omega, \delta', \omega', \delta'', \omega''$. Es ergibt sich also die Aufgabe, hieraus die Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung zu bestimmen. Wir benutzen zu diesem Zweck ein rechtwinkliges Koordinatensystem, Fig. 57, dessen Anfangspunkt mit P , dessen y -Achse auch dem Sinne nach mit PQ zusammenfällt, und dessen x -Achse durch die Bedingung:

$$(y, x) = 90^\circ$$

bestimmt ist. Der Geschwindigkeitspol P_0 fällt auf den ruhenden Punkt der Ebene, also auf den Pol P . Wir bezeichnen die bekannten Koordinaten der Punkte Q und R mit x_0, y_0 und x_1, y_1 , ferner die

Fig. 56.

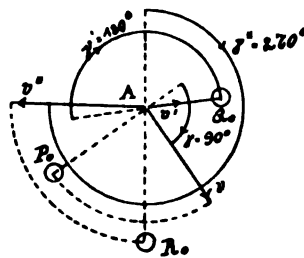
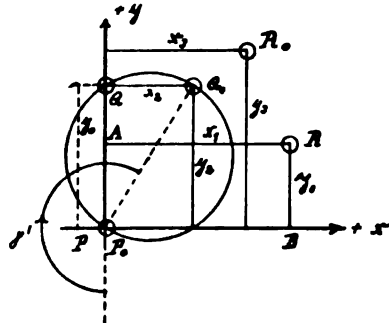


Fig. 57.



unbekannten Koordinaten der Punkte Q_0 und R_0 mit x_2, y_2 und x_3, y_3 . Die Gleichungen zur Bestimmung dieser vier unbekannten Größen ergeben sich, indem man für zwei beliebige Punkte A, B der Ebene nach Abschnitt 12 die Bedingungen bildet, daß jede der beiden Größen r^2 und $\left(\frac{v n''}{n^2} - 3 \frac{u'}{n}\right)$ in der geometrischen Bewegung denselben Wert haben muß wie in der gegebenen Bewegung. Um diese Bedingungen tunlichst einfach zu gestalten, wählen wir für den Punkt A die Koordinaten

$$x = 0, \quad y = y_1$$

und für den Punkt B :

$$x = x_1, \quad y = 0.$$

Die Komponenten der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieser beiden Punkte haben die in dem nachstehenden Verzeichnis zusammengestellten Werte.

	Punkt A in der gegebenen Bewegung		Punkt B in der gegebenen Bewegung	
		geometrischen Bewegung		geometrischen Bewegung
v	$+ y_1 \omega$	$+ y_1$	$+ x_1 \omega$	$+ x_1$
n'	$(y_0 - y_1) \omega^2$	$y_2 - y_1$	$- x_1 \omega^2 - y_0 \omega'$	$x_2 - x_1$
u'	$(y_1 - y_0) \omega'$	$+ x_2$	$x_1 \omega' - y_0 \omega^2$	$- y_2$
n''	$+ x_1 \omega''$	$- x_3$	$- y_1 \omega''$	$+ y_3$

Die bezeichneten Bedingungen lauten also für den Punkt A :

$$\frac{y_1^2 \omega^2}{(y_0 - y_1) \omega^2} = \frac{y_1^2}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x_1 y_1 \omega \omega''}{(y_0 - y_1)^2 \omega^2} - \frac{3(y_1 - y_0) \omega'}{(y_0 - y_1) \omega^2} = - \frac{y_1 x_2}{(y_2 - y_1)^2} - \frac{3 x_2}{y_2 - y_1}$$

und für den Punkt B :

$$- \frac{x_1^2 \omega^2}{x_1 \omega^2 + y_0 \omega'} = \frac{x_1^2}{x_2 - x_1}$$

$$- \frac{x_1 y_1 \omega \omega''}{(x_1 \omega^2 + y_0 \omega')^2} + 3 \frac{x_1 \omega' - y_0 \omega^2}{x_1 \omega^2 + y_0 \omega'} = \frac{x_1 y_2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{3 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Beachtet man, daß nach den Gl. (17), (43), (45):

$$\omega' = - \omega^2 \operatorname{tg} \gamma'$$

$$\omega'' = - 3 \omega \omega' \operatorname{tg} \gamma'' = + 3 \omega^3 \operatorname{tg} \gamma' \operatorname{tg} \gamma''$$

ist, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$(49) \quad \begin{cases} x_2 = y_0 \operatorname{tg} \gamma' \\ y_2 = y_0 \\ x_3 = 3 \operatorname{tg} \gamma' (y_1 - y_0 - x_1 \operatorname{tg} \gamma'') \\ y_3 = 3 \operatorname{tg} \gamma' (y_0 \operatorname{tg} \gamma' - x_1 - y_1 \operatorname{tg} \gamma''). \end{cases}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ersieht man, daß der Beschleunigungspol Q bei jeder Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bewegung auf dem festen Kreise vom Durchmesser $P_0 Q_0$ liegt, und daß der Winkel $(Q P_0, P_0 Q_0)$ gleich dem Beschleunigungswinkel γ' der gegebenen Bewegung ist.

Für die folgende Darstellung der geometrischen Bewegung einer Ebene empfiehlt es sich, ein Polarkoordinatensystem, Fig. 58, anzuwenden, dessen Anfangspunkt mit dem Pol P_0 und dessen feste Achse auch dem Sinne nach mit $P_0 Q_0$ zusammenfällt. Wir bestimmen die Lage des Poles Q_0 durch den Vektor

$$P_0 Q_0 = q_0,$$

ferner die Lage des Poles R_0 durch den Winkel

$$(P_0 Q_0, P_0 R_0) = \varphi$$

und den Vektor

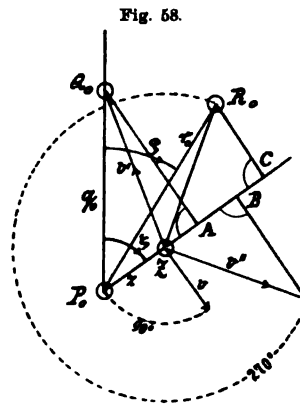
$$P_0 R_0 = r_0,$$

endlich die Lage eines beliebigen Punktes Z der Ebene durch den Winkel

$$(P_0 Q_0, P_0 Z) = \xi$$

und den Vektor

$$P_0 Z = z.$$



Die Geschwindigkeit des Punktes Z hat, da ω gleich $+1$ ist, die Größe

$$(50) \quad v = +z,$$

während Richtung und Sinn durch den Winkel

$$(z, v) = 90^\circ$$

bestimmt sind. Die Beschleunigung erster Ordnung des Punktes Z hat Größe, Richtung und Sinn der Strecke $Z Q_0$, weil

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

und daher der Beschleunigungswinkel

$$\gamma' = 180^\circ$$

ist. Folglich ist:

$$(51) \quad \begin{cases} n' = ZA = P_0 A - P_0 Z = q_0 \cos \xi - z \\ u' = A Q_0 = -q_0 \sin \xi. \end{cases}$$

Hierbei ist zu beachten, daß auf der Bahnnormalen der Sinn des Vektors $P_0 Z$ und auf der Bahntangente der Sinn von v das positive

Vorzeichen trägt. Die Beschleunigung *zweiter* Ordnung des Punktes Z hat, weil

$$\delta'' = -3\omega\omega' = 0$$

$$\omega'' = \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 = -1$$

$$\gamma'' = 270^\circ$$

ist, die Größe

$$v'' = R_0 Z,$$

während Richtung und Sinn durch den Winkel

$$(R_0 Z, v'') = 270^\circ$$

bestimmt sind. Demnach ist

$$(52) \quad n'' = ZB = CR_0 = r_0 \sin(\xi - \varphi).$$

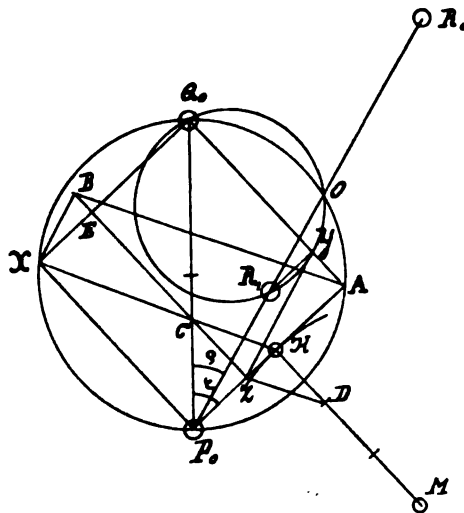
Nach den Gl. (34) und (37) ergeben sich die Krümmungshalbmesser r , r_1 der Bahnkurve und deren Evolute für den Punkt Z :

$$(53) \quad r = \frac{z^2}{q_0 \cos \xi - z}$$

$$(54) \quad r_1 = r \left(\frac{z r_0 \sin(\xi - \varphi)}{(q_0 \cos \xi - z)^2} + \frac{3 q_0 \sin \xi}{q_0 \cos \xi - z} \right).$$

Diese Formeln werden durch Fig. 59 geometrisch dargestellt. Man zieht im Kreise vom Durchmesser $P_0 Q_0$ die Sehne $Q_0 X$ parallel zur

Fig. 59.



Sehne $P_0 ZA$, ferner die Gerade $ZCEB$ normal zu $P_0 Z$. Die Gerade XC schneidet dann die Gerade $P_0 Z$ im Krümmungsmittelpunkt K der Bahnkurve des Punktes Z . Denn wegen Ähnlichkeit der Punktgruppen

$$CP_0 ZK \sim CQ_0 EX$$

ist

$$\frac{ZK}{P_0 Z} = \frac{XE}{EQ_0} = \frac{ZK}{z}$$

$$= \frac{z}{q_0 \cos \xi - z},$$

also

$$ZK = r.$$

Man macht ferner

$$P_0 R_1 = \frac{1}{3} P_0 R_0,$$

zieht im Kreise vom Durchmesser $Q_0 R_1$ die Sehne $R_1 Y$ parallel zu $P_0 Z$, dann XB parallel zu YZ , ZD parallel zu BA und macht KM

gleich $3KD$; dann ist M der Krümmungsmittelpunkt der Bahnenvolute des Punktes Z . Denn es ist:

$$\begin{aligned} AY &= \frac{1}{3}r_0 \sin(\xi - \varphi), \quad ZA = q_0 \cos \xi - z \\ ZB &= ZE + XE \frac{AY}{ZA} = q_0 \sin \xi + z \frac{r_0 \sin(\xi - \varphi)}{3(q_0 \cos \xi - z)} \\ \frac{1}{3}KM &= KD = ZK \frac{ZB}{ZA} = r \left(\frac{zr_0 \sin(\xi - \varphi)}{3(q_0 \cos \xi - z)^2} + \frac{q_0 \sin \xi}{(q_0 \cos \xi - z)} \right) \\ KM &= r_1. \end{aligned}$$

Wir entnehmen aus den Gleichungen (53) und (54) die folgenden Sätze, wobei wir absehen von den Grenzfällen, in denen z. B. einer der drei Pole P_0 , Q_0 , R_0 unendlich fern liegt, oder zwei von ihnen zusammenfallen.

1. Der Pol P_0 ist der einzige Punkt der Ebene, dessen Bahn einen Krümmungshalbmesser von der Größe Null hat.

2. Der Krümmungshalbmesser r der Bahn hat für alle Punkte innerhalb des Kreises P_0Q_0 einen positiven, für alle Punkte außerhalb dieses Kreises einen negativen Wert. Im ersten Falle hat also die Strecke ZK den Sinn P_0Z im zweiten den Sinn ZP_0 . Für alle Punkte des Kreises P_0Q_0 ist r unendlich groß; die Richtungen der Geschwindigkeiten aller dieser Punkte gehen durch den Pol Q_0 . Man hat den Kreis P_0Q_0 den Wendekreis des Bewegungszustandes und den Punkt Q_0 den Wendepol genannt.

3. Für alle Punkte der zu P_0Q_0 normal gerichteten Geraden P_0F , Fig. 64, fällt der Krümmungsmittelpunkt der Bahn mit dem Pol P_0 zusammen.

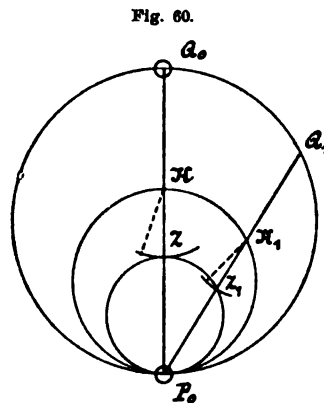
4. Bezeichnet K , Fig. 60, den Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines auf der Achse P_0Q_0 liegenden Punktes Z , und sind KK_1 , Q_0Q_1 , ZZ_1 die von den Punkten K , Q_0 , Z auf eine durch P_0 gehende Gerade gefällten Lote, so ist K_1 der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Punktes Z_1 . Denn es ist

$$ZK = \frac{P_0Z^2}{ZQ_0},$$

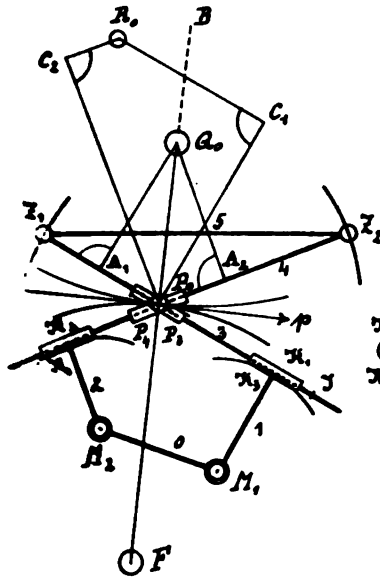
$$Z_1K_1 : P_0Z_1 : Z_1Q_1 = ZK : P_0Z : ZQ_0$$

folglich
$$Z_1K_1 = \frac{P_0Z_1^2}{Z_1Q_1}.$$

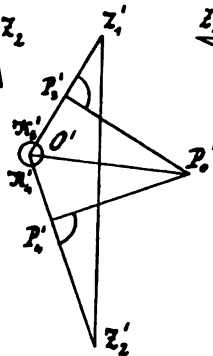
Die Bahnen aller Punkte des Kreises vom Durchmesser P_0Z haben ihre Krümmungsmittelpunkte also auf dem Kreise vom Durchmesser P_0K .



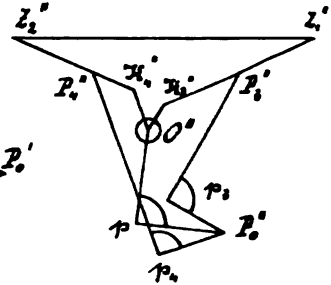
5. Durch die Krümmungsmittelpunkte K_1, K_2 zweier Punkte Z_1, Z_2 , Fig. 61–63, sind die Pole P_0, Q_0 der geometrischen Bewegung und also die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen aller Punkte der Ebene bestimmt. P_0 ist der Schnittpunkt der Geraden K_1Z_1, K_2Z_2 ; Q_0 wird bestimmt durch die Bedingung, daß die Projektionen $Z_1A_1,$



F. Fig. 61.



G. Fig. 62.



H. Fig. 63.

der Strecken Z_1Q_0, Z_2Q_0 auf die Krümmungshalbmesser Z_1K_1, Z_2K_2 den Sinn dieser Halbmesser und die Größen

$$A_1 = \frac{P_0Z_1^2}{Z_1K_1} = \frac{180^2}{860} = 90 \text{ cm}, \quad A_2 = \frac{P_0Z_2^2}{Z_2K_2} = \frac{260^2}{390} = 143 \text{ cm}$$

wissen.

Für alle Punkte des Wendekreises P_0Q_0 mit Ausnahme des Punktes P_0 und des auf dem Kreise Q_0R_1 liegenden Punktes O , Fig. 59, ist die Krümmungshalbmesser r_1 der Bahnevolute unendlich groß

Die Punkte, deren Bahnevoluten einen Krümmungshalbmesser der Größe Null haben, liegen auf einer Kurve dritter Ordnung, von der Gleichung:

$$s = \frac{3q_0^2 \sin \xi \cos \xi}{3q_0 \sin \xi - r_0 \sin (\xi - \varphi)}$$

(vergl. Gl. 54). Jede durch P_0 gelegte Gerade schneidet diese Kurve zweimal im Punkte P_0 ; den dritten Schnittpunkt Z , Fig. 64, bestimmt man durch die Gerade XYZ , indem man in den Kreisen $P_0 Q_0$, $Q_0 R_1$ die Sehnen $Q_0 X$, $R_1 Y$ parallel zu $P_0 Z$ zieht. Denn wegen Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $P_0 Z X$, $Q_0 X Y$ ist:

$$\begin{aligned} P_0 Z : P_0 X &= Q_0 X : Q_0 Y \\ z : q_0 \sin \xi &= q_0 \cos \xi : q_0 \sin \xi - \frac{r_0 \sin(\xi - \varphi)}{s}. \end{aligned}$$

Die zu $Q_0 R_1$ parallel gerichtete Gerade $P_0 G$ schneidet die Kurve in ihrem unendlich fernen Punkte.

8. Der Fußpunkt O des von Q_0 auf die Gerade $P_0 R_0$ gefällten Lotes $Q_0 O$, also der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise $P_0 Q_0$, $Q_0 R_1$ ist der einzige Punkt der Ebene, dessen Geschwindigkeit v mit seinen beiden Beschleunigungen v' , v'' in einer Geraden, der Geraden $O Q_0$ zusammenfällt, der also in drei aufeinanderfolgenden unendlich kleinen Zeitabschnitten in einer Geraden sich bewegt. Für diesen Punkt O ergibt Gleichung (54), ebenso wie für P_0 , einen unbestimmten Wert von $\frac{r_1}{r}$.

Wenn nicht die Pole der geometrischen Bewegung, sondern für irgend eine andere Wertgruppe ω , $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ die Pole P ,

Q , R und also die zugehörigen Beschleunigungswinkel γ' , γ'' bekannt sind, so bestimmt man den Punkt O in folgender Weise

Fig. 64.

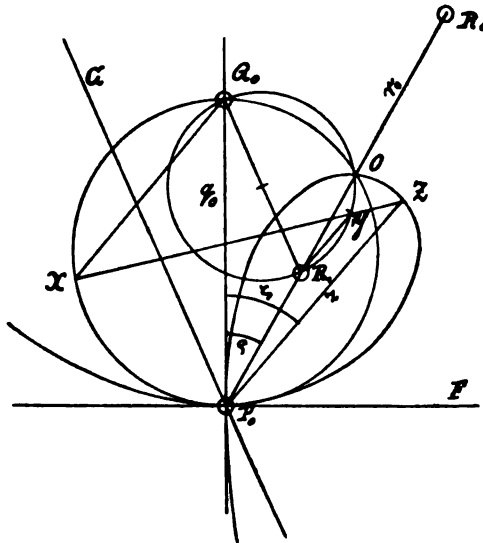
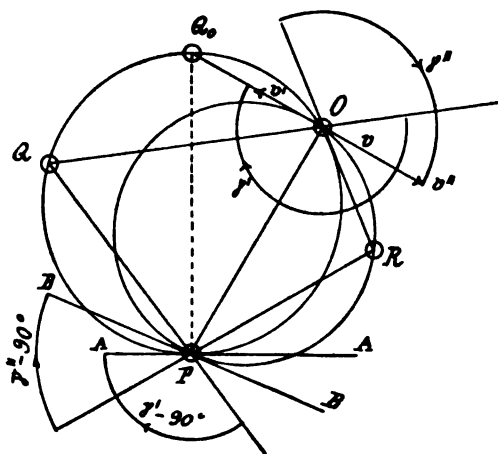


Fig. 65.



(Fig. 65): Man zieht die beiden Geraden PA , PB , die durch die Bedingungen:

$$(QP, PA) = \gamma' \pm 90^\circ, \quad (RP, PB) = \gamma'' \pm 90^\circ$$

bestimmt sind; ferner den Kreis PQ , der die Gerade PA berührt, und den Kreis PR , der PB berührt. Der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt O . Denn die Geschwindigkeit v dieses Punktes ist, ebenso wie seine beiden Beschleunigungen v' , v'' , normal zur Geraden PO gerichtet. Da der Pol R_0 auf der Geraden PP_0O liegt, so kann man zur Bestimmung dieses Pols die vorstehende Konstruktion in Verbindung mit einer der beiden nach Gleichung (49) zu berechnenden Koordinaten x_s , y_s anwenden.

9. Wenn für zwei Punkte Z_1 , Z_2 der Ebene außer den Krümmungsmittelpunkten K_1 , K_2 der Bahnen auch die Krümmungsmittelpunkte M_1 , M_2 der Bahnevoluten gegeben sind, so können die Pole P_0 , Q_0 , R_0 der geometrischen Bewegung und hierdurch die Krümmungsmittelpunkte aller Bahnevoluten bestimmt werden (Fig. 61–63). Die Bestimmung der Pole P_0 , Q_0 ist unter Nr. 5 dieses Abschnittes beschrieben worden. Um den Pol R_0 zu bestimmen, berechnet man nach Gleichung (54) für jeden der beiden Punkte Z_1 , Z_2 Größe und Vorzeichen der Strecke

$$(56) \quad r_0 \sin(\xi - \varphi) = \frac{3(q_0 \cos \xi - s)}{s} \left\{ \frac{r_1}{s} (q_0 \cos \xi - s) - q_0 \sin \xi \right\}$$

also die Abstände des Punktes R_0 von den beiden Geraden P_0Z_1 , P_0Z_2 .

In dem durch Fig. 61 dargestellten Beispiel (Maßstab 1:100) ist gegeben:

1. für den Punkt Z_1 :

$$s = P_0Z_1 = +180 \text{ cm}$$

$$r = Z_1K_1 \cos(P_0Z_1, Z_1K_1) = -360 \text{ cm}$$

$$r_1 = K_1M_1 \sin(P_0Z_1, K_1M_1) = -150 \text{ cm}$$

$$P_0A_1 = q_0 \cos \xi = P_0Q_0 \cos(P_0Q_0, P_0Z_1) = +90 \text{ cm}$$

$$Q_0A_1 = q_0 \sin \xi = P_0Q_0 \sin(P_0Q_0, P_0Z_1) = -185 \text{ cm},$$

also nach Gleichung 56:

$$r_0 \sin(\xi - \varphi) = P_0R_0 \sin(P_0R_0, P_0Z_1)$$

$$= \frac{3(90 - 180)}{180} \left\{ \frac{150}{3 \cdot 860} (90 - 180) + 185 \right\} = -268 \text{ cm}.$$

2. für den Punkt Z_2 :

$$z = P_0 Z_2 = + 260 \text{ cm}$$

$$r = Z_2 K_2 \cos (P_0 Z_2, Z_2 K_2) = - 390 \text{ cm}$$

$$r_1 = K_2 M_2 \sin (P_0 Z_2, K_2 M_2) = + 120 \text{ cm}$$

$$P_0 A_2 = P_0 Q_0 \cos (P_0 Q_0, P_0 Z_2) = q_0 \cos \xi = + 87 \text{ cm}$$

$$Q_0 A_2 = P_0 Q_0 \sin (P_0 Q_0, P_0 Z_2) = q_0 \sin \xi = + 187 \text{ cm},$$

also nach Gleichung (56):

$$r_0 \sin (\xi - \varphi) = P_0 R_0 \sin (P_0 R_0, P_0 Z_2)$$

$$= \frac{3(87 - 260)}{260} \left\{ - \frac{120}{3 \cdot 390} (87 - 260) - 187 \right\} = + 338 \text{ cm}.$$

Demnach ist, um den Pol R_0 zu bestimmen,

$$(P_0 Z_1, P_0 C_1) = 90^\circ, \quad P_0 C_1 = 268 \text{ cm}$$

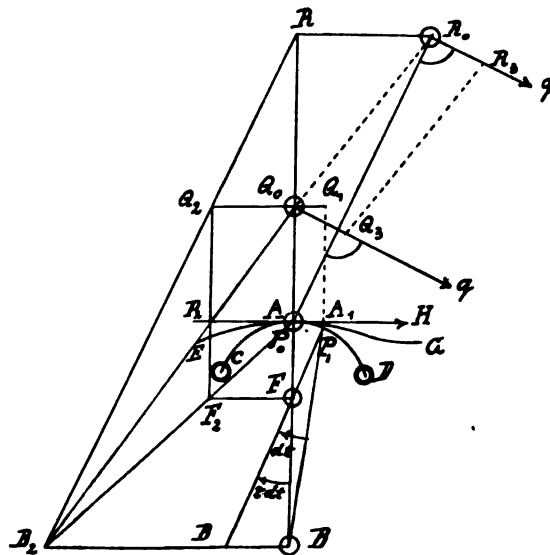
$$(P_0 Z_2, P_0 C_2) = 270^\circ, \quad P_0 C_2 = 338 \text{ cm}$$

$$C_1 R_0 \perp P_0 C_1, \quad C_2 R_0 \perp P_0 C_2$$

aufzutragen.

17. Die Krümmung der Bahnen des Geschwindigkeitspols. — Zur Zeit t möge der Geschwindigkeitspol der mit einem Getriebegliede starr verbundenen Ebene die Lage P_0 haben. Dieser Pol beschreibt in der ruhenden Ebene die ruhende Polbahn CP_0P_1D , Fig. 66, und zugleich in der bewegten Ebene die bewegte Polbahn EAA_1G . Zur Zeit t fällt der Punkt A der bewegten Ebene mit dem ruhenden Punkte P_0 zusammen; die unendlich kleine Strecke AA_1 dreht sich also um A . Zur Zeit $t + dt$ fällt der Punkt A_1 der bewegten Ebene mit dem festen Punkt P_1 zusammen, und AA_1 dreht sich in diesem Zeitpunkt um A_1 . Man

Fig. 66.



ersieht hieraus, daß die mit der bewegten Ebene EG starr verbundene

Polbahn EAA_1G auf der festen Polbahn CP_0P_1D rollt. In den Lehrbüchern werden diese Polbahnen benutzt, um die Bewegung darzustellen und insbesondere die Krümmungen der Bahnkurven zu bestimmen. Es kommt daher in Frage, welche Beziehungen zwischen den Bahnen des Geschwindigkeitspols und den im vorigen Abschnitt benutzten Polen P_0 , Q_0 , R_0 der geometrischen Bewegung bestehen. Wir nehmen an, es sei gegeben: der Geschwindigkeitspol P_0 , der Krümmungsmittelpunkt F der festen Polbahn und der Krümmungsmittelpunkt B der bewegten Polbahn. Das positive Vorzeichen trägt auf der Polbahnnormalen BFP_0 der Sinn BP_0 , auf der Polbahntangente der durch die Bedingung

$$(BP_0, P_0H) = 90^\circ$$

bestimmte Sinn P_0H . Der Krümmungshalbmesser der bewegten Polbahn

$$BP_0 = b$$

hat demnach stets einen positiven Wert, während der Krümmungshalbmesser

$$FP_0 = f$$

positiv oder negativ ist, je nachdem die beiden Polbahnen gleich oder entgegengesetzt gekrümmt sind. In der geometrischen Bewegung durchläuft die Ebene in der Zeit dt den Winkel

$$BA_1B_1 = dt.$$

Die Drehgeschwindigkeit τ des Halbmessers FP_0 der festen Polbahn ergibt sich demnach aus der Gleichung

$$\frac{P_0P_1}{FP_0} = \tau dt = \frac{BB_1}{FB} = \frac{b dt}{b-f}$$

$$(57) \quad \tau = \frac{b}{b-f}.$$

Die Drehgeschwindigkeit τ hat den positiven Sinn der Uhrzeigerbewegung, wenn algebraisch b größer als f ist. Der Pol P_0 verschiebt sich mit der Geschwindigkeit

$$(58) \quad p = f\tau = \frac{bf}{b-f}$$

und zwar im Sinne P_0H oder in dem negativen Sinne HP_0 , je nachdem f und τ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Pol der Beschleunigungen erster Ordnung fällt mit dem Punkte Q_0 der bewegten Ebene zusammen, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn mit der Verschiebungsgeschwindigkeit $f\tau$ von P_0 übereinstimmt, der also in der Zeit dt den Weg

$$Q_0Q_1 \parallel P_0P_1 = f\tau dt$$

zurücklegt. Denn die Geschwindigkeit dieses Punktes Q_0 ändert in der Zeit dt weder ihre Richtung noch ihre Größe, weil die Drehgeschwindigkeit der Ebene die *unveränderliche* Größe $+1$ hat. Der Pol Q_0 liegt daher auf der Polbahnnormalen, und die Strecke P_0Q_0 hat die *algebraische* Größe

$$(59) \quad P_0Q_0 = p = f\tau = \frac{bf}{b-f}.$$

Die Strecke P_0Q_0 hat den positiven Sinn BP_0 , wenn f und τ gleiche Vorzeichen tragen.

Der Pol der Beschleunigungen *zweiter* Ordnung fällt mit dem Punkte R_0 der bewegten Ebene zusammen, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn mit der noch unbekannten Verschiebungsgeschwindigkeit q des Poles Q_0 übereinstimmt, der also in der Zeit dt den Weg

$$R_0R_1 \parallel Q_0Q_1 = q dt$$

zurücklegt. Denn die Beschleunigung erster Ordnung von R_0 wird zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn durch die Strecke R_0Q_0 und zur Zeit $t + dt$ durch R_1Q_1 dargestellt; sie ändert in dieser Zeit also weder ihre Größe noch ihre Richtung. Der Punkt R_0 wird demnach bestimmt durch die Bedingungen:

$$(P_0R_0, q) = 90^\circ, \quad P_0R_0 = q.$$

Der Punkt Q_0 verschiebt sich auf der Polbahnnormalen; seine Geschwindigkeit q setzt sich also zusammen aus der Geschwindigkeit $q \sin(b, q)$ des mit ihm zusammenfallenden Punktes der Polbahnnormalen und einer Verschiebungsgeschwindigkeit $q \cos(b, q)$ von der Richtung dieser Normalen. Die erstgenannte Komponente ist zur Polbahntangente parallel gerichtet und hat die algebraische Größe

$$q \sin(b, q) = FQ_0 \tau = f(1 + \tau)\tau.$$

Da der Winkel

$$(b, q) = (b, P_0R_0) + 90^\circ$$

ist, so ist

$$q \sin(b, q) = P_0R_0 \cos(b, P_0R_0) = f(1 + \tau)\tau,$$

d. h. die Projektion P_0R der Strecke P_0R_0 auf die Polbahnnormale hat die algebraische Größe

$$P_0R = f\tau(1 + \tau).$$

Daher ist

$$(60) \quad Q_0R = f\tau^2.$$

Die *zweite* Komponente $q \cos(b, q)$ der Geschwindigkeit q , also die Strecke RR_0 kann nur bestimmt werden, wenn die Krümmungshalb-

messer der Evoluten beider Polbahnen bekannt sind, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll. Wir entnehmen aus den Gleichungen (57), (59), (60) die folgenden Beziehungen:

$$(61) \quad \tau = \frac{BP_0}{BF} = \frac{P_0Q_0}{FP_0} = \frac{Q_0R}{P_0Q_0} = \frac{BQ_0}{BP_0} = \frac{BR}{BQ_0}$$

und

$$(62) \quad BF:BP_0:BQ_0:BR = 1:\tau:\tau^2:\tau^3.$$

In dieser geometrischen Reihe sind je zwei aufeinander folgende Strecken dem Sinne nach gleich oder entgegengesetzt, je nachdem τ positiv oder negativ ist. Die geometrische Bedeutung der vorstehenden Gleichungen wird durch Fig. 66 dargestellt. Trägt man die drei gleich großen und gleich gerichteten Strecken FF_2 , P_0P_2 , Q_0Q_2 auf, so schneiden sich die drei Geraden P_0F_2 , Q_0P_2 , RQ_2 in einem Punkte B_1 der zu FF_2 parallel gerichteten Geraden BB_2 .

Sind von den fünf Punkten B , F , P_0 , Q_0 , R entweder B , F , P_0 oder P_0 , Q_0 , R bekannt, so können hiernach die beiden anderen Punkte bestimmt werden. Es ist aber zu beachten, daß durch die drei Punkte B , F , P_0 wohl der Punkt R , nicht aber der Pol R_0 bestimmt wird. Zur Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Bahnevoluten genügen also nicht die drei Punkte B , F , P_0 , wohl aber die drei Pole P_0 , Q_0 , R_0 .

Wenn für zwei Punkte Z_1 , Z_2 , Fig. 61, der Ebene die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen und der Bahnevoluten K_1 , K_2 , M_1 , M_2 bekannt sind, so können die Krümmungsmittelpunkte der festen und der bewegten Polbahn F , B auch auf folgendem Wege bestimmt werden. Man bildet das Getriebe $M_1K_1Z_1Z_2K_2M_2$ aus den sechs Gliedern M_1M_2 , M_1K_1 , M_2K_2 , K_1Z_1 , K_2Z_2 , Z_1Z_2 , die in dieser Reihenfolge mit den Nummern 0 bis 5 bezeichnet sind. Das Glied 0 ruht; die Glieder 1, 3 und 2, 4 sind durch Schieber miteinander verbunden. Die Stäbe 3, 4 sind an ihrer Kreuzungsstelle durch zwei Schieber geführt, die durch ein Gelenk P_0 miteinander verbunden sind. Wenn die Gelenke Z_1 , Z_2 auf ihren gegebenen Bahnen geführt werden, so beschreibt das Gelenk P_0 die feste Polbahn des Gliedes 5, also der Ebene Z_1Z_2 . Zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes F dieser Polbahn sind demnach nur die Geschwindigkeit p und die Normalbeschleunigung n' des Gelenkes P_0 erforderlich. Wir erteilen dem Gliede 5 die geometrische Bewegung, setzen also seine Drehgeschwindigkeit gleich +1, seine Drehbeschleunigung gleich Null. Im Geschwindigkeitsplan, Fig. 62, ist hierdurch die Strecke $Z'_1Z'_2$ bestimmt durch die Bedingungen:

$$(Z_1Z_2, Z'_1Z'_2) = 90^\circ, \quad Z'_1Z'_2 = Z_1Z_2.$$

Die Punkte K_3, K_4 der Stäbe 3, 4, die zur Zeit t mit den Krümmungsmittelpunkten K_1, K_2 zusammenfallen, ruhen in diesem Zeitpunkt. Die Punkte K'_3, K'_4 fallen also mit dem Pol O' des Geschwindigkeitsplans zusammen und werden durch die Bedingungen:

$$Z'_1 O' \perp Z_1 K_3, \quad Z'_2 O' \perp Z_2 K_4$$

bestimmt. Die Geschwindigkeit $O'P'_0$ des Gelenkes P_0 kann zerlegt werden in die Geschwindigkeit $O'P'_3$ des vom Gelenk P_0 gedeckten Punktes P_3 des Stabes 3 und der Geschwindigkeit $P'_3P'_0$, womit der Schieber auf dem Stabe 3 sich bewegt. Sie kann ferner zerlegt werden in die Geschwindigkeit $O'P'_4$ des vom Gelenk gedeckten Punktes P_4 des Stabes 4 und der Verschiebungsgeschwindigkeit $P'_4P'_0$ des Schiebers auf diesem Stabe. Demnach wird die Polgeschwindigkeit

$$p = O'P'_0$$

bestimmt durch die Bedingungen:

$$K'_3 P'_3 Z'_1 \simeq K_3 P_3 Z_1$$

$$K'_4 P'_4 Z'_2 \simeq K_4 P_4 Z_2$$

$$P'_3 P'_0 \parallel K_1 Z_1, \quad P'_4 P'_0 \parallel K_2 Z_2.$$

Wie oben gezeigt ist (Gleichung 59), bestimmt die Polgeschwindigkeit p die Lage des Beschleunigungspols Q_0 im Lageplan:

$$(P_0 Q_0, O'P'_0) = 90^\circ, \quad P_0 Q_0 = O'P'_0 = p.$$

Im Beschleunigungsplan, Fig. 63, ist, da die Drehbeschleunigung des Gliedes 5 gleich Null ist:

$$(Z'_1 Z''_2, Z_1 Z_2) = 180^\circ, \quad Z'_1 Z''_2 = Z_1 Z_2$$

und der mit O'' bezeichnete Pol ergibt sich aus der Bedingung:

$$O'' Z'_1 Z''_2 \simeq Q_0 Z_1 Z_2.$$

Die Beschleunigung des von K_1 gedeckten Punktes K_3 läßt sich nach dem zweiten Verfahren des Abschnittes 9, jedoch einfacher noch durch folgende Überlegung ermitteln. Zur Zeit t ruht der Punkt K_3 ; zur Zeit $t + dt$ ist der Punkt J des Stabes Berührungspunkt der Evolute, und die Strecke $K_3 J$ hat die Länge

$$K_3 J = M_1 K_1 \cdot \frac{O' Z'_1}{K_3 Z'_1} dt,$$

da der Stab 3 in positivem Sinne mit der Drehgeschwindigkeit $\frac{O' Z'_1}{K_3 Z'_1}$ sich bewegt. Die unendlich kleine Geschwindigkeit des Punktes K_3

hat zur Zeit $t + dt$ demnach Richtung und Sinn der Strecke $M_1 K_1$ und die Größe

$$K_3 J_{\frac{O' Z_1'}{K_1 Z_1}} dt = M_1 K_1 \left(\frac{O' Z_1'}{K_1 Z_1} \right)^2 dt.$$

Daher hat die Beschleunigung $O'' K_3''$ des Punktes K_3 zur Zeit t Richtung und Sinn von $M_1 K_1$ und die Größe

$$O'' K_3'' = M_1 K_1 \left(\frac{O' Z_1'}{K_1 Z_1} \right)^2 = 150 \left(\frac{180}{360} \right)^2 = 38 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Ebenso hat die Beschleunigung $O'' K_4''$ des von K_2 gedeckten Punktes K_4 des Stabes 4 Richtung und Sinn von $M_2 K_2$ und die Größe

$$O'' K_4'' = M_2 K_2 \left(\frac{O' Z_2'}{K_2 Z_2} \right)^2 = 120 \left(\frac{260}{390} \right)^2 = 53 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Die Beschleunigung $O'' P_0''$ des Gelenkes P_0 wird nach Abschnitt 9 bestimmt:

$$K_3'' P_3'' Z_1'' \simeq K_3 P_3 Z_1$$

$$K_4'' P_4'' Z_2'' \simeq K_4 P_4 Z_2$$

$$(P_3' P_0', P_3'' p_3) = (P_3 Z_1, P_3' Z_1') = 90^\circ$$

$$P_3'' p_3 = 2 P_3' P_0' \frac{O' Z'}{K_1 Z_1} = 2 \cdot 185 \cdot \frac{180}{360} = 185 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(P_4' P_0', P_4'' p_4) = (P_4 Z_2, P_4' Z_2') = 90^\circ$$

$$P_4'' p_4 = 2 P_4' P_0' \frac{O' Z_2'}{K_2 Z_2} = 2 \cdot 187 \frac{260}{390} = 249 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$p_3 P_0'' \perp P_3'' p_3, \quad p_4 P_0'' \perp P_4'' p_4.$$

Die Projektion $O'' p$ der Beschleunigung $O'' P_0''$ des Gelenkes P_0 auf die Polbahnnormale BF hat die Größe

$$n' = O'' p = 124 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Der Krümmungshalbmesser $P_0 F$ der festen Polbahn hat den Sinn $O'' p$ und die Größe (Gleichung 34)

$$f = P_0 F = \frac{(O' P_0')^2}{O'' p} = \frac{205^2}{124} = 339 \text{ cm.}$$

Der Krümmungshalbmesser b der bewegten Polbahn ergibt sich darauf aus Gleichung (59):

$$b = P_0 B = \frac{p f}{p - f} = - \frac{205 \cdot 339}{134} = - 519 \text{ cm.}$$

Da die Vorzeichen von b und f verschieden sind, so sind die beiden Polbahnen entgegengesetzt gekrümmt; $P_0 B$ hat also den Sinn FP_0 .

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der beiden Glieder 1 und 2 brauchten für den vorliegenden Zweck nicht bestimmt zu werden.

18. Literaturangaben. Die Gegenstände der vorstehenden Mitteilung wurden in anderer Form in den folgenden Werken und Abhandlungen dargestellt:

Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1870, zweite Auflage 1879.

Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888.

Aronhold, Grundzüge der kinematischen Geometrie; Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses in Preußen, 1872.

Rittershaus: 1. Über die kinematische Kette. 2. Über die Beschleunigungen der ebenen Bewegung. Civilingenieur 1876 und 1877.

Mehmke: 1. Über die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich-veränderlichen Systems, Civilingenieur 1883. 2. Über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1890.

Grübler: 1. Über die Krümmung der Polbahnen. 2. Über die Kreispunktpunkte einer komplan bewegten Ebene. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1884, 1889 und 1892.

Rodenberg: 1. Die Bestimmung der quadratischen Verwandtschaft der Krümmungsmittelpunkte zweier Glieder einer ebenen kinematischen Kette, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover 1890. 2. Über die Kreispunktkurve eines ebenen Gelenkvierseits, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1891. 3. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittlung, Civilingenieur 1896.

R. Müller, Über die Krümmung der Bahnevoluten im starren ebenen System, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1891.

Wittenbauer: 1. Über die Wendepole der kinematischen Kette. 2. Über den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung. 3. Über die Beschleunigungspole der kinematischen Kette. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1895. 4. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittlung, Civilingenieur 1896.

Hartmann, Über die Krümmung der Polbahnen einer Vierzylinderkette, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1902.

Mohr: 1. Über die Beschleunigungen der ebenen Bewegung. 2. Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne. Civilingenieur 1879 und 1887.

Weitere Angaben über die einschlägige Literatur finden sich in den Werken von Schell und Burmester, in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Abschnitt Kinematik und in allen Bänden des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik.

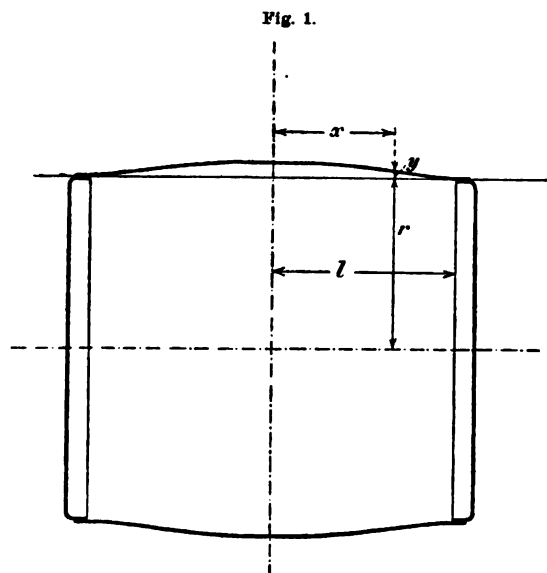
Der Einfluß der Stirnwände eines Kessels auf die Festigkeit der Mantelbleche.

Von H. SELLENTIN in Kiel.

Den Einfluß der Kesselstirnwände auf die Festigkeit der Mantelbleche hat man bisher nicht für wichtig genug gehalten, um sich eingehender mit ihm zu beschäftigen; man hat sich im allgemeinen damit begnügt, ihn als in geringem Maße entlastend anzusehen. Wenngleich die folgende Untersuchung zeigen wird, daß diese Ansicht selbst für die mittleren Teile des Mantels nicht unbedingt richtig ist, so wird sie doch auch ergeben, daß schon in geringer Entfernung von den Enden der Einfluß auf die *Querfestigkeit* verschwindend klein wird, und daß insofern die Vernachlässigung berechtigt erscheint. Ganz anders verhält es sich aber mit den in der Nähe der Stirnwände mit Notwendigkeit auftretenden *Biegungsspannungen*, welche naturgemäß um so größer werden, in je kürzerer Entfernung das Mantelblech den

seiner mittleren Querspannung entsprechenden größeren Radius annimmt. Da sich zu ihnen noch die von dem Druck gegen die Stirnwände herrührenden Längsspannungen gesellen, so ist klar, daß ihre algebraische Summe unter Umständen das zulässige Maß überschreiten kann, und daß es nicht angängig ist, sie kurzer Hand zu vernachlässigen.

Figur 1 stelle den Querschnitt eines mit dem inneren Überdruck



von p kg/qcm belasteten Kessels dar; die Maße sollen in cm gegeben sein. Der Mantel wird sich in der angegebenen Weise durchbiegen und somit an den Einspannstellen, welche ihre Lage unverändert

beibehalten sollen, auf der Innenseite eine Zugbeanspruchung von σ_b kg/qcm aufzunehmen haben. Bezeichnet δ die Blechdicke und r den Kesselradius, so ist die der gebräuchlichen Berechnung zugrunde gelegte ideelle Querspannung

$$(1) \quad k_z = \frac{p \cdot r}{\delta},$$

der gegenüber die wirklich eintretende Querspannung σ_i genannt werden soll. Die Längsspannung ist, soweit sie für die ganze Kessellänge als konstant angesehen wird,

$$(2) \quad \sigma_i = \frac{k_z}{2},$$

woraus sich die größte Zugspannung am Mantelende zu

$$(3) \quad \sigma_s = \sigma_b + \frac{k_z}{2}$$

ergibt.

Die Längsspannung σ_i ist zunächst bestrebt, eine Querkontraktion des Bleches von der Größe

$$(4) \quad c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sigma_i}{E} \cdot 2\pi r$$

herbeizuführen, welche ohne das Vorhandensein der Querspannungen eine Verkleinerung des Radius um

$$(5) \quad y' = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sigma_i}{E} \cdot r$$

nach sich ziehen würde; beträgt nun im Abstände x von der Mitte der Kessellänge die Ausbiegung y cm, so ist bei der Berechnung der Querspannung σ_q mit einer wirklichen Vergrößerung des Radius von $y + y'$ cm zu rechnen, woraus

$$(6) \quad \sigma_q = E \cdot \frac{y + y'}{r} = \frac{E \cdot y}{r} + \frac{\sigma_i}{m}$$

folgt.

Die umgekehrt durch σ_q hervorgerufene Verkürzung in der Längsrichtung kann außer Betracht bleiben, da angenommen werden soll, daß der Kessel keine einer Längenänderung hinderlichen Längsversteifungen besitze.

Es werde nun durch zwei radiale Schnitte ein Längsstreifen von der mittleren Breite db aus dem Mantel herausgeschnitten, aus welchem durch zwei in der Entfernung x und $x + dx$ von der Mitte aus gelegte Querschnitte ein kurzes Stück abgetrennt werde, welches in Fig. 2 dargestellt ist. Dasselbe wird in der Querrichtung beiderseits durch die als gleichmäßig verteilt zu denkende Spannung σ_q mit einer Kraft von der Größe

$$(7) \quad dk = \sigma_q \cdot \delta \cdot dx$$

angegriffen. Die sich hieraus ergebende nach innen gerichtete Resultante ist

$$(8) \quad dk \cdot d\varphi = \sigma_i \cdot \frac{\delta}{r} \cdot db \cdot dx,$$

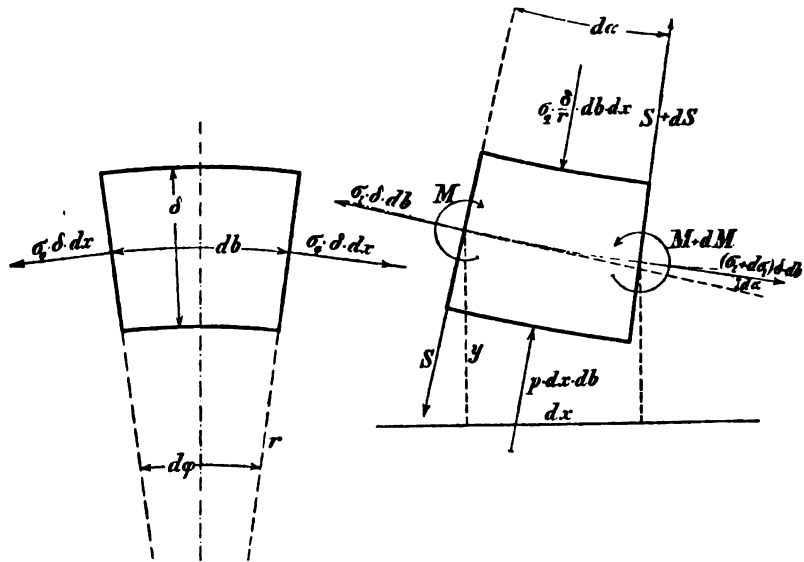
welche dem nach außen gerichteten Druck

$$p \cdot db \cdot dx$$

entgegenwirkt.

In der Längsrichtung wirkt die Längskraft $\delta \cdot \sigma_i \cdot db$ nach links und $\delta(\sigma_i + d\sigma_i)db$ nach rechts; außerdem sind die Scheerkräfte S und $S + dS$ sowie die Momente M und $M + dM$ tätig.

Fig. 2.



Unter der gewöhnlichen Voraussetzung, daß wegen der Kleinheit der Durchbiegungen die Bogenlänge ds des Elementes gleich dx , der Tangentenneigungswinkel $\alpha = \tan \alpha = \frac{dy}{dx}$ und der reziproke Wert des Krümmungsradius

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

gesetzt werden könne, ist offenbar Gleichgewicht vorhanden, wenn

$$(9) \quad \left(p - \sigma_i \cdot \frac{\delta}{r} \right) db \cdot dx + dS + \delta \cdot \sigma_i \cdot db \cdot d\alpha = 0,$$

$$(10) \quad \delta \cdot d\sigma_i \cdot db - S \cdot d\alpha = 0,$$

$$(11) \quad dM + S dx = 0$$

ist; hinzu tritt noch die Biegungsgleichung

$$(12) \quad M = E \cdot J \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{E \cdot \delta^3}{12} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot db.$$

Aus (11) folgt zunächst

$$(13) \quad S = - \frac{E \delta^3}{12} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot db$$

und sodann aus (10):

$$\frac{d\sigma_i}{dx} = - \frac{E \delta^3}{12} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

und durch Integration

$$(14) \quad \begin{aligned} \sigma_i &= C - \frac{E \delta^3}{24} \cdot \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \\ &= C - \frac{E \cdot \delta^3}{24 \varrho^2}. \end{aligned}$$

Solange der Krümmungsradius ϱ der elastischen Linie im Vergleich zur Blechdicke δ sehr groß ist, kann $\frac{E \delta^3}{24 \varrho^2}$ gegen C vernachlässigt und somit σ_i als konstant angesehen werden.

Aus Gleichung (9) ergibt sich nun, da

$$\frac{dS}{dx} = - E \cdot \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} \cdot db$$

ist, die Differentialgleichung der elastischen Linie zu

$$(15) \quad \left(p - \sigma_i \cdot \frac{\delta}{r} \right) - E \cdot \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + \delta \cdot \sigma_i \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

welche nach Einsetzen des Wertes von σ_i aus (6) die Gestalt annimmt:

$$(15a) \quad p - \frac{\sigma_i \cdot \delta}{m \cdot r} - \frac{E}{r^2} \cdot y + \delta \sigma_i \frac{d^2 y}{dx^2} - E \cdot \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Abgekürzt läßt sie sich

$$(15b) \quad A - B \cdot y + C \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - D \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

schreiben, worin sämtliche Konstanten positiv sind.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 \operatorname{Cof} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} + a_2 \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda} \\ &\quad + a_3 \operatorname{Cof} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda} + a_4 \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda}, \end{aligned}$$

worin a_0 , ξ und λ aus der Differentialgleichung zu bestimmen sind und a_1 , a_2 , a_3 und a_4 die willkürlichen Koeffizienten bedeuten. Da indessen die elastische Linie im vorliegenden Falle offenbar symmetrisch zur y -Achse liegen muß, so kann darauf sofort Rücksicht genommen und

$$(16) \quad y = a_0 + a_1 \operatorname{Cof} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} + a_2 \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda}$$

gesetzt werden.

Die Differentialquotienten sind

$$(16a) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\lambda}\right) \ominus \sin \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} - \left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_2}{\xi}\right) \oslash \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda};$$

$$(16b) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{a_1}{\xi^2} + \frac{2a_2}{\xi\lambda} - \frac{a_1}{\lambda^2}\right) \oslash \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} + \left(\frac{a_2}{\xi^2} - \frac{2a_1}{\xi\lambda} - \frac{a_2}{\lambda^2}\right) \ominus \sin \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda};$$

$$(16c) \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \left(\frac{a_1}{\xi^4} + \frac{4a_2}{\xi^3\lambda} - \frac{6a_1}{\xi^2\lambda^2} - \frac{4a_2}{\xi\lambda^3} + \frac{a_1}{\lambda^4}\right) \oslash \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} \\ + \left(\frac{a_2}{\xi^4} - \frac{4a_1}{\xi^3\lambda} - \frac{6a_2}{\xi^2\lambda^2} + \frac{4a_1}{\xi\lambda^3} + \frac{a_2}{\lambda^4}\right) \ominus \sin \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda};$$

sie sind in Gleichung (15b) einzusetzen, welche sodann identisch erfüllt sein muß. Daraus folgen die drei Bedingungsgleichungen für a_0 , λ und ξ , nämlich:

$$(17a) \quad A - B \cdot a_0 = 0$$

$$(17b) \quad -Ba_1 + C\left(\frac{a_1}{\xi^2} + \frac{2a_2}{\xi\lambda} - \frac{a_1}{\lambda^2}\right) - D\left(\frac{a_1}{\xi^4} + \frac{4a_2}{\xi^3\lambda} - \frac{6a_1}{\xi^2\lambda^2} - \frac{4a_2}{\xi\lambda^3} + \frac{a_1}{\lambda^4}\right) = 0$$

$$(17c) \quad -Ba_2 + C\left(\frac{a_2}{\xi^2} - \frac{2a_1}{\xi\lambda} - \frac{a_2}{\lambda^2}\right) - D\left(\frac{a_2}{\xi^4} - \frac{4a_1}{\xi^3\lambda} - \frac{6a_2}{\xi^2\lambda^2} + \frac{4a_1}{\xi\lambda^3} + \frac{a_2}{\lambda^4}\right) = 0.$$

Aus (17a) ergibt sich

$$(18) \quad a_0 = \frac{A}{B};$$

wird (17c) mit a_1 multipliziert und von der mit a_2 multiplizierten Gleichung (17b) abgezogen, so erhält man nach Division mit $2\frac{a_1^2 + a_2^2}{\xi\lambda}$:

$$(19a) \quad C - \frac{2D}{\xi^2} + \frac{2D}{\lambda^2} = 0;$$

multipliziert man hingegen (17b) mit a_1 und (17c) mit a_2 , so läßt sich die Summe der Gleichungen durch $(a_1^2 + a_2^2)$ teilen und nimmt folgendes Aussehen an;

$$(19b) \quad -B + \frac{C}{\xi^2} - \frac{C}{\lambda^2} - \frac{D}{\xi^4} + \frac{6D}{\xi^2\lambda^2} - \frac{D}{\lambda^4} = 0.$$

Die Glieder $\frac{C}{\xi^2}$ und $\frac{C}{\lambda^2}$ lassen sich mit Hilfe von Gleichung (19a) eliminieren, worauf sich

$$-B + \frac{D}{\xi^4} + \frac{2D}{\xi^2\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4} = 0$$

oder

$$\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \sqrt{\frac{B}{D}}$$

ergibt. Da nach (19a) aber

$$\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{C}{2D}$$

ist, so wird schließlich

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{2\sqrt{B \cdot D} + C}{4D};$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2\sqrt{B \cdot D} - C}{4D}.$$

Es ist jetzt zweckmäßig, die Koeffizienten der Gleichung (15b) wieder durch diejenigen von (15a) zu ersetzen und

$$A = p - \frac{\sigma_i}{m} \cdot \frac{\delta}{r},$$

$$B = \frac{\delta \cdot E}{r^2},$$

$$C = \delta \cdot \sigma_i,$$

$$D = \frac{E \cdot \delta^2}{12}$$

zu schreiben; man bekommt

$$(20a) \quad a_0 = \frac{r}{E} \left(\frac{p \cdot r}{\delta} - \frac{\sigma_i}{m} \right);$$

$$(20b) \quad \frac{1}{\xi^2} = \frac{\sqrt{3}}{\delta \cdot r} + \frac{3\sigma_i}{\delta^2 \cdot E};$$

$$(20c) \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sqrt{3}}{\delta \cdot r} - \frac{3\sigma_i}{\delta^2 \cdot E},$$

und führt zweckmäßiger Weise aus Gleichung (1) und (2) noch die ideelle Querspannung k_s ein, wobei $\frac{1}{m} = 0,3$ gesetzt werden kann. Dann wird

$$(21a) \quad a_0 = 0,85 r \cdot \frac{k_s}{E};$$

$$(21b) \quad \frac{1}{\xi^2} = \frac{1,732}{r^2} \cdot \frac{k_s}{p} \left(1 + 0,866 \frac{k_s^2}{p \cdot E} \right);$$

$$(21c) \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1,732}{r^2} \cdot \frac{k_s}{p} \left(1 - 0,866 \frac{k_s^2}{p \cdot E} \right).$$

Letzterer Wert muß positiv sein, wenn die Lösung brauchbar sein soll; da $E = 2 \cdot 10^6$ kg/qcm und $k_s < 1200$ kg/qcm, $p > 4$ kg/qcm anzunehmen ist, so ist diese Bedingung erfüllt.

Die Gleichungen (20b) und (20c) lassen übrigens erkennen, daß ξ und λ gleich werden, sobald die Längsspannung σ_i vernachlässigt wird.

Nunmehr handelt es sich um die Bestimmung der Konstanten a_1 und a_2 , welche auf Grund der Bedingungen der Aufgabe vorgenommen werden muß; diese sind

$$(a) \quad y = 0 \text{ für } x = \pm l,$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } x = \pm l,$$

oder mit Benutzung von (16) und (16a):

$$(22a) \quad a_0 + a_1 \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + a_2 \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} = 0;$$

$$(22b) \quad \left(\frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\lambda} \right) \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_2}{\xi} \right) \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} = 0.$$

Letztere Gleichung ergibt

$$a_1 = -a_2 \frac{\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}},$$

welcher Wert in (22a) eingesetzt

$$a_2 = 2a_0 \cdot \frac{\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}}$$

liefert; a_1 ist demnach

$$a_1 = -2a_0 \cdot \frac{\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}}.$$

Nunmehr lautet die Gleichung der elastischen Linie

$$(23) \quad y = 0,85r \cdot \frac{k_s}{E} \left(1 - 2 \frac{\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}} \operatorname{Cof} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} \right. \\ \left. + 2 \frac{\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}} \cdot \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda} \right),$$

aus welcher die Größe der Querspannung σ_y nach Gleichung (6) zu

$$(24) \quad \sigma_y = k_s \left(1 - 1,7 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} \right) \operatorname{Cof} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} - \left(\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} \right) \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}} \right)$$

und die der Biegungsspannung nach der Gleichung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = E \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

unter Benutzung von (16b) zu

$$(25a) \quad \sigma_b = \delta \cdot E \cdot a_0 \cdot \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} \right) \operatorname{Cof} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} + \left(\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} \right) \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}}$$

folgt. Wird in (25a) der Wert von α_0 aus (21a) und der von $\left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right)$ aus (21b) und (c) eingesetzt, so findet man

$$\sigma_b \sim 3k_s \cdot \frac{\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\xi} \operatorname{Cos} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}\right) \operatorname{Cos} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} + \left(\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cos} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}\right) \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}}.$$

Die Gestalt der für σ_q und σ_b gefundenen Werte läßt erkennen, daß bei langen Kesseln Maxima und Minima der Beanspruchungen abwechseln; für σ_q ergeben sich die Orte der größten bzw. kleinsten Werte durch die Bedingungsgleichung

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

oder, unter Benutzung von Gleichung (16a):

$$\left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_2}{\xi}\right) \operatorname{Cos} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda} - \left(\frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\lambda}\right) \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} = 0,$$

welche nach Einsetzung von a_1 und a_2 übergeht in

$$(26) \quad \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} \cdot \operatorname{Cos} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda} = \operatorname{Cos} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} \cdot \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda}.$$

Diese Gleichung ist stets erfüllt für

$$x = l \quad \text{und} \quad x = 0;$$

dazwischen können bei langen Kesseln indessen noch mehrere andere Werte von x existieren, für die sie ebenfalls erfüllt ist, und für welche die Bedingungsgleichung lautet:

$$\operatorname{Tang} \frac{l}{\xi} \operatorname{Tang} \frac{x}{\lambda} = \operatorname{Tang} \frac{x}{\xi} \operatorname{Tang} \frac{l}{\lambda}.$$

Im allgemeinen interessiert nur der *größte* Wert von σ_q , welcher bei sehr kurzen Kesseln in der Mitte liegt und dann, da $x = 0$ zu setzen ist, den Wert

$$\sigma_q = k_s \left(1 - 1,7 \frac{\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Cos} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}} \right)$$

besitzt. Dieser Ausdruck hat auch für die in Wirklichkeit ausschließlich vorkommenden längeren Kessel Interesse und läßt sich dann für die Zwecke der Rechnung sehr vereinfachen. Man kann nämlich

$$\operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} = \operatorname{Cos} \frac{l}{\xi} = \frac{e^{\frac{l}{\xi}}}{2}$$

und

$$\operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi} = 2 \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\xi} = \frac{e^{\frac{2l}{\xi}}}{2}$$

458 Der Einfluß der Stirnwände eines Kessels auf die Festigkeit der Mantelbleche
 setzen, da nach Gleichung (21b) und (c) für $p \leq 20 \text{ kg/qcm}$ und $R, \geq 600 \text{ kg/qcm}$

$$\xi \leq \frac{r}{7}$$

und somit

$$\frac{l}{\xi} \geq 7 \cdot \frac{l}{r}$$

ist. Wird $l = \frac{r}{2}$ als der äußerste vorkommende Fall angesehen, so ist immer noch

$$\frac{l}{\xi} > 3,5,$$

wofür obige Beziehungen als gültig angesehen werden können. Man findet dann, wenn noch $\sin 2 \frac{l}{\lambda}$ gegen $\sin 2 \frac{l}{\xi}$ vernachlässigt wird,

$$(27a) \quad \sigma_{\text{mit.}} = k_s \left(1 - 1,7 \frac{\frac{\lambda}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} + \cos \frac{l}{\lambda}}{e^{\frac{l}{\xi}}} \right),$$

dessen Wert ebensowohl größer wie kleiner als k_s sein kann, sich aber von ihm wegen des großen Nenners $e^{\frac{l}{\xi}}$ nicht sehr unterscheidet.

Unter den oben über die Werte von $\frac{l}{\xi}$ gemachten Voraussetzungen kann die Bedingungsgleichung (26a) ebenfalls vereinfacht werden, da $\text{Tang} \frac{l}{\xi}$ und auch noch $\text{Tang} \frac{x}{\xi}$ für die von der Mitte weiter entfernt liegenden Maxima oder Minima gleich 1 gesetzt werden kann. Es wird dann

$$(28) \quad \begin{aligned} \text{tang} \frac{x}{\lambda} &= \text{tang} \frac{l}{\lambda}; \\ \frac{x}{\lambda} &= \frac{l}{\lambda} - n \cdot \pi. \end{aligned}$$

Für $n = 1$ erhält man das den Stirnwänden am nächsten liegende Maximum, welches nach Gleichung (24) unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\sin \frac{x}{\lambda} = - \sin \frac{l}{\lambda};$$

$$\cos \frac{x}{\lambda} = - \cos \frac{l}{\lambda};$$

$$\cos \frac{x}{\xi} = \sin \frac{x}{\xi} = \frac{e^{\frac{x}{\xi}}}{2};$$

$$\cos \frac{l}{\xi} = \sin \frac{l}{\xi} = \frac{e^{\frac{l}{\xi}}}{2}$$

und nach Vernachlässigung von $\sin 2 \frac{l}{\lambda}$ den Wert erhält

$$\sigma_{q \max} = k_s \left(1 - 0,85 \frac{e^{\frac{x}{\xi}} \left[- \left(\cos \frac{l}{\lambda} + \frac{\lambda}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} \right) \cos \frac{l}{\lambda} + \left(\frac{\lambda}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \sin \frac{l}{\lambda} \right) \cdot \sin \frac{l}{\lambda} \right]}{e^{\frac{l}{\xi}}} \right);$$

$$\sigma_{q \max} = k_s \left(1 + 0,85 \frac{e^{\frac{x}{\xi}}}{e^{\frac{l}{\xi}}} \right).$$

Da nun

$$\frac{x}{\xi} = \frac{l}{\xi} - \pi \frac{\lambda}{\xi}$$

oder angenähert

$$\frac{x}{\xi} = \frac{l}{\xi} - \pi$$

ist, so erhält man

$$\sigma_{q \max} \sim k_s \left(1 + \frac{0,85}{e^{\pi}} \right) \sim 1,04 k_s.$$

Bei langen Kesseln ruft also die Einspannung des Mantels eine maximale *Vergrößerung* der Querspannung von $\sim 4\%$ hervor.

Die Biegungsspannung hat ebenfalls mehrere Maxima und Minima; hier genüge es indessen, ihre Größe an den Stirnwänden zu berechnen, welche zwar kein theoretisches Maximum ist, aber den höchsten vor kommenden Zahlenwert hat. Nach Gleichung (25b) wird für $x = l$:

$$\sigma_b \sim 3k_s \frac{-\frac{1}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sin \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\xi}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sin 2 \frac{l}{\xi}}$$

$$\sim \frac{3}{2} k_s \frac{-\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sin 2 \frac{l}{\xi}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sin 2 \frac{l}{\xi}}$$

und mit Benutzung der früheren Vernachlässigungen

$$\sigma_b \sim \frac{3}{2} k_s.$$

Nach Gleichung (3) ist die gesamte Zugbeanspruchung

$$\sigma_s = \sigma_b + 0,5 k_s,$$

also

$$\sigma_s \sim 2 k_s.$$

Die Zugbeanspruchung auf der Innenseite des Kesselmantels ist an den Stirnwänden mithin doppelt so groß wie die ideale Querspannung.

Tatsächlich wird dieser hohe Wert allerdings nicht erreicht werden, da die gebördelten Ränder der Stirnplatten nicht als starr anzusehen sind; ein Nachgeben derselben führt aber eine Verminderung der Biegungsbeanspruchung herbei. Immerhin ist aber zu schließen, daß der unmittelbar an die Stirnwände stoßende Teil des Mantelbleches in der Längsrichtung wesentlich stärker beansprucht wird, als irgend ein anderer Teil desselben in der Querrichtung.

Kiel, den 5. Oktober 1903.

Der dreifach statisch unbestimmte Bogenträger unter der Einwirkung beliebig gerichteter Kräfte.

Von ADOLF LUDIN in Karlsruhe.

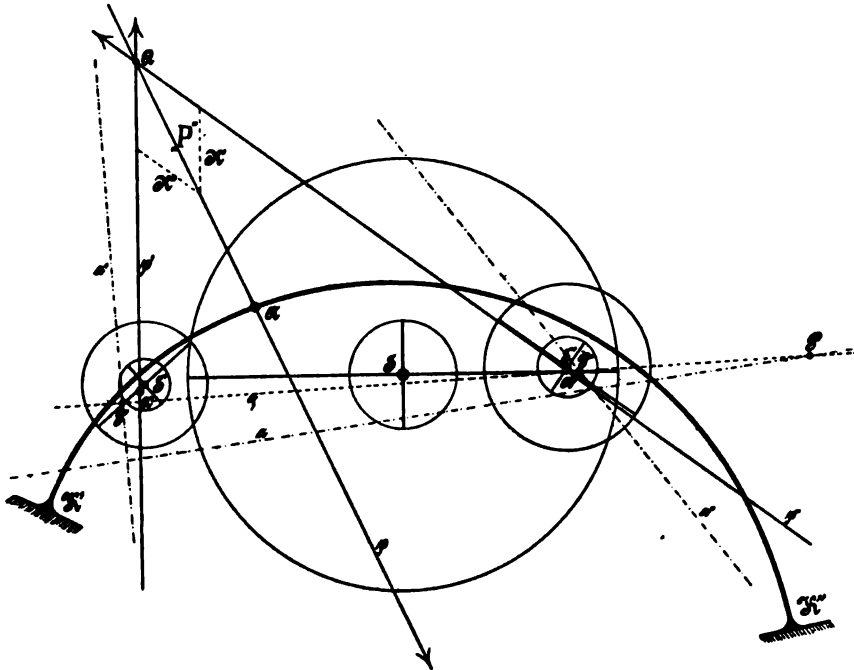
Mit Hilfe der von Culmann und Ritter-Zürich geschaffenen synthetischen Theorie der elastischen Formänderungen soll hier ein Satz über den Einfluß beliebig gerichteter Kräfte auf die Reaktionen des dreifach statisch unbestimmten Bogenträgers abgeleitet werden, der einen interessanten Einblick in das Spiel der Kräfte an dieser Konstruktion gestatten wird.

Zuvor aber wird es nützlich sein, die grundlegenden Untersuchungen der genannten Schriftsteller, wenigstens in ihren Ergebnissen, kurz nochmals hier wiederzugeben.

Schreibt man jedem Achselement (ds) eines elastischen Balkens vom (festen oder veränderlichen) Trägheitsmoment J das „elastische Gewicht“ $dG = \frac{ds}{EJ}$ und eine Zentralellipse mit den Halbachsen:

$i_1 = \sqrt{\frac{J}{F}}$ normal zur Balkenachse und: $i_2 = i_1 \sqrt{\frac{E \cdot \alpha}{G}}$ parallel zu derselben zu, so fällt der augenblickliche Drehpunkt für die Bewegung, welche, unter der Einwirkung einer äußern Kraft, der eine Endquerschnitt des Balkenelements gegenüber dem andern ausführt, zusammen mit dem Antipol dieser Kraft bezüglich der eben bestimmten Ellipse: der „Elastizitätsellipse“ des Balkenelements. [Dabei bezeichnen E und G bez. den Elastizitätsmodul für Zug und Schub, α eine von der Querschnittsform abhängige Konstante, F die Querschnittsgröße.] Ist der Krümmungshalbmesser der Balkenachse verhältnismäßig groß gegenüber den Querschnittsabmessungen, so kann man, statt für unendlich kleine Elemente ds , eine solche Elastizitätsellipse auch für Elemente von

endlicher Länge Δs konstruieren. Ihre Halbachsen sind bez.: $i_1 = \sqrt{\frac{J}{F}}$, $i_2 = \sqrt{\frac{\Delta s^2}{12} + \frac{x \cdot E}{G} \cdot i_1^2}$, und die eben mitgeteilten Lagebeziehungen zwischen angreifender Kraft und Drehpunkt gelten auch für sie. Endlich kann man auch die Elastizitätsellipsen mehrerer solcher Elemente Δs , die in ihrer Gesamtheit einen Balken bilden, sei es durch Seilpolygone (Culmann, Graph. Statik 2. Aufl. S. 475; Ritter, der elast. Bogen berechnet mit Hilfe der graphischen Statik) oder durch ein direktes geometrisches Verfahren (Schweiz. Bzt. vom 13. Juni 1903) zu einer einzigen „Elastizitätsellipse des ganzen Balkens“ vereinigen, für welche wieder die gleichen Beziehungen bestehen bleiben.



Damit hat man nun die Mittel zur Hand, um in anschaulicher Weise einen Zusammenhang zwischen den angreifenden Kräften und den Kämpferdrücken eines beiderseits eingespannten Bogens herzustellen. Greift z. B. den, in der Figur durch seine Achslinie dargestellten Bogen im Punkte A eine Kraft „ P “ an, und denkt man sich das Widerlager bei K' entfernt, so wird der, nunmehr statisch bestimmt gewordene Balken eine Formänderung erfahren, die sich ohne weiteres feststellen läßt. Insbesondere wird der Kämpferpunkt K' eine Verschiebung er-

leiden, die, nach den eben wiedergegebenen Sätzen, sich auffassen läßt als eine Drehung um den Antipol (P'') der Kraftlinie p bezüglich der Elastizitätsellipse S'' des Bogenstücks $\mathfrak{A}K''$, das allein der Wirkung der Kraft „ P “ unterliegt.¹⁾ Sind nun die Widerlager tatsächlich als starr anzusehen, so muß zur Herstellung des wirklich eintretenden Zustandes eine Kraft R' als Ersatz der Wirkung des weggenommen gedachten Widerlagers K' hinzugefügt werden, deren Einfluß sich auf den ganzen Bogen erstreckt und die imstande sein muß, die durch „ P “ hervorgerufene Verschiebung des Punktes K' wieder rückgängig zu machen. Dazu ist aber erforderlich, daß ihre Richtungslinie (p') die Antipolare des Drehpunktes P'' , nun aber bezüglich der Elastizitätsellipse S des *ganzen* Bogens sei. Analoge Beziehungen bestehen zwischen der Richtungslinie p und derjenigen der *rechtsseitigen* Kämpferkraft (p''): Auch diese ist die Antipolare bez. der Ellipse S zu einem Punkte P' , der bestimmt ist als Antipol der Linie p bezüglich der Ellipse S' des Bogenstückes $K'\mathfrak{A}$. —

Wenn wir nun auf Grund der soeben wiedergegebenen Beziehungen uns einen weiteren Einblick in den Zusammenhang zwischen der Lage einer angreifenden Kraft und der ihr entsprechenden Kämpferdrücke verschaffen wollen, so wird es wegen der eben erwähnten Analogie im Verhalten der beiden Seiten des Bogens genügen, zunächst nur den linken Kämpferdruck R' näher ins Auge zu fassen: alle sich für ihn ergebenden Beziehungen lassen sich ohne weiteres auch auf die andere Seite mit bloßer Änderung der Indices ($P' - P''$) übertragen.

Lassen wir nun die Kraftlinie p sich um ihren Angriffspunkt \mathfrak{A} drehen: Dann beschreibt, nach einem bekannten Satze der Polarentheorie, P'' , ihr Antipol bezüglich der Ellipse S'' , auf a'' , der Antipolaren zu \mathfrak{A} , eine dem Strahlenbüschel der p projektive (und involutorische) Punktreihe. Die Richtungslinie des entsprechenden Kämpferdrucks (p') muß dann aber, und zwar nach dem reziproken Satze zu dem eben angeführten, einen der Punktreihe P'' und damit auch dem Strahlenbüschel der p projektiven (und involutorischen) zweiten Strahlenbüschel beschreiben, dessen Träger \mathfrak{A}' der Antipol der Geraden a'' , nun aber bezüglich der Ellipse S ist. Der Schnittpunkt Q von p und p' beschreibt, als Schnitt zweier projektiven Strahlenbüschel, einen Kegelschnitt.

Daß die jeweils entsprechende rechtsseitige Kämpferkraft (p'') stets durch denselben bez. Punkt Q gehen muß, läßt sich rein geo-

1) In der Figur sind die Ellipsen durch ihre Halbachsen nebst ein- und umbeschriebenem Kreis angegeben.

metrisch aus den Eigenschaften der Trägheitsellipse beweisen, es folgt aber einfacher daraus, daß R' und R'' ja mit „P“ im Gleichgewicht stehen müssen. Die Verbindungslinie q von P' und P'' umhüllt einen zweiten Kegelschnitt, sie ist die Antipolare des Punktes Q bezüglich der Ellipse S .

Von dem Kegelschnitt, auf dem sich Q bewegt, lassen sich leicht die fünf zu seiner Bestimmung erforderlichen Punkte angeben: es sind dies zunächst \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' und \mathfrak{A}'' , zwei weitere ergeben sich daraus, daß, wenn p durch S' oder S'' geht, das entsprechende p'' bzw. p' durch S gehen muß, weil nämlich der betreffende Punkt P' bzw. P'' ins Unendliche rückt.

Aus der Ableitung ergibt sich ferner, daß auch dann, wenn die den Bogen angreifende Kraft „P“ sich um einen ganz beliebigen Punkt der Ebene dreht, immer noch dieselben Beziehungen bestehen bleiben, sofern nur ihre Wirkung stets an einem und demselben Querschnitt \mathfrak{A} auf den Balken übertragen wird. Ganz allgemein gilt also der Satz: *Dreht sich eine, den dreifach statisch unbestimmten Bogen stets an demselben Querschnitt angreifende Kraft um einen festen Punkt, so drehen sich auch die beiden ihr entsprechenden Kämpferdrücke um je einen festen Punkt, und die zugehörige Kämpferdruckschnittlinie ist ein Kegelschnitt, der durch die drei Drehpunkte geht.*

In welcher Weise sich dieses Ergebnis für die praktische Berechnung eines, verschieden gerichteten Kräften unterworfenen Bogens nutzbar machen ließe, ist leicht einzusehen; meist wird man es aber vorteilhafter finden, alle Kräfte nach zwei bestimmten Richtungen zu zerlegen und für diese Richtungen die Einflußlinien zu zeichnen (vgl. die genannten Quellen).

Karlsruhe im Juli 1903.

Kleinere Mitteilungen.

Konstruktion der Krümmungsachse und des Mittelpunkts der Schmiegun- gskugel einer durch Grundriß und Aufriß gegebenen Kurve.

Beschreibt ein Punkt p eine beliebige Raumkurve und trägt man von p aus in der Tangente der Kurve eine beliebige, aber konstante Länge immer in demselben Sinne ab, so beschreibt der Endpunkt q eine neue Kurve¹⁾, welche, wie nachher bewiesen werden soll, die Eigenschaft hat, daß ihre Normalebene in q die Krümmungsachse der ersten Kurve zur Stelle p enthält, sowie daß ihre zur Stelle q gehörige Krümmungsachse den Mittelpunkt der zur Stelle p gehörigen Schmiegun-
gskugel der ersten Kurve enthält. Hieraus ergibt sich folgende Lösung der in der Überschrift genannten beiden Aufgaben. Ist nur die Krümmungsachse der Bahn von p verlangt, so konstruiert man in der angegebenen Weise die Bahn des Punktes q und bestimme den Schnitt der zu den Punkten p und q gehörigen Normalebenen beider Kurven. Um auch den Mittelpunkt der zur Stelle p gehörigen Schmiegun-
gskugel der gegebenen Kurve zu finden, trage man von dem Punkte q aus in der Tangente seiner Bahn wiederum eine beliebige, aber konstante Länge ab und zeichne die Bahn des Endpunktes q_1 .²⁾ Die Normalebenen der gegebenen Kurve und der beiden Hilfskurven in den Punkten p , q , q_1 schneiden sich dann offenbar in dem gesuchten Punkt. Die darstellend-geometrische Durchführung dieser Konstruktionen bietet keine Schwierigkeiten. Die Spuren der drei Normalebenen braucht man selbstverständlich nicht zu konstruieren, sondern man verwendet die durch p , bzw. q und q_1 gehenden Hauptlinien („Spurparallelen“) der fraglichen drei Ebenen.

Durch Fortsetzung des Verfahrens kann man auch die Aufgabe lösen, bei einer durch drei Projektionen gegebenen Kurve in einem Raum von vier Dimensionen den Mittelpunkt des zu irgend einer Stelle der Kurve gehörigen kugelartigen dreidimensionalen Schmiegun-
gsraumes zu konstruieren (d. h. den Punkt, der von fünf unendlich benachbarten Punkten der Kurve gleichen Abstand hat), und die entsprechende Aufgabe für eine beliebige Kurve in einem n -dimensionalen Raum.³⁾

1) Sie wird nach Brocard eine Äquitangentialkurve der gegebenen Kurve genannt, s. Loria-Schütte, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1902, S. 567.

2) Man könnte diese Kurve eine Äquitangentialkurve zweiter Ordnung der ursprünglichen Kurve nennen.

3) Die entsprechende Konstruktion für die Ebene, darin bestehend, daß man die Normale der gegebenen Kurve in p mit der Normale der Bahn von q schneidet, wodurch man den zur Stelle p gehörigen Krümmungsmittelpunkt der gegebenen

Die Richtigkeit der obigen Behauptungen läßt sich einsehen wie folgt. Sie sind ohne Zweifel richtig für jede sphärische Kurve, denn trägt man in den Tangenten einer solchen eine beliebige konstante Länge ab, so liegen die Endpunkte auf einer Kugel, welche zu der Kugel, auf der die gegebene Kurve liegt, konzentrisch ist. Wir können uns aber bei einer nicht-sphärischen Kurve durch vier unendlich benachbarte Punkte irgend eine sphärische Kurve hindurchgelegt denken, und diese wird mit der gegebenen Kurve an der betreffenden Stelle die Tangente, Normalebene, Krümmungsachse und den Mittelpunkt der Schmiegunskugel gemeinschaftlich haben. Ferner wird die mit Hilfe des Punktes q aus ihr abgeleitete Kurve noch drei unendlich benachbarte Punkte mit der auf dieselbe Art aus der gegebenen Kurve abgeleiteten Hilfskurve gemein haben, sodaß hier noch die Tangente, Normalebene und Krümmungsachse übereinstimmen.

Stuttgart.

R. MEHMKE.

Tafel der Antilogarithmen für die Basis 2.

Von J. SCHNÖCKEL in Düsseldorf.

Veranlassung zur Berechnung einer Antilogarithmentafel für die Basis 2 gab dem Verfasser die Herstellung eines antilogarithmischen Flächenmaßstabes, den er in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1900, Seite 413 u. flg. beschrieben hat.¹⁾ Die Einrichtung der vorliegenden, vierstelligen Tafel, welche außer zur Flächenberechnung auch anderen rechnerischen Zwecken dienen kann, ist folgende.

In der Spalte L stehen die Logarithmen von 0,00 bis 10,00, rechts deren Numeri und in Spalte δ deren Differenzen in Einheiten der vierten Stelle. Die römischen Ziffern I, II ... in der ersten Spalte bedeuten, daß bei den Numeris hinter die erste, zweite, etc. Stelle ein Komma zu setzen ist. Bei Logarithmen zwischen 10,00 und 20,00 läßt man die 10 fort, fügt 0,034 hinzu und erhält rechts den Numerus. Letzterem entsprechen die Ziffern IV, V ...

Zur Erklärung seien folgende vier Beispiele gegeben:

- 1) Num 3,462 = 11,02,
- 2) log 1,083 = 0,115,
- 3) Num 13,6 = 1000 · Num 3,634 = 12420,
- 4) log 1100 = log 1,100 + 10 - 0,034 = 10,104.

Kurve erhält, ist, wie ich nachträglich bemerkt habe, schon von einigen angegeben worden, z. B. von Nicolaïdes, Nouv. Ann. de Mathématiques 1866, p. 383, Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 63 unten und Loria a. a. O. Ich erwähne noch, daß alle hier besprochenen Konstruktionen richtig bleiben, wenn man projektive Maßbestimmung oder nicht-euklidische Geometrie zugrunde legt. Die fragliche Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes einer ebenen Kurve gilt deshalb auch für sphärische Kurven und allgemeiner für Kurven auf beliebigen Flächen konstanten Krümmungsmaßes, wobei natürlich sphärische bzw. geodätische Tangenten und Normalen zu benützen sind und der Mittelpunkt des sphärischen bzw. geodätischen Krümmungskreises erhalten wird. Analytische Beweise dafür werde ich im Archiv der Mathematik und Physik mitteilen.

1) Vgl. R. MEHMKE, Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, Seite 1028, Anmerkung 423.

	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
I	0,0	1000	1007	1014	1021	1028	1035	1042	1050	1057	1064	8
	0,1	1072	1079	1087	1094	1102	1110	1117	1125	1133	1141	8
	0,2	1149	1157	1165	1173	1181	1189	1197	1206	1214	1223	8
	0,3	1231	1240	1248	1257	1266	1275	1283	1292	1301	1310	10
	0,4	1320	1329	1338	1347	1357	1366	1376	1385	1395	1404	10
IV	0,5	1414	1424	1434	1444	1454	1464	1474	1485	1495	1505	11
	0,6	1516	1526	1537	1548	1558	1569	1580	1591	1602	1613	12
	0,7	1625	1636	1647	1659	1670	1682	1693	1705	1717	1729	12
	0,8	1741	1753	1765	1778	1790	1803	1815	1828	1840	1853	13
	0,9	1866	1879	1892	1905	1919	1932	1945	1959	1972	1986	14
	1,0	2000	2014	2028	2042	2056	2071	2085	2099	2114	2129	15
	1,1	2144	2158	2173	2189	2204	2219	2235	2250	2266	2282	15
	1,2	2297	2313	2329	2346	2362	2378	2395	2412	2428	2445	17
	1,3	2462	2479	2497	2514	2532	2549	2567	2585	2603	2621	18
	1,4	2639	2657	2676	2694	2713	2732	2751	2770	2789	2809	19
	1,5	2828	2848	2868	2888	2908	2928	2949	2969	2990	3010	21
	1,6	3031	3053	3074	3095	3117	3138	3160	3182	3204	3227	22
	1,7	3249	3272	3294	3317	3340	3364	3387	3411	3434	3458	24
	1,8	3482	3506	3531	3555	3580	3605	3630	3655	3681	3706	26
	1,9	3732	3758	3784	3811	3837	3864	3891	3918	3945	3972	28
	2,0	4000	4028	4056	4084	4112	4141	4170	4199	4228	4257	30
	2,1	4287	4317	4347	4377	4408	4438	4469	4500	4532	4563	32
	2,2	4595	4627	4659	4691	4724	4757	4790	4823	4857	4891	34
	2,3	4925	4959	4993	5028	5063	5098	5134	5169	5205	5242	36
	2,4	5278	5315	5352	5389	5426	5464	5502	5540	5579	5618	39
	2,5	5657	5696	5736	5776	5816	5856	5897	5938	5979	6021	42
	2,6	6063	6105	6148	6190	6233	6277	6320	6364	6409	6453	45
	2,7	6498	6543	6589	6635	6681	6727	6774	6821	6869	6916	48
	2,8	6964	7013	7062	7111	7160	7210	7260	7311	7362	7413	51
	2,9	7464	7516	7568	7621	7674	7727	7781	7835	7890	7945	55
II	3,0	8000	8056	8112	8168	8225	8282	8340	8398	8456	8515	59
	3,1	8574	8634	8694	8754	8815	8877	8938	9000	9063	9126	64
	3,2	9190	9254	9318	9383	9448	9514	9580	9646	9714	9781	68
	3,3	9849	9918	9987	1006	1013	1020	1027	1034	1041	1048	8
	3,4	1056	1063	1070	1078	1085	1093	1100	1108	1116	1124	7
V	3,5	1131	1139	1147	1155	1163	1171	1179	1188	1196	1204	9
	3,6	1213	1221	1230	1238	1247	1255	1264	1273	1282	1291	9
	3,7	1300	1309	1318	1327	1336	1345	1355	1364	1374	1383	10
	3,8	1393	1403	1412	1422	1432	1442	1452	1462	1472	1483	10
	3,9	1493	1503	1514	1524	1535	1545	1556	1567	1578	1589	11
	4,0	1600	1611	1622	1634	1645	1656	1668	1680	1691	1703	12
	4,1	1715	1727	1739	1751	1763	1775	1788	1800	1813	1825	13
	4,2	1838	1851	1864	1877	1890	1903	1916	1929	1943	1956	14
	4,3	1970	1984	1997	2011	2025	2039	2053	2068	2082	2097	14
	4,4	2111	2126	2141	2156	2171	2186	2201	2216	2232	2247	16
	4,5	2263	2278	2294	2310	2326	2343	2359	2375	2392	2408	17
	4,6	2425	2442	2459	2476	2493	2511	2528	2546	2563	2581	18
	4,7	2599	2617	2635	2654	2672	2691	2710	2728	2747	2767	19
	4,8	2786	2805	2825	2844	2864	2884	2904	2924	2945	2965	21
	4,9	2986	3006	3027	3048	3070	3091	3112	3134	3156	3178	22
	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d

	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	δ
	5,0	3200	3222	3245	3267	3290	3313	3336	3359	3382	3406	24
	5,1	3430	3454	3478	3502	3526	3551	3575	3600	3625	3650	26
	5,2	3676	3701	3727	3753	3779	3805	3832	3859	3885	3912	28
	5,3	3940	3967	3995	4022	4050	4079	4107	4136	4164	4193	29
	5,4	4222	4252	4281	4311	4341	4371	4402	4432	4463	4494	31
	5,5	4525	4557	4589	4621	4653	4685	4718	4750	4784	4817	33
	5,6	4850	4884	4918	4952	4987	5021	5056	5091	5127	5163	35
	5,7	5198	5235	5271	5308	5345	5382	5419	5457	5495	5533	39
	5,8	5572	5610	5649	5689	5728	5768	5808	5849	5889	5930	41
	5,9	5971	6013	6055	6097	6139	6182	6225	6268	6312	6356	44
	6,0	6400	6445	6489	6534	6580	6626	6672	6718	6765	6812	47
	6,1	6859	6907	6955	7003	7052	7101	7151	7200	7250	7301	51
	6,2	7352	7403	7454	7506	7558	7611	7664	7717	7771	7825	54
	6,3	7879	7934	7989	8045	8101	8157	8214	8271	8329	8387	58
	6,4	8445	8504	8563	8622	8682	8743	8803	8865	8926	8988	63
III	6,5	9051	9114	9177	9241	9305	9370	9435	9501	9567	9634	67
	6,6	9701	9768	9836	9904	8973	1004	1011	1018	1025	1033	7
	6,7	1040	1047	1054	1062	1069	1076	1084	1091	1099	1107	7
	6,8	1114	1122	1130	1138	1146	1154	1162	1170	1178	1186	8
	6,9	1194	1203	1211	1219	1228	1236	1245	1254	1262	1271	9
VI	7,0	1280	1289	1298	1307	1316	1325	1334	1344	1353	1362	10
	7,1	1372	1381	1391	1401	1410	1420	1430	1440	1450	1460	10
	7,2	1470	1481	1491	1501	1512	1522	1533	1543	1554	1565	11
	7,3	1576	1587	1598	1609	1620	1631	1643	1654	1666	1677	12
	7,4	1689	1701	1713	1724	1736	1749	1761	1773	1785	1798	12
	7,5	1810	1823	1835	1848	1861	1874	1887	1900	1913	1927	13
	7,6	1940	1954	1967	1981	1995	2009	2023	2037	2051	2065	14
	7,7	2079	2094	2108	2123	2138	2153	2168	2183	2198	2213	16
	7,8	2229	2244	2260	2275	2291	2307	2323	2339	2356	2372	17
	7,9	2389	2405	2422	2439	2456	2473	2490	2507	2525	2542	18
	8,0	2560	2578	2596	2614	2632	2650	2669	2687	2706	2725	19
	8,1	2744	2763	2782	2801	2821	2840	2860	2880	2900	2920	21
	8,2	2941	2961	2982	3002	3023	3044	3066	3087	3108	3130	22
	8,3	3152	3174	3196	3218	3240	3263	3286	3308	3331	3355	23
	8,4	3378	3401	3425	3449	3473	3497	3521	3546	3571	3595	25
	8,5	3620	3646	3671	3696	3722	3748	3774	3800	3827	3853	27
	8,6	3880	3907	3934	3962	3989	4017	4045	4073	4101	4130	29
	8,7	4159	4188	4217	4246	4276	4305	4335	4365	4396	4426	31
	8,8	4457	4488	4519	4551	4583	4614	4646	4679	4711	4744	33
	8,9	4777	4810	4844	4878	4911	4946	4980	5015	5050	5085	35
	9,0	5120	5156	5191	5228	5264	5301	5337	5375	5412	5450	37
	9,1	5487	5526	5564	5603	5642	5681	5721	5760	5800	5841	40
	9,2	5881	5922	5963	6005	6047	6089	6131	6174	6217	6260	43
	9,3	6303	6347	6391	6436	6481	6526	6571	6617	6663	6709	47
	9,4	6756	6803	6850	6898	6946	6994	7043	7092	7141	7191	50
	9,5	7241	7291	7342	7393	7444	7496	7548	7601	7654	7707	53
	9,6	7760	7814	7869	7924	7979	8034	8090	8146	8203	8260	57
	9,7	8317	8375	8434	8492	8551	8611	8671	8731	8792	8853	61
	9,8	8914	8976	9039	9102	9165	9229	9293	9358	9423	9488	66
	9,9	9554	9621	9688	9755	9823	9891	9960	1003	1010	1017	7
	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	δ

Bücherschau.

K. J. Kugler. Multiplikator. Rieseneinmaleins. Preßburg 1900.
Rudolf Drottloff. Preis 50 Heller.

Die Tafel hat Plakatform und geht von 11 mal 11 bis 99 mal 99, d. h. sie enthält die Produkte aller zweiziffrigen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen, jedes Produkt nur einmal. Die Anordnung ist nicht sehr übersichtlich, weshalb das Aufsuchen der Produkte durchschnittlich mehr Zeit erfordert, als bei manchen anderen Produktentafeln größeren Umfangs. Stichproben ergaben keine Druckfehler.

Stuttgart.

R. MEHMKE.

J. A. Bonnerman. Vraagstukken over theoretische Mechanica, opgegeven bij het Examen C aan de Polytechnische School te Delft sedert 1883, met antwoorden. Delft 1900. J. Waltman jr. Preis Fl. —.50.

Es ist immer dankenswert, wenn Aufgaben aus Prüfungen veröffentlicht werden. Hier sind gegen 50, in den Jahren 1883—1900 gestellte Aufgaben dargeboten. Sie gehören den verschiedensten Gebieten der theoretischen Mechanik an und lassen sich für Unterrichtszwecke gut verwenden. Von Aufgaben, in denen Beweise verlangt sind, werden keine Auflösungen gegeben.

Stuttgart.

R. MEHMKE.

Allan Cunningham. A binary Canon, showing residues of powers of 2 for divisors under 1000, and indices to residues. London 1900. Taylor and Francis.

Diese, mit Unterstützung der British Association und der Royal Society herausgegebenen Tafeln sind in bezug auf Anlage, Zweck und Umfang Jacobis bekanntem Canon arithmeticus von 1839 sehr ähnlich, nur daß durchweg die Basis 2 zugrunde gelegt ist, während bei Jacobi die Basis einer jeden einzelnen Tafel eine primitive Wurzel des betreffenden Moduls ist. Für praktische Zwecke, wie die Prüfung der Teilbarkeit oder das Aufsuchen der Primfaktoren großer Zahlen, sind diese neuen Tafeln geeigneter, während Jacobis Tafeln den Vorrang behaupten, sobald die Anwendung einer primitiven Wurzel nötig und 2 keine solche ist, wie es bei rein theoretischen Untersuchungen vorkommen kann. Auf die Herstellung möglichst fehlerfreier Tafeln ist große Mühe verwendet worden, z. B. hat man zwei Handschriften unabhängig von einander berechnet. Es werden 15 in Jacobis Tafeln aufgefundene, bisher nicht veröffentlichte Druckfehler mitgeteilt.

Stuttgart.

R. MEHMKE.

Compte Rendu du 2. congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications publiés par **E. Duporcq**. Paris 1902 Gauthier-Villars 15 fr.

Der angewandten Mathematik gehören folgende Mitteilungen an: J. Boccardi, Remarques sur le calcul des perturbations spéciales des petites planètes. Die Arbeit gibt einige Ratschläge für Berechnung der speziellen Störungen der Planetoiden, wobei der Methode der Variation der Elemente der Vorzug gegeben wird. J. Hadamard, Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. Der Verf. betrachtet die akustische Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a \Delta V$ und zeigt, daß der Gegensatz zwischen Gleichungen mit reellen und imaginären Charakteristiken kein fundamentaler ist, wie man gewöhnlich glaubt. V. Volterra, Sur les équations aux dérivées partielles. Der Verf. dehnt den Satz von Poisson über die Potentialfunktion auf partielle Differentialgleichungen von hyperbolischem Typus aus. A. Gallardo, Les mathématiques et la biologie. Die Arbeit beschäftigt sich mit den Leistungen der Variationsstatistik in den einzelnen Ländern und zählt unter anderem die 5 von Pearson aufgestellten Typen der Frequenzkurven auf. M. d'Ocagne, Sur les divers modes d'application de la methode graphique à l'art du calcul. Calcul graphique et calcul nomographique. Der Verf. setzt den prinzipiellen Unterschied zwischen graphischem und nomographischem Kalkül auseinander. Ersterer liefert eine Größe durch geometrische Konstruktion, letzterer sucht ein Bild von den mathematischen Gesetzen zu geben.

Stuttgart.

WÖLFFING.

J. O. Poggendorff's Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Viertes Band (1883 bis zur Gegenwart). Herausgegeben von Prof. Dr. J. von Oettingen, 1—13. Lieferung (A—L) Leipzig 1902—1903, Barth. (à Lieferung 3 M.)

Der dem dritten sehr rasch folgende vierte Band füllt ein dringendes Bedürfnis aus, umso mehr als er sich nicht dem ursprünglichen Plane gemäß auf das 19. Jahrhundert beschränkt, sondern bis zur Gegenwart weiter geführt worden ist. Von Mathematikern, welche in den vorliegenden Lieferungen fehlen, nenne ich folgende Namen: C. Alasia, U. Amaldi, A. C. Archibald, G. Arnoux, A. Aubry, M. A. Baraniecky, E. N. Barisien, G. Bellacchi, V. V. Bobynin, T. J. Bromwich, J. M. Brückner, W. E. Byerly, B. Carrara, C. Ciamberlini, L. Couturat, R. H. van Dorsten, A. Droz-Farny, F. Dumont, E. Fauquembergue, F. Ferrari, N. Fialkowski, K. Fink, G. Frattini, M. Frolov, G. Z. de Galdeano, D. Gambioli, R. Geigenmüller, E. Gelin, E. Goedseels, W. Gosiewski, E. Gubler, R. Guimarães, D. Kikuchi, V. Kommerell, R. Lachlan, Ed. Lucas, A. Lugli. Von Vertretern der angewandten Mathematik fehlen E. Brauer, Ad. Franke, K. Hausmann, A. F. Jorini, L. Klerič, vor allem aber der Name C. Bach. Es muß freilich zugegeben werden, daß es bei der Gleichgültigkeit vieler hierher gehörigen Personen gegenüber einem solchen Wörterbuch und bei der totalen Verkenntung der Wichtigkeit, welche das Zusammenwirken aller Fachgenossen besitzt, oft schwer ist, biographisches Material zu bekommen. Umso weniger ist es

aber gerechtfertigt, daß die Redaktion es unterlassen hat, die eingelaufenen Originalmitteilungen auf Grund anderer Quellen zu verbessern und zu ergänzen. Denn auch diese Originalmitteilungen lassen die erforderliche Exaktheit in den Literaturangaben vielfach vermissen, und daher rühren die zahlreichen Auslassungen wichtiger Arbeiten, die fehlenden Druckjahre und Druckorte, z. T. auch die unzuverlässigen Abkürzungen der Zeitschriften usw. Zu rügen ist auch, daß Schulprogramme bisweilen mitten unter den Zeitschriftenartikeln verzeichnet sind. Auch die Zahl der Druckfehler scheint eher größer zu sein als in den früheren Bänden. Trotz dieser Ausstellungen muß anerkannt werden, daß durch den neuen Band des Wörterbuchs ein wertvolles weitergestreutes Material für geschichtliche, biographische und literarische Forschung in praktischer Anordnung allgemein zugänglich gemacht wird.

Stuttgart.

WÖLFFING.

C. de Freycinet, Sur les principes de la Mécanique rationelle.
Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Der Verfasser ist ein entschiedener Gegner der neueren Bestrebungen, die Mechanik auf Grund von Axiomen deduktiv aufzubauen; er befürchtet, daß daraus nur Unfruchtbarkeit und Verödung folgen werde. Ohne Zweifel liegt hierin etwas Wahres. Die Geschichte zeigt, daß in den schöpferischen Perioden der einzelnen Disziplinen die Grundbegriffe noch unfertig sind und daß die kritische Betrachtung erst dann eintritt, wenn die Konzeptionskraft nachläßt. Ferner läßt sich nicht leugnen, daß die Beschäftigung mit solchen logischen Untersuchungen die Sache reiferen Alters ist und auf junge Gemüter lähmend wirken kann. Wer Mechanik lehrt, tut daher gut, wie Freycinet es empfiehlt, seine Zuhörer „im Kontakte mit der Natur“ zu erhalten. Allein damit ist über den Wert der logisch-kritischen Untersuchungen noch nicht das letzte Wort gesprochen. Sie verbieten zu wollen, würde jedenfalls dem Geiste der Freiheit widersprechen, der die Lebensluft allen Fortschrittes in der Wissenschaft ist.

Indem der experimentelle Charakter der Mechanik in den Vordergrund gestellt wird, bespricht der Verfasser der Reihe nach die Grundbegriffe: Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Masse und die Grundgesetze der Mechanik, wobei er es vorzüglich versteht, die wahren Schwierigkeiten aufzudecken. Besonders gilt das für den Begriff der Masse; was der Verfasser hier bringt, verdiente in die Lehrbücher aufgenommen zu werden, die gerade in dieser Beziehung zu wünschen übrig lassen.

Kiel.

PAUL STAEBCKEL.

P. Appell et J. Chappuis. Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de première, conformément aux programmes du 31 mai 1902. Paris Gauthier-Villars, 1903.

Die Programme vom 31. Mai 1902 bedeuten eine tiefgreifende Umgestaltung des französischen Mittelschulunterrichtes, die im besonderen auch den mathematischen Unterricht betrifft. Diesem war vorgeworfen worden, daß er zu abstrakt sei und daß die Anwendungen auf die Erfahrungswissenschaften vernachlässigt würden, „die in den Schülern den Geist der Initiative erwecken und sie auf den Tätigkeitskreis vorbereiten, in dem der

größte Teil von ihnen sich zu entwickeln berufen ist“. Jetzt ist eine ausgiebige Beschäftigung mit Kinematik, Statik und Dynamik für die classe première und die classe de Mathématiques vorgeschrieben, die der Unter- und Oberprima der deutschen Gymnasien entsprechen. Das vorliegende Werk enthält die Bearbeitung des Pensums, das für die Unterprima bestimmt ist. Da in Frankreich bei den Prüfungen — unsere Abiturientenprüfung ist dort in zwei Abteilungen zerlegt, die bei dem Übergang von Unter- zu Oberprima und von Oberprima zur Hochschule stattfinden, — genau nach dem Programm gefragt wird, haben sich die Verfasser, wie das auch sonst üblich ist, streng an das Programm gehalten; in diesem Rahmen geben sie eine sehr klare Darstellung des Gegenstandes. Bei dem großen Interesse, das diese neue Entwicklung des mathematischen Unterrichtes für uns in Deutschland hat — handelt es sich doch um einen Versuch, der, wenn er gelingt, auf die deutschen Verhältnisse bedeutsam einwirken muß —, sei es gestattet, das amtliche Programm für den Unterricht in Mechanik auf der classe première hier mitzuteilen.

Den Anfang bildet eine Einführung in die Theorie der Vektoren. Dabei ist es ausdrücklich vorgeschrieben, daß die Behandlung rein geometrisch sein solle, denn, wie Appel und Chappuis in der Vorrede ihres Werkes sagen, „der Mißbrauch der Methoden der analytischen Geometrie tötet die Anschauung und den Erfindungsgeist“. Die Reihenfolge der zu unterrichtenden Dinge ist:

Projektion eines Vektors auf eine gerichtete Achse, geometrische Summe mehrerer zusammentreffender Vektoren. Theorie der Projektionen. Geometrische Differenz zweier Vektoren. Lineares Moment eines Vektors in Bezug auf einen Punkt: das lineare Moment der Summe mehrerer zusammentreffender Vektoren in Bezug auf einen Punkt ist gleich der geometrischen Summe der Momente dieser Vektoren. Systeme beliebiger Vektoren; geometrische Summe; resultierendes Moment in Bezug auf einen Punkt. Besonderer Fall: Paare von Vektoren. Momente in Bezug auf eine Axe. Moment der geometrischen Summe zusammentreffender Vektoren. Summe der Momente der beiden Vektoren eines Paares. Tetraeder und Parallelepipeton, die über zwei Strecken konstruiert werden. Verallgemeinerung des Begriffes des Momentes.

Es folgen die Grundbegriffe und -Tatsachen der Kinematik: Messung der Zeit. Angenommene Einheiten. Pendel. Von der Bewegung. Ihre Relativität. Bahn eines Punktes. Beispiele von Bewegungen. Geradlinige und gleichförmige Bewegung. Geschwindigkeit bei einer Bewegung. Ihre Darstellung durch einen Vektor. Beliebige ungleichförmige Bewegung. Mittlere Geschwindigkeit. Geschwindigkeit in einem gegebenen Augenblick. Ihre Darstellung durch einen Vektor. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Bogens der Bahn nach der Zeit (die Entwicklung des Begriffes der Ableitung gehört zu dem mathematischen Pensum der classe première!). Hodograph. Beschleunigung. Beispiele ungleichförmiger Bewegung. Gleichförmige beschleunigte Bewegung. Gleichförmige Bewegung auf einem Kreise. Winkelgeschwindigkeit. Einfache Schwingungen auf einer Geraden. Wechsel des Bezugssystems. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. Beispiele und Anwendungen (wobei nicht etwa bloß geometrische Anwendungen gegeben werden sollen). Drehbewegung eines Körpers um eine Achse.

Darstellung der Drehung durch einen auf der Achse aufgetragenen Vektor. Die Geschwindigkeit eines Punktes des Körpers ist das lineare Moment des darstellenden Vektors in Bezug auf diesen Punkt. Translationsbewegung eines starren Körpers. Schraubenbewegung eines Körpers. Praktische Realisierung dieser Bewegungen. Wellen und Zapfenlager. Zapfen und Pfannen. Angeln und Gelenke. Geradlinige Gleitschienen. Schrauben und Schraubenmutter.

Kiel.

PAUL STAECKEL.

E. Picard. Quelques réflexions sur la mécanique suivies d'une première leçon de dynamique. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

„Am Ende des 18. Jahrhunderts“, so beginnt der Verfasser seine Auseinandersetzungen, „schienen die Grundlagen der Mechanik über jede Kritik erhaben zu sein, und das Werk der Begründer der Wissenschaft der Bewegung bildete eine Gebäude, das, wie man glaubte, auf immer der Zeit trotzen würde. Seitdem hat eine eindringende Analyse die Fundamente des Gebäudes mit der Lupe untersucht, und da, wo ein Lagrange und ein Laplace selbstverständliche Dinge sahen, begegnen wir jetzt den ernstlichsten Schwierigkeiten. Ein jeder, der die Anfänge der Mechanik zu lehren gehabt hat, wird, wenn er darüber nur selbständig nachgedacht hat, gefühlt haben, wie wenig zusammenhängend die mehr oder weniger traditionellen Darstellungen der Grundlagen sind“. Deshalb habe man versucht, den Gesichtspunkt der historischen Entwicklung zu verlassen, und, wie die Geometer es bei ihrer Wissenschaft getan haben, die Mechanik auf Grund einer Anzahl von Axiomen deduktiv zu entwickeln. Man erhält so ein System der Mechanik, das erst, nachdem es vollständig aufgebaut ist, mit der Erfahrung verglichen wird. Der Mangel dieser Methode besteht darin, daß der Anfänger nicht begreift, warum man gerade auf diese Axiome kommt; in der Geometrie macht sich das weniger geltend, weil ihre Forderungen einen anschaulicheren Charakter haben und sich auf alltägliche Erfahrungen beziehen.

Wie soll man unter diesen Umständen verfahren? Der Verfasser berichtet, welchen Weg er seit 1894 in seinen Vorlesungen eingeschlagen habe; allerdings entstehe dabei eine Mischung von Axiomen und mehr oder weniger genauen Erfahrungen, „avec quelque peu d'anthropomorphisme“. Wie er im einzelnen verfährt, läßt sich in Kürze nicht darstellen, dazu muß man die meisterhafte Leçon selbst durchlesen.

Kiel.

PAUL STAECKEL.

Neue Bücher.

Analysis.

1. **LOEWY, ALFRED**, Versicherungsmathematik. (Sammlung Göschen Nr. 180.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Astronomie und Geodäsie.

2. **FRISCHAUF, JOH.**, Grundriß der theoretischen Astronomie u. der Geschichte der Planetentheorien. 2., verm. Aufl. gr. 8°, XV u. 199 S. m. 22 Fig. Leipzig, Engelmann. M. 5; geb. in Leinw. M. 6.
3. **PIETSCH, C.**, Katechismus der Feldmeßkunst. (Webers illustr. Katech. Nr. 44.) 7. Aufl. Leipzig, Weber. geb. in Leinw. M. 1.80.
4. **SCHULZE, BRUNO**, Das militärische Aufnehmen unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der königlich preussischen Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten. Nach den auf der königl. Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearb. gr. 8°, XIII u. 305 S. m. 129 Abb. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 8.

Geschichte und Biographien.

5. **POGGENDORFF, J. C.**, Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 4. Bd. (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), hrsg. v. A. J. von Oettingen. Lfg. 12—15. Leipzig, Barth. je M. 3.

Mechanik.

6. **CERESOLE, PIERRE**, Über die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer gleichförmig rotierenden Fläche. 8°, VI u. 90 S. m. 23 Fig. Diss. Zürich.
7. **HAUBER, W.**, Statik. I. Tl. Die Grundlehren der Statik starrer Körper. (Sammlung Göschen Nr. 178.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
8. **KLEIN, F.**, u. **SOMMERFELD, A.**, Über die Theorie des Kreisels. Heft III. Die störenden Einflüsse. Astronomische u. geophysikalische Anwendungen. Leipzig, Teubner. M. 9.
9. **OSTENFELD, A.**, Technische Statik. Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen. Deutsche Ausgabe besorgt v. D. Skouge. Leipzig 1904, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.
10. **TAIT, P. G.**, and **STEELE, W. J.**, A treatise on dynamics of a particle. With numerous examples. 7th edition, carefully revised. London & New York, Macmillan. 12mo. 15 + 412 pp. Cloth. \$ 3.
11. **WIEGHARDT, KARL**, Über die Statik ebener Flachwerke mit schlaffen Stäben. gr. 8°, IX u. 85 S. m. 31 Fig. Diss. Göttingen.

Physik und Chemie.

12. **ABRAHAM, HENRI**, Recueil d'expériences élémentaires de physique, publié avec la collaboration de nombreux physiciens. I. partie. Travaux d'atelier. Géométrie et mécanique. Hydrostatique. Chaleur. Paris 1904, Gauthier-Villars.
13. **BRILLOUIN, MARCEL**, Propagation de l'électricité. Histoire et théorie. Cours du Collège de France. Paris, Hermann. Frs. 15.
14. **EXNER, FRANZ**, u. **HASCHKE, E.**, Wellenlängen-Tabellen für spektralanalytische Untersuchungen auf Grund der ultravioletten Bogenspektren der Elemente. 2 Teile. Leipzig u. Wien 1904, Deuticke. M. 25.

15. FORTSCHRITTE, die, der Physik im J. 1902. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschaft. 58. Jahrg. 2. Abtlg. Physik des Äthers. gr. 8°, LIV u. 906 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 34.
16. —, Dasselbe. 58. Jahrg. 3. Abtlg. Kosmische Physik. gr. 8°, LXVIII u. 680 S. Ebenda. M. 26.
17. FUSZ, KONRAD, u. HENSOLD, GEORG, Lehrbuch der Physik f. den Schul- u. Selbstunterricht. Allgemeine Ausgabe. 5., verb. u. verm. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 5; geb. M. 5.70.
18. —, Dasselbe. Gekürzte Ausg., nach den bayrischen Lehrplänen vom 30. Juli 1898 bearb. Freiburg i. B., Herder. M. 4; geb. 4.65.
19. GALLUSKER, H. u. HAUSMANN, M., Theorie u. Berechnung elektrischer Leitungen. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 5.
20. HADAMARD, JACQUES, Leçon sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Cours du Collège de France. Paris, Hermann. Frs. 18.
21. HERMES, O., u. SPIES, P., Elementarphysik, unter Zugrundelegung des Grundrisses der Experimentalphysik von E. Jochmann hrg. für den Anfangsunterricht in höheren Lehranstalten. 3., neu bearb. Aufl. Berlin, Winckelmann & Söhne. geb. M. 2.50.
22. HERZ, W., Über die Lösungen. Einführung in die Theorie der Lösungen, die Dissoziationstheorie u. das Massenwirkungsgesetz. Nach Vorträgen. gr. 8°, V u. 50 S. Leipzig, Veit & Co. M. 1.40.
23. JOCHMANN, E., Grundriß der Experimentalphysik u. Elemente der Chemie sowie der Astronomie u. mathemat. Geographie. Zum Gebrauch beim Unterricht auf höheren Lehranstalten und zum Selbststudium hrg. v. O. Hermes u. P. Spies. 15., vollständig neu bearb. Aufl. Berlin, Winckelmann & Söhne. geb. M. 5.50.
24. MATHIAS, E., Le point critique des corps purs. In-8°, VIII — 156 p. avec 44 fig. Paris 1904, Naud. Frs. 7.
25. MURAMI, ORESTE, Onde Hertziane e telegrafo senza fili. (Manuali Hoepli.) 16°, p. 356, fig. Milano, Hoepli. L. 3.50.
26. NIPPOLDT JR., A., Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht. (Sammlung Göschen Nr. 175.) 8°, 186 S. m. 3 Taf. u. 14 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
27. PELLAT, H., Cours d'électricité, Tome II. Electro-dynamique; Magnétisme; Induction: Mesures électro-magnétiques. Gr. in-8° avec fig. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 18.
28. PFEIFFER, EMANUEL, Physikalisches Praktikum für Anfänger, dargestellt in 25 Arbeiten. 8°, VIII u. 149 S. m. 47 Abb. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 3.60.
29. ROSENBERG, KARL, Lehrbuch der Physik f. die oberen Klassen der Mittelschulen u. verwandter Lehranstalten. Wien u. Leipzig 1904, Hölder. M. 5.20.
30. STODOLA, A., Die Dampfturbinen u. die Aussichten der Wasserkraftmaschinen. Versuche und Studien. gr. 8°, VIII u. 220 S. m. 119 Fig. u. 1 Taf. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 6.
31. VAN T'HOFF, J. H., Vorlesungen über theoretische u. physikalische Chemie. 3. Heft. Beziehungen zwischen Eigenschaften u. Zusammensetzung. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. Mk. 4.
32. WAALS JR., J. D. VAN DER, De hypothesen in de natuurkunde. Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het hoogleeraarsambt aan de rijks universiteit te Groningen op den 23sten September 1903. Groningen, Wolters. Fl. —.75.

Rechenapparate, Tafeln.

33. BOGENBOEKJE voor centesimale verdeeling van den cirkelrand. Delft, Waltman Jr. Fl. —.75.

34. KRAUSE, RUD., Rechnen m. dem Rechenschieber nach dem Dreiskalensystem der Firmen Dennert & Pape, A. W. Faber, Nestler u. a. 12°, 16 S. m. 1 Taf. Mittweida, Polytechn. Buchh. M. —.45.
35. SCHUBERT, HERM., Vierstellige Tafeln u. Gegentafeln, für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. (Sammlung Göschen Nr. 81.) 2. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Verschiedenes.

36. ALEXJEFF, W. G., Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung. (Nach Untersuchungen von N. W. Bugajew und P. A. Nekrassow im Zusammenhang mit meinen Untersuchungen über formale Chemie.) In der Sitzung der Gelehrten Literarischen Gesellschaft zu Jurjew am 30. November 1902 vorgetragen. gr. 8°, 48 S. Jurjew (Dorpat), Mathiesens Buchdruckerei. (Berlin, Mayer & Müller.) M. 1.20.
37. BOLAWELDER, ANTON, Mathematische Ableitung der Naturerscheinungen vom empirischen reinen Raume. Wien, Gerolds Sohn. M. 4.
38. HARPERATH, LUDWIG, Sind die Grundlagen der heutigen Astronomie, Physik, Chemie haltbar? Beitrag zur Lösung der „Welträtsel“ gestützt auf Berzelius und Kopernikus. Vortrag, gehalten in der 75. Versammlung deutscher Naturforscher u. Ärzte zu Cassel. 8°, 57 S. m. 6 Fig., 1 chem. Tab. u. 2 Taf. Berlin. Mayer & Müller. M. 1.
39. SCHUBERT, HERM., Mathematische Mußstunden. Eine Sammlung von Geduldsspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Kleine Ausgabe. 2., durchgesehene Aufl. Leipzig 1904, Göschen. geb. in Leinw. M. 5.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- ABRAHAM, H., Recueil d'expériences élémentaires de physique, s. N. B. („Neue Bücher“), Nr. 12.
- ALEXJEFF, W. G., Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung, s. N. B. 36.
- BOLAWELDER, A. Mathematische Ableitung der Naturerscheinungen, s. N. B. 37.
- BECKER, H., Geometrisches Zeichnen. (Sammlung Göschen Nr. 58.) Neu bearb. v. J. Vonderlinn. 3. (der Neubearbeitg. 1.) Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
- BRILLOUIN, M., Propagation de l'électricité, s. N. B. 13.
- CAMPBELL, JOHN EDWARD, Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups. 8vo, pp. XXIV + 412. Oxford, Clarendon Press. 14 s.
- CERESOLE, P., Über die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer gleichförmig rotierenden Fläche, s. N. B. 6.
- FÉAUX, B., Buchstabenrechnung u. Algebra verbunden mit Aufgabensammlung. 10., verbesserte u. vermehrte Aufl. besorgt durch Fr. Busch. Paderborn, Schöningh.
- FRISCHAUF, J., Grundriß der theoretischen Astronomie, s. N. B. 2.
- FUSS, K., u. HENSOLD, E., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 17 u. 18.
- GAUSS, C. FR., Werke. Neunter Band. Herausg. v. d. Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen. Leipzig, B. G. Teubner. kart. n. M. 26.—
- GLASER, ROB., Stereometrie. (Sammlung Göschen Nr. 97.) 2., umgearb. u. verm. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
- GRACE, J. H., and YOUNG, A., The algebra of invariants. 8vo, VII and 384 pp. Cambridge, University Press.
- HADAMARD, J., Leçons sur la propagation des ondes, s. N. B. 20.

Soeben erschien:

DER
GEOMETRISCHE VORKURSUS
IN SCHULGEMÄSZER DARSTELLUNG.

MIT REICHEM AUFGABENMATERIAL NEBST RESULTATEN
ZUM GEBRAUCH AN ALLEN LEHRANSTALTEN

BEARBEITET VON

ERNST WIENECKE
LEHRER IN BERLIN.

MIT 59 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit ist eine methodisch geordnete Stoffunterlage für den propädeutischen Geometrieunterricht und enthält eine praktische Darstellung der Grundgedanken, die der Verfasser in seinen Vorträgen (Wintersemester 1902/03, gehalten auf Veranlassung der städtischen Schuldeputation zu Berlin) darlegen durfte.

Der geometrische Unterricht soll den Schüler zu der Überzeugung von der Allgemeingültigkeit der geometrischen Wahrheiten bringen, indem er das an einer Einzelform (Lehrfigur) Erkannte an einer kontinuierlichen Formenreihe prüft. Dabei werden einige an der Einzelform aufgenommene Vorstellungen durch neue verdrängt, andere aber durch Wiederholung verstärkt werden. Durch diese anschauliche Anscheidung konstanter Verhältnisse aus variablen, also wesentlicher Merkmale aus unwesentlichen wird die Bildung des Begriffs in anschaulicher Weise vermittelt und damit die Überzeugung erweckt, daß die erkannte geometrische Wahrheit für alle Formen derselben Art Gültigkeit hat. Der „geometrische Vorkursus“ erstrebt also im eigentlichen Sinne eine anschauliche Begriffsentwicklung und dadurch gleichzeitig eine selbsttätige Begriffsverwertung.

Die Darstellung der kontinuierlichen Formenreihe geschieht durch die Verfassers bewegliche Modelle, oder aber auch durch farbige Zeichnungen. Die mit einem * versehenen Kapitel können in den Anstalten, die außer dem propädeutischen noch einen Hauptkursus (mit geometrischem Beweis) fordern, ohne Schaden weggelassen werden.

Ein Teil der Aufgaben ist des Verfassers geometrischer Schülerhaft aus freundlicher Bewilligung des Herrn Verlegers (R. Appellius, Berlin) aufgenommen.

Berlin.

Der Verfasser.

Inhalt.

Allgemeines.

	Seite
1. Die Aufgabe des geometrischen Vorkursus	1
2. Die Mittel des Vorkursus	2
3. Unterrichtlicher Gang im Vorkursus	7
4. Der propädeutische Beweis	11
5. Die Verwendung von Modellen im Vorkursus	14
6. Die Aufgabe im Vorkursus	17

I. Abschnitt. Grundbegriffe.

§ 1. Der Würfel	19
§ 2. Die quadratische Säule	24
§ 3. Die quadratische Pyramide	26
§ 4. Die Walze	27
§ 5. Der Kegel	29
§ 6. Die Kugel	30

II. Abschnitt. Erweiterung der Grundbegriffe.

§ 7. Die Linie und ihr Maß	32
§ 8. Der Winkel und sein Maß	35
§ 9. Das gleichschenklige Dreieck	41
§ 10. Das rechtwinklige Dreieck	47
§ 11. Das ungleichseitig-schiefwinklige Dreieck	50
§ 12*. Die Deckung dreieckiger Flächen	53
§ 13. Das Quadrat	56
§ 14. Die Ausmessung des Quadrats	59
§ 15. Die Veränderung des Quadrats: Der Rhombus	61
§ 16. Das Rechteck	64
§ 17. Die Ausmessung des Rechtecks	68
§ 18. Die Veränderung des Rechtecks: Das Rhomboid	70
§ 19. Die Ausmessung der schiefwinkligen Parallelogramme und des Dreiecks	73
§ 20*. Die Ausmessung des Trapezes und des unregelmäßigen Vierecks	76
§ 21*. Das Maßstabzeichnen	78
§ 22. Der Kreis	80
§ 23. Die Ausmessung des Kreises	85

III. Abschnitt. Die Ausmessung der Körper.

§ 24. Würfel, Säule, Walze	90
§ 25. Pyramide und Kegel	95

*** Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG. ***

Ganter, Dr. H., Prof. an der Kantonschule zu Aarau, und Dr. P. Rudio, Prof. am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlr. Übungsbeispielen. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil: Planer und Radio, die analytische Geometrie der Ebene. Mit 33 Figuren im Text. 5. verb. Aufl. VIII u. 187 S. 1902. In Leinw. geb. n. M. 2. —

II. Teil: Radio, die analytische Geometrie des Raumes. Mit 12 Figuren im Text. 3. verb. Aufl. IX u. 184 S. 1902. In Leinw. geb. n. M. 2. —

Der Inhalt der Lehrbücher über analytische Geometrie, die von verschiedenen deutschen Geometern veröffentlicht worden, ist zwar, abgesehen von manchen unbedeutenden Abweichungen, im wesentlichen dieselbe, aber die Darstellung, die in diesen Büchern gegeben ist, ist nicht sehr gut. Die vorliegende Darstellung soll in diesem Sinne einen gewissen ergänzenden Bedürfnis entgegenkommen. Es werden sich in erster Linie an diejenigen Klassen höherer Lehranstalten, die analytische Geometrie lehren, wenden, die aber auch in gewissem Maße an die Veranschaulichung ihrer Vorlesungen durch ein sorgfältig ausgewähltes Bildmaterial anknüpfen.

Die Durchsicht dieser Bücher hat den Verfassern durch ein sorgfältig ausgewähltes Bildmaterial anknüpfen.

Sarday, Dr. G., Anleitung zur Auflösung eingetragener algebraischer Gleichungen. Neue, völlig umgearbeitete Ausgabe von R. Richter, Professor am Gymnasium in Nordhausen. [VIII u. 159 S.] gr. 8. 1902. geb. n. M. 2. —

Die Neuauflage geht über von der Darstellung des Lesers in seiner früheren Fassung in doppelter Weise hinaus. Erstens ist die Darstellung der Aufgaben besser gestaltet, und auf die mit der Lösung verbundenen Schwierigkeiten ist mehr Rücksicht genommen. Zweitens ist die Darstellung der Aufgaben besser gestaltet, und auf die mit der Lösung verbundenen Schwierigkeiten ist mehr Rücksicht genommen. Die Aufgaben sind besser gestaltet, und auf die mit der Lösung verbundenen Schwierigkeiten ist mehr Rücksicht genommen.

Die Aufgaben sind besser gestaltet, und auf die mit der Lösung verbundenen Schwierigkeiten ist mehr Rücksicht genommen. Die Aufgaben sind besser gestaltet, und auf die mit der Lösung verbundenen Schwierigkeiten ist mehr Rücksicht genommen.

Die Aufgaben sind besser gestaltet, und auf die mit der Lösung verbundenen Schwierigkeiten ist mehr Rücksicht genommen. Die Aufgaben sind besser gestaltet, und auf die mit der Lösung verbundenen Schwierigkeiten ist mehr Rücksicht genommen.



Bestell-Zettel.

Bei

Buchhandlung in

bestelle ich hiermit ein Exemplar des im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig erschienenen Werkes (zur Ansicht).

Wienecke, der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Mit 59 Figuren im Text. [IV u. 97 S.] gr. 8. geb. M. 2.20.

Ort, Wohnung

Datum.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschienen:

I. **Arithmetik und Algebra**, red. von Frz. Meyer.

Heft: 1. [112 S.] 1898. \mathcal{M} 3.40; 2. [112 S.] 1899. \mathcal{M} 3.40; 3. [128 S.] 1899. \mathcal{M} 3.90; 4. [160 S.] 1899. \mathcal{M} 4.80; 5. [208 S.] 1901. \mathcal{M} 6.40; 6. 272 S.] 1901. \mathcal{M} 7.20; 7. [128 S.] 1902. \mathcal{M} 3.20.

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von H. Burkhardt.

I. Teil. Heft: 1. [180 S.] 1899. \mathcal{M} 4.80; 2. [240 S.] 1900. \mathcal{M} 7.50; 4. [190 S.] \mathcal{M} 4.80. II. Teil. Heft: 1. [176 S.] 1901. \mathcal{M} 5.20.

III. **Geometrie**, 2 Teile, red. von Frz. Meyer.

II. Teil. Heft: 1. [140 S.] 1902. \mathcal{M} 4.80.
III. Teil. Heft: 1. [162 S.] 1903. \mathcal{M} 5.20.
III. Teil. Heft: 2/2. [156 S.] 1903. \mathcal{M} 5.20.

IV. **Mechanik**, 2 Teile, red. von F. Klein.

I. Teil. Heft: 1. [121 S.] 1901. \mathcal{M} 5.40; 2. [136 S.] 1902. \mathcal{M} 4.60; 3. [136 S.] 1903. \mathcal{M} 4.60.

II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. \mathcal{M} 3.80; 2. [131 S.] 1903. \mathcal{M} 3.90.

V. **Physik**, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.

I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. \mathcal{M} 4.80.

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie u. Geophysik**, red. v. K. Wiewers.

In Vorbereitung:

VI. 2: **Astronomie**, red. von K. Schwarzschild.

VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen** behandelt, sowie **Generalisierer**.

Alexandrow, Iwan, Professor der Mathematik am Kaiserlich russischen Gymnasium zu Tambow, Aufgaben aus der niederen Geometrie. Nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Übungsbuche zusammengestellt. Mit einem Vorwort von Dr. M. Schuster, Professor an der Oberrealschule zu Oldenburg und 100 Figuren im Text. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 2.40.

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität zu Leipzig, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. [IV u. 160 S.] gr. 8. 1903. geb. \mathcal{M} 3.40, geb. \mathcal{M} 4.—

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektor-Analyse. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. [VI u. 91 S.] gr. 8. 1903. geb. \mathcal{M} 2.40.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillierenden Functionen. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. gr. 8. geh. 1. Lfg. [176 S.] 1901. n. \mathcal{M} 5.60; 2. Lfg. [S. 177—400.] 1902. n. \mathcal{M} 7.60; 3. Lfg. [S. 401—768.] 1903. n. \mathcal{M} 12.40. 4. (Schluß-)Lieferung. 1904. [U. d. Pr.]

Barique, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projective Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fricke in Göttingen. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. geb. \mathcal{M} 8.— In Leinw. geb. \mathcal{M} 9.—

Fort, O. und **O. Schömilch**, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am Kgl. Sächsischen Polytechnikum zu Dresden. 7. Aufl. besorgt von R. Heger in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [XVII u. 268 S.] 1904. gr. 8. geb. n. \mathcal{M} 4.— geb. n. \mathcal{M} 4.80.

Gauß, Carl Friedrich, Werke. Neunter Band. Herausg. von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. [VI u. 528 S.] 4. 1903. kart. n. \mathcal{M} 26.—

Haentzschel, Dr. Emil, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule und am Köllnischen Gymnasium zu Berlin, Das Erdaphäroid und seine Abbildung. Mit 16 Text-Abbildungen. [VIII u. 140 S.] 1903. gr. 8. geb. n. \mathcal{M} 3.40.

Hilbert, Dr. David, o. Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [VI u. 175 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 5.20, geb. \mathcal{M} 5.60.

Klein, F., und **A. Sommerfeld**, Über die Theorie des Kreisels. III. Heft: Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. [IV u. 247 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 9.—

Kronecker, L., Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen. II. Teil. Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. Band: Erste bis einundzwanzigste Vorlesung. Bearbeitet und fortgeführt von Dr. Kurt Hensel. Mit 11 Fig. im Text. [XII u. 390 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 20.—, geb. n. \mathcal{M} 21.—

Kähler, J., *Beurteilung des goldenen Schnittes als des geometrischen Ziel der stetigen Entwicklung und die daraus hervorgehende Flügelgestalt mit ihrer durchgreifenden Förföglindendung*. Mit 15 Figuren auf 1 Tafeln. [20 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 1.50.

Salmon, George, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweiter Teil. Sechste Auflage. [XXIV u. 416 S.] gr. 8. 1903. geb. \mathcal{M} 8.—, geb. \mathcal{M} 9.—

Schenk, Dr. ing. Julius, *Festigkeitsberechnung größerer Drehtromaschinen*. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 68 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 1.60.

Schreier, Dr. K., *die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen*. Untersuchung der Frage „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Beantwortung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 2.60.

— *die Kraftmaschinen*. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltenen Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebräuchlichen Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 55 Abbildungen im Text. [XII u. 342 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 4.—, geb. n. \mathcal{M} 4.80.

Schulze, Bruno, Generalmajor und Chef der Topographischen Abteilung der Landesaufnahme, *Das militärische Aufnehmen, unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der Königl. Preuss. Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschlands benachbarter Staaten*. Nach den auf der Königl. Kriegsakademie gehaltenen Vorlesungen bearbeitet. Mit 129 Figuren im Text. [XIII u. 306 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 4.—

Serret-Bohlmann, *Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung*. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Boman und K. Ziemann. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [204 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 6.— Zweite (Schluß-)Lieferung. [Unter der Presse.]

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstand der Gesellschaft. Zweiter Jahrgang. [IV u. 68 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 2.—

Weinholdt, Dr. Ernst, Professor an der Kaiserlichen Marine-Akademie und -Schule zu Kiel, *Leitfaden der analytischen Geometrie*. Auf Veranlassung der Kaiserlichen Inspektion des Bildungswesens der Marine. Mit 62 Figuren im Text. [VI u. 80 S.] gr. 8. 1902. geb. n. \mathcal{M} 1.60.

Wienecke, Ernst, Lehrer in Berlin, *der geometrische Vorkursus in schulgemässer Darstellung*. Mit reichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten u. Gebr. an allen Lehranst. Mit 69 Fig. i. Text. [IV u. 87 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 2.20.

Wölffing, Dr. Ernst, Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, *Mathematischer Bücherschatz*. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts u. d. Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: *Reine Mathematik*. Mit einer Einleitung; Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 14.—, geb. n. \mathcal{M} 15.—

Zeuthen, G. H., Professor an der Universität Kopenhagen, *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert*. Deutsch von Hermann Meier. A. u. d. T.: *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*. Begründet von Moritz Cantor. XVII. Heft. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geb. n. \mathcal{M} 16.—

Teils mehr zu kaufen: **Poggendorf's Annalen.** Von Anfang an
da von 1844 bis 1877 und bis 1887 und
Jacques Kossuth, Buch- und Kunst-Antiquar. München, Karl-Str. No. 10

Darl. zu 5%

erb. definit. Angest. unt. koul. Bsl. auch Leb. Vers.-Abchluß (Rückporto)
Ferd. Reitz, Gen.-Agt., **Neu-Isenburg** b. Frankfurt a./M.

Encyklopädie der Elementar-Mathematik.

Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von

Heinrich Weber, und **Joseph Wellstein.**

Professor in Straßburg.

Professor in Gießen.

In drei Bänden, zu je etwa 30 Druckbogen.

I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie.

III. Anwendungen der Elementar-Mathematik.

Mit zahlr. Textfig. — Bd. I [XVI u. 447 S.] gr. 8. 1893. In Leinw. geb. d. M. —

Das Werk will die fundamentalen Lehren der Arithmetik und Algebra mehr vertiefen, als es im Schulunterricht gewöhnlich geschieht, den künftigen Lehrer auf einen wissenschaftlichen Standpunkt stellen, von dem aus es imstande ist, das, was er später zu lehren hat, tiefer zu erkennen und zu erfassen, und damit den Wert dieser Lehren für die allgemeine Geistesbildung erhöhen. — Das Ziel wird nicht in der Vergrößerung des Umfangs der Elementar-Mathematik oder in der Hinkleidung höherer Probleme in ein elementares Gewand zu erreichen gesucht, sondern in einer strengen Herleitung und leicht faßlichen Darlegung der Elemente. Das Werk ist nicht sowohl für den Schüler selbst, als für den Lehrer und Studierenden bestimmt, die neben jenen fundamentalen Betrachtungen auch eine für den praktischen Gebrauch nützliche wohlgeordnete Zusammenstellung der wichtigsten Algorithmen und Probleme darin finden werden.

Zu Versuchs- u. Lehrzwecken ist eine kleine Accumulatoren-Batterie mit 19 Elementen, 12 Ampère bei 3stündiger Entladung, sowie eine dazu passende Dynamomaschine und Schaltbrett mit allen erforderlichen Schaltapparaten und Meßinstrumenten unter äußerst günstigen Bedingungen zu verkaufen. Die Anlage ist erst vor kurzer Zeit aufgestellt und noch in Betrieb zu sehen.

Gefl. Anerbieten unter **S. N. 2** an die Expedition dieser Zeitschrift, Leipzig, Poststr. 3, erbeten.

Sowen ist in der **Herderschen Verlagsbuchhandlung zu Freiburg im Breisgau** erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Fuß, Konrad, und Georg Henzold, Lehrbuch der Physik für den Schul- und Selbstunterricht.

Allgemeine Ausgabe. Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit vielen Übungsaufgaben, einer Spektraltafel in Farbendruck und 422 in den Text gedruckten Abbildungen. gr. 8° (XX u. 542) M 5.—; geb. in Halbleder M 5.70.

Gekürzte Ausgabe, nach den bayerischen Lehrplänen vom 30. Juli 1898 bearbeitet. Sechste, verbesserte Auflage. Mit vielen Übungsaufgaben, einer Spektraltafel in Farbendruck und 328 in den Text gedruckten Abbildungen. gr. 8° (XVI u. 376) M 4.—; geb. in Halbleder M 4.65.

••••• Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. •••••

Technische Statik.

Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen.

Von **H. Ostenfeld,**

Professor an der Technischen Hochschule zu Kopenhagen.

Deutsche Ausgabe, besorgt von **D. Skouge.**

Mit 336 Figuren auf 33 Tafeln. [VIII u. 465 S.] gr. 8. 1903. geb. n. M 12.—

Nach einer kurzen Einleitung, welche Allgemeines über die Eigenschaften und Anwendungen der Einflußlinien enthält, werden die Leser durch den zweiten und dritten Abschnitt mit der Behandlung ruhender und beweglicher Belastung auf einfach unterstützte vollwandige Träger und Fachwerkbalken vertraut gemacht. Anstatt nun weiter mit der Behandlung komplizierterer Fälle von statisch bestimmten Konstruktionen fortzufahren, wird im vierten Abschnitt gleich zur allgemeinen Theorie der Tragkonstruktionen übergegangen. Diese Theorie wird hier einheitlich — für statisch bestimmte und unbestimmte Systeme — mit Hilfe der virtuellen Verschiebungen aufgebaut; die Behandlung ist indessen nur noch rein prinzipiell, indem die Besprechung der Einzelheiten der Berechnung von allen speziellen Trägerformen dem folgenden Bande vorbehalten bleibt. Endlich wird im fünften Abschnitt (dem letzten dieses Bandes) das Wesentlichste über die verschiedenen Fachwerkformen gesagt, wobei auch die in den letzten Jahren entstandenen Formen, K-Fachwerk, halbe Diagonalen, behandelt werden.

Physikalisches Praktikum für Anfänger.

Dargestellt in 25 Arbeiten von

Dr. Emanuel Pfeiffer,

Professor an der Königl. Industrieschule zu München.

Mit 47 in den Text gedruckten Abbildungen. [VIII u. 150 S.]

gr. 8. 1903. geb. M 3.60.

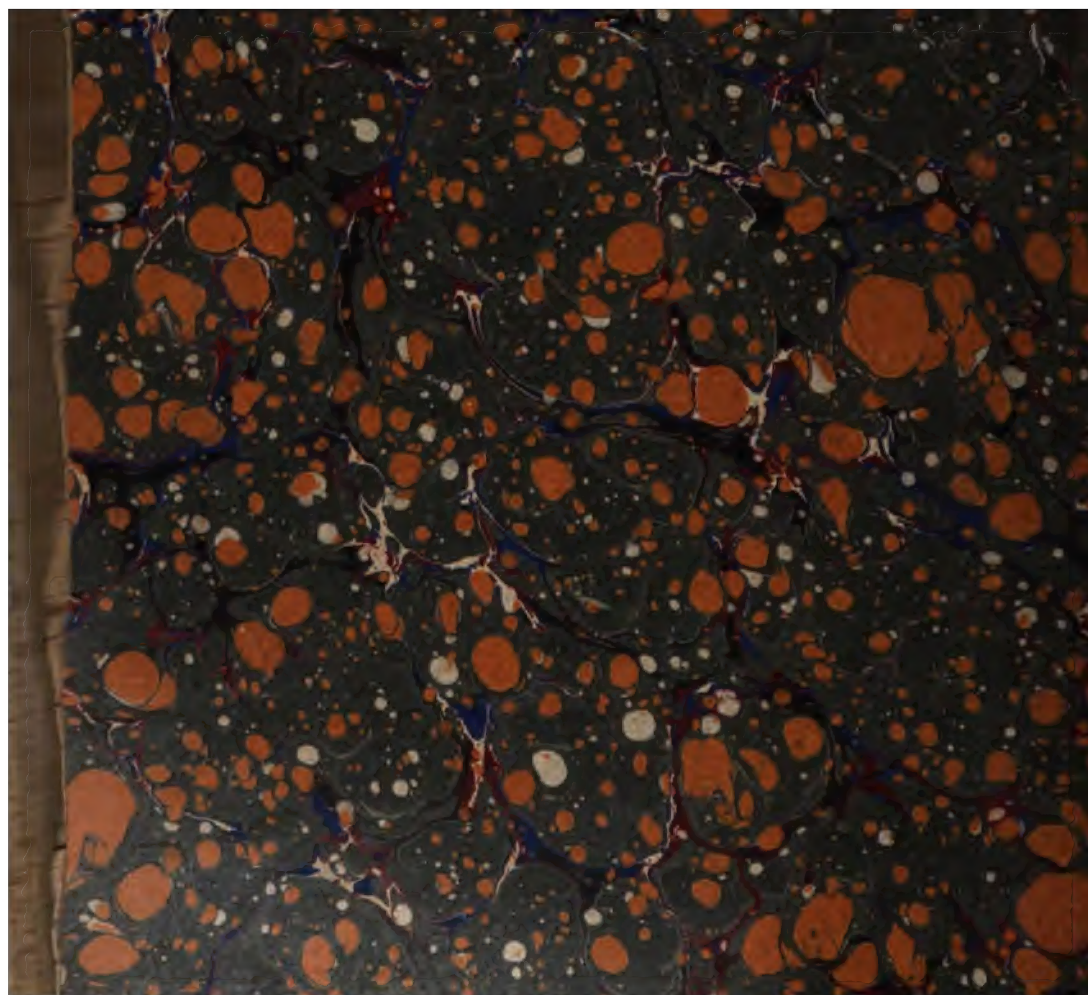
Die bisher existierenden Werke, welche sich mit der Anstellung praktischer Arbeiten im physikalischen Laboratorium befassen, streben wohl alle, wenn auch von verschiedenem Standpunkte aus, eine gewisse Vollständigkeit hinsichtlich des vorhandenen Lehrstoffes an. Infolge seines großen Umfanges bleibt es dann, weil Zeit und Raum mangeln, bei den allgemeineren Darbietungen; das Eingehen auf Einzelheiten wird der Tätigkeit des Lehrers überlassen. Da aber gerade diese Details für den Anfänger am wichtigsten und schwierigsten sind und eingehende Überwachung und Belehrung des einzelnen Praktikanten erfordern, so ist bei zu großer Schülerzahl die Gefahr vorhanden, daß das Arbeiten ein unrationelles, oberflächliches, ungenaues und deshalb wenig befriedigendes und nutzbringendes wird. Hier sucht das vorliegende Buch eine Lücke in unserer physikalischen Literatur auszufüllen, indem es die fundamentalsten Teile der Physik in 25 Arbeiten auf 150 Seiten behandelt.

Hierzu Beilagen von B. G. Teubner in Leipzig, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000









LIBRARY

STORAGE AREA

